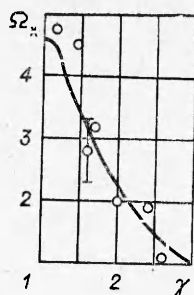
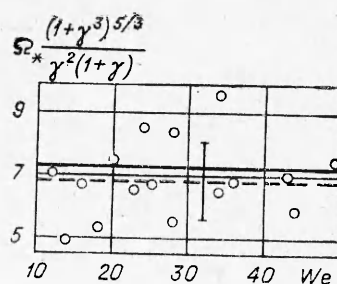


Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

На фиг. 4 представлена зависимость $\Omega_*(\gamma)$, рассчитанная по формуле (7) (сплошная линия). Здесь же приведены экспериментальные точки $\Omega_*(\gamma)$, осредненные по We . Экспериментальные точки для комплекса, входящего в левую часть (7), приведены на фиг. 5 в зависимости от критерия We . С учетом разброса экспериментальных данных эти точки ложатся вокруг значения $6,84 + 1,3$, что удовлетворительно согласуется с аналитической оценкой.

В пределах исследованных диапазонов изменения определяющих процесс критериев $We = 10-50$, $\gamma = 1,15-2,6$ зависимость (7) может быть рекомендована для оценки границ устойчивости системы двух сталкивающихся капель идеальной жидкости.

Поступила 23 III 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Соловьев А. Д. Слияние капель жидкости при соударениях. — В кн.: Физика облаков и искусственных воздействий. Вып. 89. М.: изд. ЦАО, 1969.
2. Архипов В. А., Ратанов Г. С., Трофимов В. Ф. Экспериментальное исследование взаимодействия капель при столкновениях. — ПМТФ, 1978, № 2.
3. Архипов В. А., Васенин И. М., Трофимов В. Ф. Экспериментальное исследование устойчивости вязких капель при столкновениях. — В кн.: Физическая гидродинамика и теплообмен. Новосибирск: изд. ИТФ СО АН СССР, 1978.
4. Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д., Слобожанин Л. А., Тющцов А. Д. Гидромеханика невесомости. М.: Наука, 1976.

УДК 533.6.01

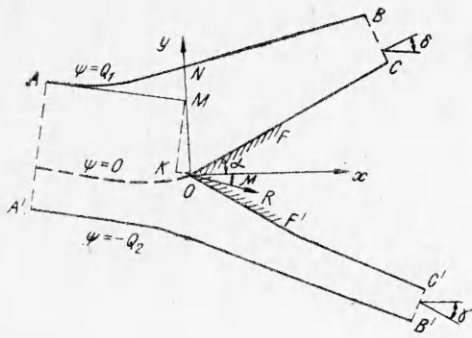
ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СТРУЙНОГО ОБТЕКАНИЯ КЛИНА

В. И. Трошин

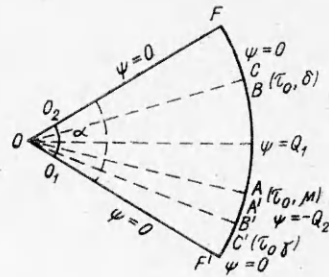
(Вологда)

В работе дано точное общее решение задачи о струйном обтекании клина (и пластинки) потоком газа (в частности, несжимаемой жидкости) в случае, когда критическая точка находится на вершине клина. Получены функция тока и соотношения, устанавливающие связь между параметрами клина, потока и расположением клина. В качестве примера полученное общее решение применяется для решения задачи обтекания клина на поверхности беспредельного потока, которая является обобщением одной из задач, поставленных Н. Е. Жуковским. Показывается, что общее решение содержит решение для всех ранее разобранных частных случаев задачи.

1. Набегающая на клин (l_1 и l_2 — длины щек, 2α — угол раствора клина) с дозвуковой скоростью V_0 струя газа ширины H и расходом Q , составляющая с осью клина (ось x) угол μ , делится в критической точке O на вершине клина на две струи шириной H_1 и H_2 с расходами Q_1 и Q_2 , составляющие с осью клина углы δ и γ (фиг. 1). Эта классическая задача впервые рассматривалась для несжимаемой жидкости А. П. Котельниковым [1], который дал решение для частного случая $Q_1 = Q_2$. В работе Н. Е. Жуковского [2] указано, что его метод допускает решение и при $Q_1 \neq Q_2$, однако само решение не дано. Общее решение задачи ($Q_1 \neq Q_2$)



Ф и г. 1



Ф и г. 2

для газовой струи при дозвуковых скоростях дано в [3], как частный случай оно содержит решение и для несжимаемой жидкости. В [4] намечено решение для жидкой струи, однако не приведены конечные результаты. В повторном издании [5] лишь дана ссылка на [1, 2]. Позднее решения (с ошибками) для газа даны в [6, 7]. Поскольку эти ошибки вносят хаос в решение классической задачи, имеет смысл вернуться к общему решению [3], тем более, что оно нуждается в существенном дополнении. Это решение имеет вид

$$(1.1) \quad \psi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{Z_{nq/2}(\tau)}{Z_{nq/2}(\tau_0)} \sin n\theta';$$

$$(1.2) \quad a_n = \frac{2Q}{\pi n} (\cos n\mu' - K_2 \cos n\gamma' - K_1 \cos n\delta');$$

$$(1.3) \quad l_1 = \frac{Q}{V_0^{1/2}(1-\tau_0)^{\beta}} \left\{ \frac{1}{\sin 2\alpha} [\cos(\mu + \alpha) - K_2 \cos(\gamma + \alpha) - K_1 \cos(\delta + \alpha)] + \right. \\ \left. + \frac{1}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} nq}{n^2 q^2 - 1} (\cos n\mu' - K_2 \cos n\gamma' - K_1 \cos n\delta') X_{nq/2}(\tau_0) \right\};$$

$$(1.4) \quad l_2 = \frac{Q}{V_0(1-\tau_0)^{\beta}} \left\{ \frac{1}{\sin 2\alpha} [\cos(\mu - \alpha) - K_2 \cos(\gamma - \alpha) - K_1 \cos(\delta - \alpha)] + \right. \\ \left. + \frac{1}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} nq}{n^2 q^2 - 1} (\cos n\mu'' - K_2 \cos n\gamma'' - K_1 \cos n\delta'') X_{nq/2}(\tau_0) \right\};$$

$$(1.5) \quad K_1 + K_2 = 1, \quad \sin q\mu = K_2 \sin q\gamma + K_1 \sin q\delta;$$

$$(1.6) \quad R = QV_0 [1 - K_2 \cos(\mu - \gamma) - K_1 \cos(\mu - \delta)],$$

$$R_1 = \frac{QV_0}{\sin 2\alpha} [\cos(\mu + \alpha) - K_2 \cos(\gamma + \alpha) - K_1 \cos(\delta + \alpha)],$$

$$R_2 = \frac{QV_0}{\sin 2\alpha} [\cos(\mu - \alpha) - K_2 \cos(\gamma - \alpha) - K_1 \cos(\delta - \alpha)]$$

$$(K_1 = Q_1/Q, K_2 = Q_2/Q, q = \pi/2\alpha, \theta' = q\theta + \pi/2, \theta'' = q\theta - \pi/2).$$

Здесь ψ — функция тока; τ, θ — переменные Чаплыгина; $Z_n(\tau), X_n(\tau)$ — функции Чаплыгина [5, 8, 9]; R_1 и R_2 — давление на щеки клина; R — сопротивление клина; τ_0 — значение τ на свободной поверхности; $\rho^0 = 1$ — плотность торможения; $\beta = 1/(\chi - 1)$, χ — показатель политропы.

В справедливости (1.1), (1.2) можно убедиться непосредственно, совершая обход контура, ограничивающего поток в плоскости годографа (фиг. 2). Равенства (1.3), (1.4), (1.6) могут быть получены интегрированием формул перехода от плоскости годографа к физической плоскости вдоль щек клина или вдоль линии постоянной скорости.

2. Второе из соотношений (1.5) установлено в [3] лишь для $q \leq 1$ (обращенный клин и пластинка). Покажем, что оно выполняется для всех q .

В бесконечно малой окрестности точки O из (1.1) имеем

$$(2.1) \quad \psi \sim a_n \frac{Z_{nq/2}(\tau)}{Z_{nq/2}(\tau_0)} \sin n\theta',$$

где n — номер первого отличного от нуля члена в ряде (1.1). Для несжимаемой жидкости

$$(2.2) \quad \psi \sim a_n (\tau/\tau_0)^{nq/2} \sin n\theta' = a_n (V/V_0)^{nq} \sin n\theta'.$$

При обходе точки O по бесконечно малой дуге O_1O_2 в плоскости годрографа (τ, θ) (см. фиг. 2) изменение аргумента равно 2α , тогда как при таком же обходе в области комплексного потенциала $W = \varphi + i\psi$ изменение аргумента равно 2π . Отсюда следует [5], что в бесконечно малой окрестности точки O

$$(2.3) \quad W \sim \text{const} \left(\frac{V}{V_0} e^{i\theta} \right)^{\pi/2}.$$

Сравнение (2.2) и (2.3) дает $n = 2$. Этот же результат следует и непосредственно из (2.1). Действительно, при обходе O_1O_2 должна быть пересечена линия $\psi = 0$ (см. фиг. 2), т. е. $\sin n\theta'$ должно обратиться в нуль один и только один раз в интервале от $\theta' = 0$ ($\theta = -\pi/2$) до $\theta' = \pi$ ($\theta = \pi/2$). Можно видеть, что это достижимо лишь при $n = 2$.

Итак, ряд (1.1) начинается со второго члена и $a_1 = 0$, а для любого q должно выполняться равенство

$$(2.4) \quad \cos \mu' - K_2 \cos \gamma' - K_1 \cos \delta' = 0$$

и суммирование в (1.1), (1.3), (1.4) идет с $n = 2$. Равенство же (2.4) равносильно второму равенству (1.5), которое выполняется, таким образом, для всех q . Почти четверть века этот факт не был замечен [3, 6, 7].

Из (1.5) находим

$$(2.5) \quad \begin{aligned} K_1 &= (\sin q\mu - \sin q\gamma)/(\sin q\delta - \sin q\gamma), \\ K_2 &= (\sin q\mu - \sin q\delta)/(\sin q\gamma - \sin q\delta). \end{aligned}$$

Подставив (2.5) в (1.3), (1.4), будем иметь два уравнения для неизвестных параметров γ и δ . Определив γ и δ по (2.5), находим K_1 и K_2 , и тем самым по (1.2), (1.1) определяется функция тока ψ , а с ней и все характеристики потока. Таким образом, (1.1)—(1.5) — полное решение. Оно имеет место для всех q , в том числе и для пластинки ($q = 1$). При этом в (1.3) и (1.4) при $n = 1$ для раскрытия неопределенности типа $0/0$ следует перейти к пределу $q \rightarrow 1$. Этот переход легко осуществим, однако, чтобы не писать в дальнейшем два параллельных ряда формул, будем вести суммы с $n = 1$, имея в виду необходимость указанного предельного перехода для пластинки; для клина ввиду (2.4) это ничего не меняет, так как $a_1 = 0$.

Если в (1.1)—(1.6) положить $\beta = 0$, $X_{nq/2}(\tau_0) = 1$,

$$\frac{Z_{nq/2}(\tau)}{Z_{nq/2}(\tau_0)} = \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^{nq/2} = \left(\frac{V}{V_0} \right)^{nq},$$

то получим решение задачи для несжимаемой жидкости, которое ранее также не было полностью получено. При этом для функции тока ψ ряд суммируется через элементарные функции, а суммы рядов в (1.3), (1.4) могут быть выражены через определенные интегралы, которые для случая, когда q — рациональное число (т. е. когда угол раствора клина соизмерим с π), также могут быть выражены через элементарные функции [10, 11].

3. Поскольку соотношения (1.1)—(1.5) полностью определяют поток, то они дают возможность найти любой параметр потока, в частности глу-

бину погружения $h = MK$ вершины клина в набегающую струю относительно ее верхнего уровня в бесконечности (см. фиг. 1). Дадим этот вывод, так как при выводе аналогичного соотношения были допущены ошибки в работах [6, 7].

Достаточно вывести определяющее соотношение для $L = OM$, так как $h = L \cos \mu$. Пусть AM — асимптота верхней поверхности в набегающей струе, а ее уравнение имеет вид

$$y = \operatorname{tg} \mu x + L,$$

где L — координата точки пересечения асимптоты с осью x .

В бесконечно удаленных сечениях струй должно быть

$$(3.1) \quad \lim_{\theta \rightarrow \delta} (x_{FC} - x_{AB}) = H_1 \sin \delta, \quad \lim_{\theta \rightarrow \delta} (y_{AB} - y_{FC}) = H_1 \cos \delta, \\ \lim_{\theta \rightarrow \mu} (y_{AB} - \operatorname{tg} \mu x_{AB}) = L.$$

Для свободных поверхностей струй имеем уравнения [5, 8]

$$(3.2) \quad y = y_0 + \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\sin \theta}{V_0} \frac{2\tau_0}{(1-\tau_0)^\beta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \tau} \right)_{\tau=\tau_0} d\theta, \\ x = x_0 + \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\cos \theta}{V_0} \frac{2\tau_0}{(1-\tau_0)^\beta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \tau} \right)_{\tau=\tau_0} d\theta,$$

где x_0, y_0 — координаты точки D на струе; θ_0 — угол наклона скорости в этой точке.

Используя выражение для функции тока (1.1), (1.2) и (3.2), записываем уравнения свободных поверхностей AB и FC , принимая за точку D для струи AB точку $N(0, y_1)$ с углом $\theta_0 = \theta_1$, а для струи FC — точку $F(l_1 \cos \alpha, l_1 \sin \alpha)$ при $\theta_0 = \alpha$. Полученные соотношения подставим в (3.1), из которых составляем комбинацию $L - H_1 \cos \delta - \operatorname{tg} \mu H_1 \sin \delta$. Будем иметь

$$(3.3) \quad \frac{\pi}{2q} \left[\frac{L \cos \mu}{H} - \frac{l_1 \sin(\alpha - \mu)}{H} - K_1 \cos(\delta - \mu) \right] = \sum_{n=1}^{\infty} (\cos n\mu' - K_2 \cos n\gamma' - \\ - K_1 \cos n\delta') X_{nq/2}(\tau_0) \int_{\mu}^{\alpha} \sin(\mu - \theta) \sin n\theta' d\theta.$$

Вычисляя интегралы и используя выражение (1.3) для l_1 , находим глубину h :

$$(3.4) \quad \frac{h}{H} - K_1 \cos(\delta - \mu) = \frac{\sin(\alpha - \mu)}{\sin 2\alpha} [\cos(\mu + \alpha) - K_2 \cos(\gamma + \alpha) - \\ - K_1 \cos(\delta + \alpha)] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\mu'}{n^q - 1} (\cos n\mu' - K_2 \cos n\gamma' - K_1 \cos n\delta') X_{nq/2}(\tau_0).$$

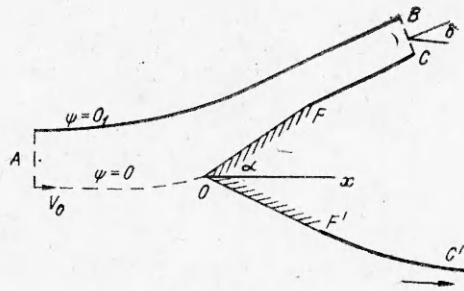
Наличие трех уравнений (1.3), (1.4), (3.4) для двух неизвестных параметров γ и δ показывает, что при заданных геометрии клина $l_1, l_2, 2\alpha$, параметрах потока V_0, H и схеме обтекания (см. фиг. 1) расположение клина не произвольно, а именно при заданной ориентации оси клина μ глубина погружения h должна быть вполне определенной и наоборот.

Если же мы зададим K_1 и K_2 , то из (1.3)—(1.5), (3.4) определяются угол μ и глубина h .

Следовательно, решение [1] при условии

$$(3.5) \quad K_1 = K_2 = 1/2$$

определяет поток хотя и возможный, но сугубо частного вида.



Ф и г. 3

Особым является случай пластинки. Для нее неизвестны l_1 , l_2 , δ , γ , которые определяются уравнениями (1.3), (1.4), (3.4) и $l_1 + l_2 = 2l$ ($2l$ — длина пластинки), здесь h и μ независимы.

При выводе аналога формулы (3.4) в [6] получены ошибочные соотношения, которые снова найдены в несколько иной форме в [7] (уравнения (17.13) этой работы). Анализируя эти уравнения,

автор [7] утверждает, что в любом случае $Q_1 = Q_2$, т. е. всегда выполняется (3.5).

Этот вывод ошибочен, так как получен из ошибочных уравнений (17.13), при выводе которых автор [7] упускает из виду, что точка A — особая точка потока, а используемое им решение для каждого конкретного τ является рядом Фурье, для которых имеет место теорема Дирихле [12].

4. В качестве примера применим общее решение к задаче обтекания клина, находящегося у поверхности беспредельного потока газа, когда набегающий поток параллелен оси клина ($\mu = 0$) (фиг. 3).

Будем исходить из решения (1.1)—(1.6) для струи с конечным расходом Q . Для $\mu = 0$ из (1.5) имеем

$$(4.1) \quad Q_2/Q_1 = -\sin q\delta / \sin q\gamma.$$

С учетом (4.1) находим

$$(4.2) \quad \psi = \frac{2Q_1}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\cos \frac{n\pi}{2} - \cos n\delta' - \sin q\delta \frac{\cos \frac{n\pi}{2} - \cos n\gamma'}{\sin q\gamma} \right] \times \\ \times \frac{Z_{nq/2}(\tau)}{Z_{nq/2}(\tau_0)} \sin n\theta';$$

$$(4.3) \quad l_1 + l_2 = \frac{Q_1}{V_0(1-\tau_0)^\beta} \left\{ \frac{1}{\sin \alpha} \left[1 - \cos \delta - \sin q\delta \frac{1 - \cos \gamma}{\sin q\gamma} \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 4nq}{4n^2 q^2 - 1} \left[1 - \cos 2nq\delta - \sin q\delta \frac{1 - \cos 2nq\gamma}{\sin q\gamma} \right] X_{nq}(\tau_0) \right\};$$

$$(4.4) \quad R = Q_1 V_0 \left[1 - \cos \delta - \sin q\delta \frac{1 - \cos \gamma}{\sin q\gamma} \right].$$

Рассматриваемой задаче (фиг. 3) соответствует $Q_2 = \infty$. Как видно из (4.1), при $Q_2 \rightarrow \infty$ ($Q_1 = \text{const}$) должно $\gamma \rightarrow 0$. Выполняя в (4.2)—(4.4) этот предельный переход, находим для этой задачи

$$(4.5) \quad \psi = \frac{2Q_1}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\cos \frac{n\pi}{2} - \cos n\delta' - \sin q\delta \sin \frac{n\pi}{2} n \right] \frac{Z_{nq/2}(\tau)}{Z_{nq/2}(\tau_0)} \sin n\theta';$$

$$(4.6) \quad l_1 + l_2 = \frac{Q_1}{V_0(1-\tau_0)^\beta} \left[\frac{1 - \cos \delta}{\sin \alpha} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 4nq}{4n^2 q^2 - 1} (1 - \cos 2nq\delta) X_{nq}(\tau_0) \right];$$

$$(4.7) \quad R = Q_1 V_0 (1 - \cos \delta).$$

Применим общее решение (1.1)—(1.6) к случаю симметричного обтекания клина ($\mu = 0$, $\gamma = -\delta$, $l_1 = l_2 = l$, $K_1 = K_2 = 1/2$). Будем иметь

$$(4.8) \quad \psi = \frac{Q}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (1 - \cos 2nq\delta) \frac{Z_{nq}(\tau)}{Z_{nq}(\tau_0)} \sin 2nq\theta;$$

$$(4.9) \quad 2l = \frac{Q}{V_0(1-\tau_0)^\beta} \left[\frac{1 - \cos \delta}{\sin \alpha} + \frac{1}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 4nq}{4n^2 q^2 - 1} (1 - \cos 2nq\delta) X_{nq}(\tau_0) \right];$$

$$(4.10) \quad R = QV_0(1 - \cos \delta).$$

Эти формулы для $q = 1$ (пластинка) получены в [8].

Сравнивая (4.6), (4.7) и (4.9), (4.10), приходим к результату: сопротивление клина R , поставленного у поверхности беспредельного потока, параллельного оси клина ($\mu = 0$) и перебрасывающего через клин струйку с расходом Q_1 , такое же, как при симметричном обтекании равнобокого клина струей газа с тем же расходом Q_1 , если сумма длин щек этих клиньев одинакова ($l_1 + l_2 = 2l$).

Еще более изящно этот результат выглядит для пластинки: бесконечный поток, имеющий скорость V_0 , ударяющий краем по нормально поставленной к нему пластинке и перебрасывающий через нее струю с расходом Q_1 , производит на нее то же давление, что и струя, пущенная на середину пластинки со скоростью V_0 и расходом Q_1 .

Этот интересный результат для несжимаемой жидкости установлен Н. Е. Жуковским, рассмотревшим случай пластинки. Соотношения (4.9), (4.10) для $q = 1$ и при переходе к несжимаемой жидкости приводят к формулам [2].

Разобранная задача, для которой $K_1 = 0$, $K_2 = 1$, является хорошим контрпримером к утверждению о тотальной выполнимости (3.5).

5. Положив в общем решении (1.1)–(1.6), (3.4) $\delta = \alpha$, получим $l_1 = \infty$ и придем к решению задачи обтекания полуплоскости с изломом в точке O . Положив дополнительно здесь $\alpha = \pi/2$, получим решение задачи обтекания полуплоскости без излома [13].

Если в общем решении $\delta = \alpha$, $\gamma = -\alpha$, то получим $l_1 = \infty$, $l_2 = \infty$ и придем к решению задачи обтекания плоской стенки с изломом; при $\alpha = \pi/2$ получим решение задачи обтекания плоскости без излома [14, 15].

Предельным переходом ($Q \rightarrow \infty$) можно также получить решение задачи обтекания клина беспредельным потоком. Для случая пластинки это сделано в [3].

Таким образом, общее решение (1.1)–(1.6), (3.4) охватывает все частные случаи задачи.

Поступила 3 III 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Котельников А. П. О давлении жидкой струи на клин. — В кн.: Собр. проток. секции физ.-мат. в Казани. Т. 8. Казань, 1889.
2. Жуковский Н. Е. Видоизменение метода Кирхгоффа. Полн. собр. соч. Т. 3. М.—Л.: ОНТИ, 1936.
3. Трошин В. И. Решение некоторых струйных задач дозвуковой газовой динамики. Автореф. к дис. на соиск. учен. степени канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1959.
4. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. М.: ГИФМЛ, 1961.
5. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979.
6. Максеев М. Н. Некоторые задачи теории газовых струй при дозвуковых скоростях. Автореф. к дис. на соиск. учен. степени д-ра физ.-мат. наук. Казань: Казан. у-т, 1968.
7. Томилов Е. Д. Струйные дозвуковые плоские движения газа. Новосибирск: Наука, 1980.
8. Чаплыгин С. А. О газовых струях. М.—Л.: ГТТИ, 1949.
9. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1980.
10. Bromwich T. An introduction to theory of infinite series. L., 1955.
11. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981.
12. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. М.: Мир, 1965.
13. Соломахова Т. С. Натекание плоской струи газа на полубесконечный экран. — Вестн. МГУ, сер. 1, 1963, № 1.
14. Назаров Г. И. Косой удар двумерной струи газа в плоскую стенку. — ПММ, 1957, т. 21, вып. 3.
15. Слезкин Н. А. Об ударе плоской газовой струи в безграничную стенку. — ПММ, 1952, т. 16, вып. 2.