

К ТЕОРИИ ВОЛН В СДВИГОВЫХ ПОТОКАХ НЕОДНОРОДНОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В. И. Павлов, П. М. Треблер

(Москва)

Ранний этап исследований картины волн на фоне потоков отражен в работах [1, 2]. Подавляющее число публикаций было посвящено изучению устойчивости волн в неоднородной несжимаемой жидкости. Здесь мы укажем только на работы обзорного характера [4—5]. При анализе волновых явлений в последнее время особое значение придается рассмотрению модовых решений, т. е. дискретного спектра частот. Именно с этой частью спектра связаны процессы гидродинамической неустойчивости [6].

В работе [7], посвященной влиянию сжимаемости на устойчивость течений, показано, что в линейном приближении учет сжимаемости приводит к усилению устойчивости потока. Эти представления получили свое дальнейшее развитие в [8], где обращено внимание на то, что стабилизирующие эффекты возникают за счет затраты определенного количества энергии основного течения на работу против сил упругости.

Данная работа посвящена изучению картины волн в неоднородной сжимаемой жидкости в присутствии сдвиговых течений. Рассмотрение проводится в рамках гамильтонова подхода [9—12], который получил здесь свое дальнейшее развитие.

1. Исходная система уравнений. Гамильтонова переформулировка.

Будем изучать поведение неоднородной сжимаемой жидкости в приближении изотермической атмосферы. Такая модель описывается замкнутой системой уравнений в эйлеровом представлении: гидродинамическим уравнением Эйлера

$$(1.1) \quad \dot{\mathbf{v}} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -(1/\rho)\nabla p - \nabla\chi;$$

уравнением неразрывности

$$(1.2) \quad \dot{\rho} + \operatorname{div} \rho\mathbf{v} = 0;$$

уравнением сохранения энтропии в частице среды

$$(1.3) \quad \dot{\sigma} + (\mathbf{v}\nabla)\sigma = 0;$$

соотношением для внутренней энергии, играющим роль уравнения состояния:

$$(1.4) \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}(\rho, \sigma) = \mathcal{E}_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1} \exp\left[\frac{\gamma-1}{R}(\sigma - \sigma_0)\right];$$

основным соотношением термодинамики

$$(1.5) \quad Td\sigma = d\mathcal{E} + pd(1/\rho).$$

В системе (1.1)—(1.5) введены обозначения: \mathbf{v} — гидродинамическая скорость; p — давление; ρ — плотность; \mathcal{E} , σ — внутренняя энергия и энтропия, приходящиеся на единицу массы; R — газовая постоянная; γ — показатель адиабаты; \mathcal{E}_0 , ρ_0 , σ_0 — внутренняя энергия, плотность и энтропия на уровне $z = 0$;

$\chi = gz$ (ось Oz направлена вверх). По аналогии с работами [9—11] систему (1.1)—(1.4) можно представить в гамильтоновской форме:

$$(1.6) \quad \dot{\rho} = \delta E / \delta \varphi, \quad \dot{\varphi} = -\delta E / \delta \rho, \\ \dot{\sigma} = \delta E / \delta \lambda, \quad \dot{\lambda} = -\delta E / \delta \sigma, \quad \dot{\alpha} = \delta E / \delta \mu, \quad \dot{\mu} = -\delta E / \delta \alpha,$$

где энергия среды имеет вид

$$E = \int d\mathbf{x} \cdot \rho \left\{ \frac{\mathbf{v}^2}{2} + \mathcal{E} + \chi \right\} \quad (d\mathbf{x} = dx dy dz),$$

а (ρ, φ) , (σ, λ) , (α, μ) — канонически сопряженные пары. Введение переменных Клебша α , μ , имеющих смысл лагранжевых координат, необходимо для описания вихревых движений с достаточно сложной топологией

см., например, [12—15]). Критерием необходимости введения дополнительной пары переменных (α, u) является невозможность описать равновесное состояние среды (т. е. такое состояние, когда все физические параметры: скорость, энтропия, плотность и т. д. не являются функциями времени) в рамках переменных (ρ, φ) , (σ, λ) . В нашем рассмотрении достаточно будет ограничиться парами (ρ, φ) и (σ, λ) , что дает возможность (см. [11]) представить скорость в виде

$$(1.7) \quad \mathbf{v} = \nabla\varphi - (\lambda/\rho)\nabla\sigma.$$

2. Сдвиговые течения. Рассмотрим волновые процессы, происходящие на фоне установившегося динамического режима, который обозначим индексом s . Профиль скорости установившегося потока жидкости зададим в виде

$$\mathbf{v}_s = u(z)\mathbf{l},$$

где \mathbf{l} — орт оси Ox . Течения с профилем скорости такого вида принято называть сдвиговыми. Учитывая структуру внешнего силового поля, положим $\rho_s = \rho_s(z)$, $\sigma_s = \sigma_s(z)$. В этом случае уравнения для $\dot{\varphi}$ и $\dot{\lambda}$ (см. (1.6)) значительно упрощаются и сводятся к виду

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \dot{\varphi}_s + u^2/2 + gz + \gamma RT_s/(\gamma - 1) &= 0, \\ \dot{\lambda}_s + u\partial\lambda_s/\partial x + \rho_s T_s &= 0. \end{aligned}$$

Запишем решение системы уравнений (2.1) в форме, линейной по времени:

$$(2.2) \quad \varphi_s = ux - \left(\frac{u^2}{2} + \frac{\gamma RT_s}{\gamma - 1} + gz \right) t, \quad \lambda_s = -\rho_s T_s t + \rho_s \frac{\partial u}{\partial z} \left(\frac{\partial \sigma_s}{\partial z} \right)^{-1} (x - ut).$$

Подставляя (2.2) в выражение для скорости (1.7), с учетом уравнения состояния (1.4) можно прийти к законам стратификации плотности

$$\rho_s(z) = \rho_0 \exp(-z/H)$$

и энтропии

$$\sigma_s(z) - \sigma_s(0) = Rz/H,$$

где $H = c_s^2/\gamma g$; c_s — адиабатическая скорость звука. Следует подчеркнуть, что параметры φ_s и λ_s не имеют конкретного физического смысла и являются функциями координат и времени. Физический же смысл имеют первые производные от этих потенциалов. Так, производные вида $\partial\varphi/\partial x_i$ входят в выражение для скорости (1.7), а $\partial\varphi/\partial t$ — для давления.

Зависимость потенциалов φ_s и λ_s от времени затрудняет рассмотрение волновых процессов на фоне стационарного состояния. Однако можно показать (вывод опускаем), что в любом порядке теории возмущений с помощью цепочки канонических преобразований можно избавиться от явной зависимости скорости (а следовательно, и гамильтониана волнового поля) от времени, что в случае необходимости позволяет рассматривать нелинейные взаимодействия любого порядка. Однако для целей данной работы достаточно избавиться от такой зависимости в квадратичной части гамильтониана, полностью описывающей линейные волновые процессы. Для этого совершим каноническое преобразование вида

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \varphi &= \varphi_1 + ux - \left(\frac{u^2}{2} + \frac{\gamma RT_s}{\gamma - 1} + gz \right) t - \frac{R}{H} T_s \sigma_1 t + \frac{R}{H} \frac{\partial u}{\partial z} \left(\frac{\partial \sigma_s}{\partial z} \right)^{-1} (x - ut) \sigma_1, \\ \lambda &= \frac{H}{R} \lambda_1 - \rho_1 T_s t + \rho_1 \frac{\partial u}{\partial z} \left(\frac{\partial \sigma_s}{\partial z} \right)^{-1} (x - ut), \quad \sigma = \frac{R}{H} \sigma_1 + \sigma_s, \quad \rho = \rho_1, \end{aligned}$$

где (ρ_1, φ_1) , (σ_1, λ_1) — новые канонические переменные, которые по-прежнему, образуют пары. В каноничности преобразования (2.3) можно убедиться, воспользовавшись общим критерием (см., например, [16]), который применительно к рассматриваемой задаче имеет вид

$$\int d\mathbf{x} \{ \varphi_1 \delta\rho_1 - \varphi \delta\rho + \lambda_1 \delta\sigma_1 - \lambda \delta\sigma \} + DF_1 = (\mathcal{H}_1 - E) dt.$$

Здесь DF_1 — полная дифференциальная форма производящего функционала F_1 ; \mathcal{H}_1 — новый гамильтониан. Расчеты приводят к выражениям для производящего функционала

$$F_1 = -t \int d\mathbf{x} \cdot \rho_1 \left\{ \frac{u^2}{2} + \frac{\gamma RT_s}{\gamma - 1} + dz + \frac{R}{H} T_s \sigma_1 + \frac{R}{H} \frac{\partial u}{\partial z} \left(\frac{\partial \sigma_s}{\partial z} \right)^{-1} u \sigma_1 + \right. \\ \left. + \int d\mathbf{x} \cdot \rho_1 \left\{ u x + \sigma_1 x \frac{\partial u}{\partial z} \right\}, \right.$$

гамильтониана

$$(2.4) \quad \mathcal{H}_1 = \int d\mathbf{x} \cdot \rho_1 \left\{ \frac{\mathbf{v}^2}{2} - \frac{\mathbf{u}^2}{2} + \mathcal{E} - \frac{\gamma RT_s}{\gamma - 1} - \frac{R}{H} T_s \sigma_1 - \frac{R}{H} \frac{\partial u}{\partial z} \left(\frac{\partial \sigma_s}{\partial z} \right)^{-1} u \sigma_1 \right\}$$

и скорости

$$\mathbf{v} = u \mathbf{l} + \nabla \varphi_1 - \frac{\lambda_1}{\rho_1} \nabla \sigma_1 - \frac{\lambda_1}{\rho_1} \mathbf{n} + \sigma_1 \nabla \left\{ (x - ut) \frac{\partial u}{\partial z} \right\}$$

(\mathbf{n} — орт оси Oz). Если далее выписать в новых переменных систему гамильтоновских уравнений и подставить в уравнение Эйлера (1.1) выражение для \mathbf{v} , вычисленное с учетом этих уравнений, то приходим к тождеству. Это указывает не только на сохранение гамильтоновской структуры уравнений, что очевидно (см., например, [11]), но и на то, что в среде может быть реализован установившийся динамический режим, т. е. такой режим, когда среда может находиться в стационарном состоянии. Ранее нами высказано лишь априорное утверждение о наличии у системы такого состояния (что, разумеется, в общем случае справедливо далеко не всегда) и только выполнение условий непротиворечивости гарантирует возможность реализации установившегося динамического режима.

3. Задача на собственные значения и собственные функции. Для приведения гамильтониана (2.4) к более удобной форме совершим каноническое преобразование вида

$$\varphi = \varphi_1 \rho_s^{1/2}, \quad \lambda = H \lambda_1 \rho_s^{-1/2}, \quad \sigma = \frac{1}{H} \sigma_1 \rho_s^{1/2}, \quad \rho = (\rho_1 - \rho_s) \rho_s^{-1/2}, \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_1,$$

где ρ , φ , σ , λ — новые переменные. Произведем теперь разложение гамильтониана по степеням этих переменных, что позволяет получить выражение для квадратичной части гамильтониана волнового поля, не зависящее явно от времени:

$$(3.1) \quad \mathcal{H}_{(2)} = \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} \left\{ \left[\left(\nabla + \frac{\mathbf{n}}{2H} \right) \varphi - \frac{\lambda}{H} \mathbf{n} \right]^2 - 2u\lambda \frac{\partial \sigma}{\partial x} + 2u\rho \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \right. \\ \left. + 2H \frac{\partial u}{\partial z} \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x} + c_s^2 \left[\rho^2 + 2 \frac{\gamma - 1}{\gamma} \rho \sigma + \frac{\gamma - 1}{\gamma^2} \sigma^2 \right] \right\}.$$

Выполним в (3.1) преобразование Фурье по горизонтальным координатам $\mathbf{r} = \{x, y\}$, действуя по правилу

$$\psi = \frac{1}{2\pi} \int \psi(\mathbf{k}_\perp, z) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k}_\perp,$$

где
$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \lambda \\ \rho \\ \sigma \end{pmatrix}; \quad \mathbf{k}_\perp = \{\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_m\}; \quad \mathbf{m} \text{ — орт оси } Oy.$$

Введенное представление позволяет записать (3.1) в компактной форме (в этой связи см. [17])

$$(3.2) \quad \mathcal{H}_{(2)} = \int dz d\mathbf{k}_\perp \psi^\dagger(\mathbf{k}_\perp, z) \widehat{\mathcal{H}}_0 \psi(\mathbf{k}_\perp, z),$$

где

$$\widehat{\mathcal{H}}_0 = \begin{vmatrix} \mathbf{k}_\perp^2 + \frac{1}{4H^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{H} \left(\frac{1}{2H} - \frac{\partial}{\partial z} \right) & -iukl & -H \frac{\partial u}{\partial z} ikl \\ -\frac{1}{H} \left(\frac{1}{2H} + \frac{\partial}{\partial z} \right) & \frac{1}{H^2} & 0 & -iukl \\ iukl & 0 & c_s^2 & c_s^2 \frac{\gamma-1}{\gamma} \\ H \frac{\partial u}{\partial z} ikl & iukl & c_s^2 \frac{\gamma-1}{\gamma} & c_s^2 \frac{\gamma-1}{\gamma} \end{vmatrix},$$

а знаком $+$ обозначено эрмитовское сопряжение. При выводе (3.2) учтено, что

$$\int d\mathbf{x} (\nabla\varphi)^2 = - \int d\mathbf{x} (\varphi\Delta\varphi) + \int d\mathbf{x} \operatorname{div}(\varphi\nabla\varphi),$$

$$\int d\mathbf{x} \left(\lambda \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) = \int d\mathbf{x} \frac{\partial}{\partial z} (\varphi\lambda) - \int d\mathbf{x} \left(\varphi \frac{\partial\lambda}{\partial z} \right),$$

$\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{n}$ при $z \rightarrow \pm \infty$.

В матричной форме уравнения движения в линейном приближении примут вид

$$(3.3) \quad \hat{A} \dot{\psi}(\mathbf{k}_\perp, z) = -i \frac{\delta \mathcal{H}_{(2)}}{\delta \psi^+(\mathbf{k}_\perp, z)},$$

где

$$\hat{A} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Совершая в (3.3) фурье-преобразование по времени, получим матричное уравнение

$$(3.4) \quad \begin{vmatrix} \hat{h} & \hat{m} \\ \hat{n} & \hat{l} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \psi_1(\mathbf{k}_\perp, z) \\ \psi_2(\mathbf{k}_\perp, z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -i\Omega\hat{I} \\ i\Omega\hat{I} & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \psi_1(\mathbf{k}_\perp, z) \\ \psi_2(\mathbf{k}_\perp, z) \end{vmatrix},$$

где

$$\hat{h} = \begin{vmatrix} \mathbf{k}_\perp^2 + \frac{1}{4H^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{H} \left(\frac{1}{2H} - \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ -\frac{1}{H} \left(\frac{1}{2H} + \frac{\partial}{\partial z} \right) & \frac{1}{H^2} \end{vmatrix};$$

$$\hat{l} = c_s^2 \begin{vmatrix} 1 & \frac{\gamma-1}{\gamma} \\ \frac{\gamma-1}{\gamma} & \frac{\gamma-1}{\gamma} \end{vmatrix}; \quad \hat{n} = \hat{m}^+ = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ H \frac{\partial u}{\partial z} ikl & 0 \end{vmatrix};$$

$$\hat{I} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad \Omega = \omega - ukl;$$

$$\psi_1(\mathbf{k}_\perp, z) = \begin{vmatrix} \varphi(\mathbf{k}_\perp, z) \\ \lambda(\mathbf{k}_\perp, z) \end{vmatrix}; \quad \psi_2(\mathbf{k}_\perp, z) = \begin{vmatrix} \rho(\mathbf{k}_\perp, z) \\ \sigma(\mathbf{k}_\perp, z) \end{vmatrix}.$$

Раскрывая далее (3.4), придем к системе уравнений

$$\hat{h}\psi_1(\mathbf{k}_\perp, z) + \hat{m}\psi_2(\mathbf{k}_\perp, z) + i\Omega\hat{I}\psi_2(\mathbf{k}_\perp, z) = 0,$$

$$\hat{n}\psi_1(\mathbf{k}_\perp, z) + \hat{l}\psi_2(\mathbf{k}_\perp, z) + i\Omega\hat{I}\psi_1(\mathbf{k}_\perp, z) = 0,$$

которая позволяет сформулировать краевую задачу для потенциалов. В целях простоты поставим такую задачу для $\varphi(\mathbf{k}_\perp, z)$. Результаты несложных, но достаточно громоздких расчетов дают

$$(3.5) \quad \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{k}_\perp, z)}{\partial z^2} + \frac{2}{\Omega} \left[\frac{kl \frac{\partial u}{\partial z} N^2}{\Omega^2 - N^2} \right] \frac{\partial \varphi(\mathbf{k}_\perp, z)}{\partial z} + \frac{1}{\Omega^2 c_s^2} \left[\Omega^4 - c_s^2 \left(\mathbf{k}_\perp^2 + \frac{1}{4H^2} \right) \Omega^2 - \right.$$

$$-\frac{2c_s^2(\mathbf{k}\mathbf{l})^2\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\Omega^2}{\Omega^2 - N^2} - c_s^2(\mathbf{k}\mathbf{l})\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\Omega + \frac{2c_s^2(\mathbf{k}\mathbf{l})\frac{\partial u}{\partial z}\Gamma\Omega^2}{\Omega^2 - N^2} + N^2c_s^2\mathbf{k}\mathbf{l}^2 \Big] \varphi(\mathbf{k}_\perp, z) = 0.$$

Здесь $N^2 = -g\left(-\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial\rho_s}{\partial z} + \frac{g}{c_s^2}\right) = \frac{g^2}{c_s^2}(\gamma - 1)$ — квадрат частоты Вейселя; $\Gamma = \frac{1}{2\rho_s}\frac{\partial\rho_s}{\partial z} + \frac{g}{c_s^2}$ — коэффициент Экарта (см., например, [18]).

Дифференциальное уравнение (3.5) необходимо дополнить краевыми условиями

$$\partial\varphi(\mathbf{k}_\perp, z)/\partial z \rightarrow 0, \quad \varphi(\mathbf{k}_\perp, z) \rightarrow 0 \quad (\text{при } z \rightarrow \pm\infty),$$

характеризующими отсутствие волновых движений на бесконечности. Рассматриваемое дифференциальное уравнение имеет особенности в точках z_i , где выполняются условия

$$\omega - u(z_1)\mathbf{k}\mathbf{l} = 0, \quad \omega - u(z_2)\mathbf{k}\mathbf{l} + N = 0, \quad \omega - u(z_3)\mathbf{k}\mathbf{l} - N = 0.$$

Эти особые точки соответствуют так называемым критическим уровням [18]. В случае однородной среды $z_1 = z_2 = z_3$, т. е. происходит вырождение уровней. Следует отметить, что рассмотрение волновых процессов во вращающейся системе отсчета, так же как и в случае неоднородной среды, приводит к появлению двух новых критических уровней [18]. Соотношение (3.5) стандартной заменой

$$\varphi(\mathbf{k}_\perp, z) = \tilde{\varphi}(\mathbf{k}_\perp, z) \exp\left[-\int \frac{1}{\Omega} \frac{\mathbf{k}\mathbf{l} \frac{\partial u}{\partial z} N^2}{\Omega^2 - N^2} dz\right]$$

сводится к виду

$$(3.6) \quad \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}(\mathbf{k}_\perp, z)}{\partial z^2} + \frac{1}{\Omega^2 c_s^2} \left[\Omega^4 - c_s^2 \left(\mathbf{k}_\perp^2 + \frac{1}{4H^2} \right) \Omega^2 - \frac{c_s^2(\mathbf{k}\mathbf{l})^2 \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \Omega^2 (2\Omega^2 + N^2)}{(\Omega^2 - N^2)^2} + \right. \\ \left. + \frac{2c_s^2\mathbf{k}\mathbf{l} \frac{\partial u}{\partial z} \Gamma\Omega^3}{\Omega^2 - N^2} + N^2c_s^2\mathbf{k}_\perp^2 - \frac{c_s^2\mathbf{k}\mathbf{l} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \Omega^2}{\Omega^2 - N^2} \right] \tilde{\varphi}(\mathbf{k}_\perp, z) = 0.$$

Решение дифференциального уравнения (3.6) для произвольного вида профиля скорости представляет сложную задачу. Поэтому ограничимся далее рассмотрением достаточно простого примера, который, по-видимому, отражает основные закономерности и в более сложных ситуациях. Будем рассматривать только дискретный спектр частот, имея в виду, что модовые решения наиболее интересны с точки зрения процессов линейной и нелинейной неустойчивостей.

4. Конкретизация вида профиля скорости. Одним из наиболее типичных видов средних движений в атмосфере являются сдвиговые течения. На фиг. 1, а приведена типичная зависимость скорости потока от высоты над поверхностью Земли (кривая заимствована из [18]). Вид подобных кривых в окрестности точек экстремума позволяет аппроксимировать их выражениями типа (см. фиг. 1, б)

$$u(z) = u_0 \left\{ 1 + (z - z_0) \left[\frac{1}{L_1} \theta(z - z_0) - \frac{1}{L_2} \theta(z_0 - z) \right] \right\},$$

где $\theta(t)$ — единичная функция Хевисайда. Здесь считаем атмосферу безграничной, а характерные масштабы L_1 и L_2 достаточно большими (см. ниже). Слабая линейная зависимость вида профиля скорости от координаты z дает возможность во всех следующих расчетах пренебречь слагаемыми, пропорциональными du/dz и $(du/dz)^2$, если они не содержат дельта-функции.

При этих предположениях уравнение (3.6) значительно упрощается:

$$(4.1) \quad \partial^2 \tilde{\varphi}(\mathbf{k}_{\perp}, z) / \partial z^2 + 2[Q + \kappa \delta(z)] \tilde{\varphi}(\mathbf{k}_{\perp}, z) = 0,$$

здесь

$$Q = \frac{1}{2\Omega^2 c_s^2} \left[\Omega^4 - c_s^2 \left(\mathbf{k}_{\perp}^2 + \frac{1}{4H^2} \right) \Omega^2 + N^2 c_s^2 \mathbf{k}_{\perp}^2 \right],$$

$$\kappa = - \frac{\mathbf{k} \mathbf{l} u_0}{2L} \frac{\Omega}{\Omega^2 - N^2}, \quad \frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$$

и для простоты принято, что $z_0 = 0$ и $u_0 > 0$. В расчетах также учтено соотношение вида $\partial^2 u / \partial z^2 = u_0 \delta(z) / L$. Критерием применимости соотношения (4.1) является выполнение неравенства $\kappa L \ll 1$. В нашем приближении можно считать, что величина $\Omega = \omega - u \mathbf{k} \mathbf{l}$ не является функцией координаты z . Тогда, интегрируя (4.1), получим условие на скачке:

$$\left. \frac{\partial \tilde{\varphi}(\mathbf{k}_{\perp}, z)}{\partial z} \right|_{+0} - \left. \frac{\partial \tilde{\varphi}(\mathbf{k}_{\perp}, z)}{\partial z} \right|_{-0} = -2\kappa \tilde{\varphi}(\mathbf{k}_{\perp}, 0).$$

Имея в виду рассмотрение дискретного спектра частот, ограничимся случаем, когда $Q < 0$, $\kappa > 0$. При сделанных предположениях решение уравнения (4.1) можно представить в виде (см., например, [19])

$$(4.2) \quad \tilde{\varphi}_j(\mathbf{k}_{\perp}, z) = B(\kappa_j) \exp(-\kappa_j |z|).$$

Здесь индекс j отмечает номер рассматриваемой волновой моды, а коэффициент $B(\kappa_j)$ может быть найден из условий нормировки (см. [17]). Полученное решение соответствует локализованному в окрестности плоскости $z = 0$ волновому движению, амплитуда которого при удалении от этой плоскости экспоненциально быстро убывает. После подстановки решения (4.2) в уравнение (4.1) и сопоставления коэффициентов получаем $Q_j = -\kappa_j^2 / 2$, откуда находится в явном виде дисперсионное уравнение

$$(4.3) \quad \frac{1}{\Omega_j^2 c_s^2} \left[\Omega_j^4 - c_s^2 \left(\mathbf{k}_{\perp j}^2 + \frac{1}{4H^2} \right) \Omega_j^2 + N^2 c_s^2 \mathbf{k}_{\perp j}^2 \right] = - \frac{(\mathbf{k} \mathbf{l})_j^2 u_0^2 \Omega_j^2}{4L^2 (\Omega_j^2 - N^2)^2}.$$

5. Анализ дисперсионного уравнения. Дисперсионное уравнение (4.3) является алгебраическим уравнением восьмой степени относительно частоты ω (или Ω). С целью упрощения анализа этого уравнения введем безразмерные параметры

$$M_0 = u_0 / c_s, \quad \cos \alpha_j = (\mathbf{k} \mathbf{l})_j / k_{\perp j}, \quad n_j = H \Omega_j / c_s,$$

$$\mu = H / L, \quad \nu_j = k_{\perp j} H.$$

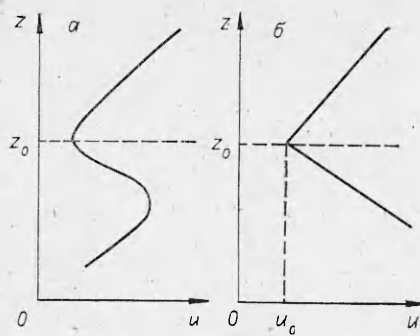
В новых переменных уравнение (4.3) принимает более простой вид

$$(5.1) \quad n_j^4 - \left(\nu_j^2 + \frac{1}{4} \right) n_j^2 + \frac{\nu - 1}{\nu^2} \nu_j^2 = - \frac{1}{4} M_0^2 \mu^2 \nu_j^2 \cos^2 \alpha_j \frac{n_j^4}{\left[n_j^2 - \frac{\nu - 1}{\nu^2} \right]^2}.$$

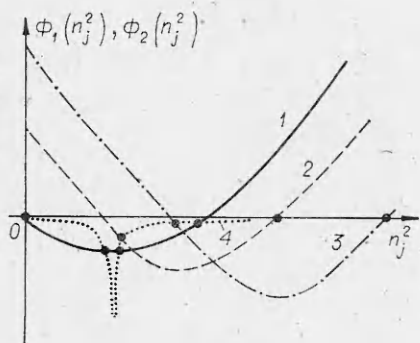
В дальнейшем рассмотрении будем считать коэффициент $\epsilon = \frac{1}{4} M_0^2 \mu^2 \nu_j^2 \times \cos^2 \alpha_j$ малым параметром. Если для определенности принять, что $\mu \sim 1$, то условие малости ϵ реализуется при $\frac{1}{4} M_0^2 \nu_j^2 \cos^2 \alpha_j \ll 1$. При дозвуковых течениях, когда $M_0 \ll 1$, на волновые числа распространяющихся волн не накладывается существенных ограничений. Проведем при определенных выше ограничениях графический анализ дисперсионного уравнения (5.1). С этой целью построим графики зависимостей (фиг. 2):

$$\Phi_1(n_j^2) = n_j^4 - \left(\nu_j^2 + \frac{1}{4} \right) n_j^2 + \frac{\nu - 1}{\nu^2} \nu_j^2,$$

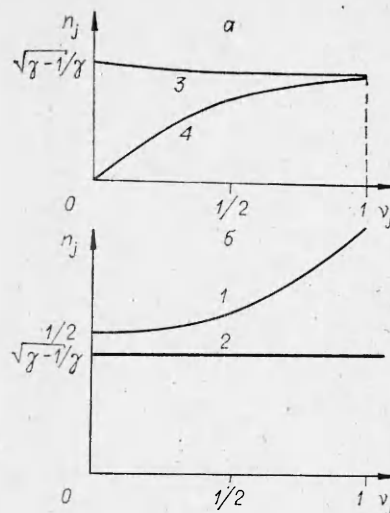
$$\Phi_2(n_j^2) = - \frac{1}{4} M_0^2 \mu^2 \nu_j^2 \cos^2 \alpha_j \frac{n_j^4}{\left[n_j^2 - \frac{\nu - 1}{\nu^2} \right]^2}.$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Кривые 1—3 характеризуют поведение $\Phi_1(n_j^2)$ при $\cos \alpha_j = 0,1$, $M_0 = 0,1$ и различных фиксированных значениях v_j , причем $v_{j1} < v_{j2} < v_{j3}$ (здесь индексы 1—3 — номера кривых). Кривая 4 — график зависимости $\Phi_2(n_j^2)$. Число точек пересечения кривых $\Phi_1(n_j^2)$ и $\Phi_2(n_j^2)$ при фиксированном значении v_j соответствует числу действительных

корней дисперсионного уравнения (5.1). Из анализа графиков следует, что с ростом v_j число действительных корней уменьшается от четырех до двух. Дисперсионные кривые в системе координат, связанной с потоком, изображены на фиг. 3. Фиг. 3, а соответствует волнам, распространяющимся по потоку, 3, б — против потока. Из анализа дисперсионных диаграмм можно выделить условно два типа волн. Первый тип — это акустические поверхностные волны (кривая 1), второй — внутренние гравитационные волны на неоднородном потоке (кривые 2—4). Точка слияния кривых 3 и 4, имеющая координату $v_j = v^* = 1$, является бифуркационной. При $v_j > v^*$ появляется пара комплексно-сопряженных значений n_j , что соответствует неустойчивости второго типа волн. Эта неустойчивость аналогична неустойчивости тангенциального разрыва [7]. Теперь вернемся к соотношению

$$(5.2) \quad \kappa_j = -\frac{(kl) u_c}{2L} \frac{\Omega_j}{\Omega_j^2 - N^2} > 0$$

и применим его к исследованию картины волн на дозвуковом течении. Элементарный анализ (5.2) показывает, что кривые 1, 2 соответствуют волнам, распространяющимся против потока, 3, 4 — по потоку. Здесь имеется в виду направление распространения фазы, которое, как хорошо известно, в общем случае не совпадает с направлением потока энергии. Отметим, что если в рассматриваемой системе возбудить волны перечисленных выше типов, то их распространение будет являться волноводным, причем эффект носит избирательный характер. Так, акустическая мода может распространяться только в направлении против потока.

Авторы выражают благодарность Л. М. Бреховских за интерес к работе и полезные замечания, высказанные при ее обсуждении.

Поступила 27 I 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Рэле́й (Стретт Дж. В). Теория звука. Т. 2. М.—Л.: Гостехиздат, 1955.
2. Линь Цзя-Цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. М.: ИЛ, 1958.
3. Бетчов Р., Криминале В. Вопросы гидродинамической устойчивости. М.: Мир, 1971.
4. Drasin P. G., Howard L. N. Hydrodynamic stability of parallel flow of inviscid fluid.— In: Advances in Applied Mechanics. Vol. 9. N. Y., 1966.
5. Ии Чиа-шун. Волновые движения в слоистых жидкостях.— В кн.: Нелинейные волны/Под ред. С. Лейбовица, А. Сибассса. М.: Мир, 1978.
6. Drasin P. G., Zatorska M. W., Banks W. H. H. On the normal modes of parallel flow on inviscid stratified fluid. Pt 2. Unbounded flow with propagation of infinity.— J. Fluid Mech., 1979, vol. 95, N 4.
7. Ландау Л. Об устойчивости тангенциальных разрывов в сжимаемой жидкости.— ДАН СССР. Новая серия, 1944, т. 44, № 4.
8. Blumen W. Shear layer instability of an inviscid compressible fluid.— J. Fluid Mech., 1970, vol. 40, N 4.
9. Гончаров В. П., Красильников В. А., Павлов В. И. О канонических переменных для неоднородных сред.— В кн.: VI Междунар. симп. по нелинейной акустике. Тезисы докл. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1975.
10. Покровский В. Л., Халатников И. М. Гамильтоновский формализм в двухжидкостной гидродинамике.— Письма в ЖЭТФ, 1976, т. 23, № 11.
11. Гончаров В. П., Красильников В. А., Павлов В. И. К теории волновых взаимодействий в стратифицированных средах.— Изв. АН СССР. ФАО, 1976, т. 12, № 11.
12. Павлов В. П., Треблер П. М. Гамильтоновский формализм для инерционно-гирокоспических волн в атмосфере.— В кн.: II Всесоюз. симп. по физике акустико-гидродинамических явлений и оптоакустике. Тезисы докл. М.: Наука, 1979.
13. Серрин Дж. Математические основы классической механики жидкости. М.: ИЛ, 1963.
14. Селиджер Р. Л., Уитен Г. Б. Вариационные принципы в механике сплошной среды.— Сб. пер. Механика, 1969, № 5 (117).
15. Kuznetsov E. A., Mikhailov A. V. On topological meaning of Clebsch variables: Preprint/Institute of automatic and electrometry Siberian Branch Acad. Sci. USSR. Novosibirsk, 1980, N 126.
16. Kodama Y. Theory of canonical transformations of nonlinear evolution equations. II.— Progr. Theor. Phys., 1977, vol. 57, N 6.
17. Гончаров В. П. Волновые взаимодействия в системе океан — атмосфера в рамках метода гамильтоновского формализма.— Изв. АН СССР. ФАО, 1980, т. 16, № 3.
18. Госсард Э. Э., Хук У. Х. Волны в атмосфере. М.: Мир, 1978.
19. Море Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т. 2. М.: ИЛ, 1960.

УДК 532.526.011 : 518.5

РАСЧЕТ ОБТЕКАНИЯ ОБРАЩЕННОГО НАВСТРЕЧУ ПОТОКУ МАЛОГО УСТУПА

В. В. Боголепов
(Москва)

1. Рассматривается ламинарное обтекание равномерным дозвуковым или сверхзвуковым потоком вязкого газа плоской пластины, на поверхности которой на некотором расстоянии l от ее передней кромки находится малая двумерная неровность. Строится решение уравнений Навье — Стокса при стремлении характерного числа Рейнольдса $Re_0 = \rho_0 u_0 l / \mu_0 = \varepsilon^{-2}$ к бесконечности (ρ_0 , u_0 , μ_0 — значения плотности, скорости и коэффициента динамической вязкости в невозмущенном набегающем потоке). В дальнейшем будут использоваться только безразмерные величины, для этого все линейные размеры относятся к l , скорости — к u_0 , плотность — к ρ_0 , давление — к $\rho_0 u_0^2$, энтальпия — к u_0^2 , функция тока — к $\rho_0 u_0 l$ и коэффициент динамической вязкости — к μ_0 .

Систематические исследования обтекания малых неровностей на поверхности тела с характерными поперечными и продольными размерами a и b ($\varepsilon^2 \ll a \lesssim \varepsilon$, $a \lesssim b \ll 1$) выполнены в [1, 2], где, в частности, получено, что течение около неровностей с $a \sim b \sim O(\varepsilon^{3/2})$ в первом приближении при $\varepsilon \rightarrow 0$ описывается уравнениями Навье — Стокса для несжимаемого газа, профили скорости и энтальпии в набегающем потоке — сдвиговые и определяющим параметром подобия является местное число Рейнольдса $Re = \rho_w A a_1^2 / \mu_w$ (индекс w относится к величинам у поверхности пластины в невозмущенном пограничном слое, A — напряжение трения у поверхности пластины в невозмущенном пограничном слое, $a = \varepsilon^{3/2} a_1$, $a_1 \sim O(1)$). Для Re можно получить