

УДК 532.592

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВНУТРЕННИХ СТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН

Н. И. Макаренко, Ж. Л. Мальцева

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mails: makarenko@hydro.nsc.ru, maltseva@hydro.nsc.ru

Рассмотрены уравнения стационарных длинных волн на границе раздела однородной и экспоненциально стратифицированной жидкостей. В качестве базовой модели использовано уравнение второго приближения теории мелкой воды, наследующее дисперсионные свойства полных уравнений Эйлера. Построено семейство асимптотических подмоделей, описывающих три различных типа бифуркации уединенных волн в граничных точках непрерывного спектра линеаризованной задачи.

Ключевые слова: двухслойная жидкость, экспоненциальная стратификация, уединенные волны.

Введение. Уравнения невязкой двухслойной жидкости с кусочно-постоянной плотностью, имеющей скачок на поверхности раздела слоев, используются (см. [1, 2]) в качестве математической модели внутренних волн в пикноклине. В этой модели уединенные волны и плавные боры описываются уравнением второго приближения теории мелкой воды, полученным Л. В. Овсянниковым [3]. В работе [4] такое уравнение получено для случая, когда в основном течении отсутствует скольжение слоев. Аналогичное приближение для длинных волн в жидкости с кусочно-постоянной частотой Брента — Вьяйсяля рассмотрено в [5]. В работе [6] отмечено, что асимптотические ряды для уединенных волн обладают повышенной чувствительностью к малым возмущениям поля плотности. В настоящей работе, основной целью которой является оценка влияния слабой непрерывной стратификации внутри жидкости на параметры нелинейных волн на границе раздела, исследуется поведение критических параметров волнового движения при исчезающей в пределе стратификации в одном из слоев жидкости. При этом полагается, что в другом слое плотность жидкости постоянна. Основной характерной чертой указанного предельного перехода является концентрация спектров старших мод в узкой области типа пограничного слоя в плоскости бифуркационных параметров. Наличие такого пограничного слоя существенно влияет на асимптотику уединенных волн главной моды. В частности, обнаружена область параметров, в которой ветвление решений в точках границы спектра отличается от способа бифуркации уединенных волн в волны типа плато и плавного бора для модели двухслойной жидкости [7, 8].

1. Исходные уравнения. Плоские стационарные течения идеальной несжимаемой неоднородной жидкости описываются уравнениями Эйлера

$$\begin{aligned} \rho(uu_x + vv_y) + p_x &= 0, & \rho(uv_x + vv_y) + p_y &= -\rho g, \\ u_x + v_y &= 0, & u\rho_x + v\rho_y &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05-05-64460), в рамках Интеграционного проекта СО РАН № 113 и гранта Президента для поддержки ведущих научных школ (№ НШ-5245.2006.1).

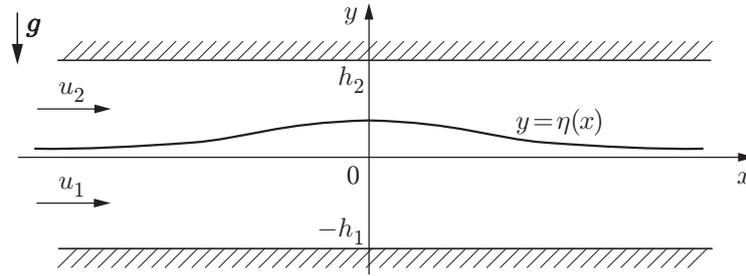


Рис. 1. Схема движения жидкости

где ρ — плотность жидкости; u, v — компоненты вектора скорости; p — давление. Рассматривается двухслойное течение в области, ограниченной жестким горизонтальным дном $y = -h_1$ и крышкой $y = h_2$ (рис. 1). Граница раздела слоев имеет форму $y = \eta(x)$, причем безволновому режиму соответствует значение $\eta = 0$. Предполагается, что при $x \rightarrow -\infty$ вектор скорости жидкости (u, v) в j -м слое стремится к постоянному вектору $(u_j, 0)$ (u_j — скорость волны относительно соответствующего слоя, $j = 1, 2$). При введении функции тока ψ для поля скоростей $u = \psi_y, v = -\psi_x$ система (1) сводится к квазилинейному эллиптическому уравнению второго порядка (уравнению Дюбрей-Жакоутэн — Лонга) [1, 2]

$$\rho(\psi)(\psi_{xx} + \psi_{yy}) + \rho'(\psi)(gy + |\nabla\psi|^2/2) = H'(\psi).$$

Здесь $H(\psi) = \rho(\psi)b(\psi)$, где $b(\psi)$ — функция Бернулли; зависимость плотности жидкости от функции тока задается ее распределением по линиям тока в невозмущенном течении: $\rho(\psi) = \rho_\infty(\psi/u_j)$ в слое с номером j . Предполагается, что в основном течении выражение для плотности имеет вид

$$\rho_\infty(y) = \begin{cases} \rho_1, & -h_1 < y < 0, \\ \rho_2 \exp(-N^2 y/g), & 0 < y < h_2, \end{cases}$$

где $N = \text{const}$ — частота Брента — Вэйсяля, а постоянные $\rho_j > 0$ удовлетворяют неравенству $\rho_2 < \rho_1$. В случае $N = 0$ указанное распределение плотности дает обычную двухслойную стратификацию с постоянными плотностями в слоях; при $N \neq 0$ функция Бернулли b в нижнем слое постоянна ($b = u_1^2/2$), а в верхнем слое имеет вид

$$b(\psi) = \frac{1}{2} u_2^2 + \frac{g\psi}{u_2} + \frac{g^2}{N^2} \left(1 - \exp \left\{ \frac{N^2 \psi_2}{gu_2} \right\} \right).$$

Функцию тока будем нормировать условием $\psi = 0$ на границе раздела слоев. Тогда на дне должно выполняться граничное условие $\psi(x, -h_1) = -u_1 h_1$, а на твердой крышке — условие $\psi(x, h_2) = u_2 h_2$. В силу интеграла Бернулли

$$|\nabla\psi|^2/2 + p/\rho(\psi) + gy = b(\psi)$$

давление p выражается через функцию ψ , поэтому из условия непрерывности давления на границе раздела $y = \eta(x)$ для функции тока следует нелинейное граничное условие $[\rho(\psi)(|\nabla\psi|^2 + 2gy - 2b(\psi))] = 0$ (квадратные скобки обозначают скачок величины). Отметим также, что закон сохранения суммарного горизонтального импульса двухслойной жидкости дает интегральное соотношение

$$\int_{-h_1}^{h_2} (p + \rho(\psi)\psi_y^2) dy = C, \quad (2)$$

в котором константа C определяется асимптотикой плотности, скорости и условием гидростатичности давления в предельном течении на бесконечности.

2. Длинноволновое приближение. В рассматриваемой задаче стратификация определяется безразмерными параметрами Буссинеска

$$\sigma = N^2 h_2 / g, \quad \mu = (\rho_1 - \rho_2) / \rho_2,$$

где σ характеризует градиент плотности в неоднородном слое, а μ — ее скачок на границе раздела. В данной работе предполагается, что отношение σ/μ мало, и параметр σ используется в качестве моделирующего параметра. Следуя [9], будем рассматривать длинноволновое приближение, в котором отношение вертикального и горизонтального масштабов движения имеет порядок $\sqrt{\sigma}$. Используя в качестве вертикального масштаба невозмущенную глубину h_2 верхнего слоя, а в качестве масштаба для функции тока $\psi = \psi_j$ в слое с номером j — расход жидкости в этом слое, введем безразмерные переменные

$$(\sqrt{\sigma} x, y, \eta) = h_2 (\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}), \quad \psi_j = u_j h_j \bar{\psi}_j \quad (j = 1, 2).$$

Тогда в нижнем слое должны выполняться уравнения

$$\begin{aligned} \sigma \psi_{1xx} + \psi_{1yy} &= 0 & (-r < y < \eta(x)), \\ \psi_1(x, -r) &= -1, & \psi_1(x, \eta(x)) = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где $r = h_1/h_2$. (Здесь и далее черта в обозначениях безразмерных величин \bar{x} , \bar{y} , $\bar{\eta}$, $\bar{\psi}_j$ опущена.) Соответственно в верхнем слое уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma \psi_{2xx} + \psi_{2yy} + \lambda^2(\psi_2 - y) &= \sigma(\psi_{2x}^2 + \psi_{2y}^2 - 1)/2 & (\eta(x) < y < 1), \\ \psi_2(x, \eta(x)) &= 0, & \psi_2(x, 1) = 1, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\lambda = Nh_2/u_2$. Из динамического условия на границе раздела следует соотношение

$$rF_1^2(\sigma r^2 \psi_{1x}^2 + r^2 \psi_{1y}^2 - 1) + 2\eta = F_2^2(\sigma \psi_{2x}^2 + \psi_{2y}^2 - 1) \quad (y = \eta(x)), \quad (5)$$

где F_j — денсиметрические (плотностные) числа Фруда:

$$F_j^2 = \rho_j u_j^2 / (g(\rho_1 - \rho_2) h_j) \quad (j = 1, 2).$$

Введенный безразмерный параметр λ имеет смысл обратного денсиметрического числа Фруда для экспоненциально стратифицированного верхнего слоя жидкости, поскольку для него справедливо выражение $\lambda^2 = \sigma g h_2 / u_2^2$. Параметры σ , μ , λ и F_2 связаны соотношением

$$\lambda^2 = \sigma / (\mu F_2^2), \quad (6)$$

играющим важную роль в анализе асимптотики решения при $\sigma \rightarrow 0$. Отметим, что граничное условие (5) равносильно интегральному соотношению

$$\begin{aligned} \mu r^3 F_1^2 \int_{-r}^{\eta} (\psi_{1y}^2 - \sigma \psi_{1x}^2) dy - (1 + \mu) \eta^2 + \mu r F_1^2 (\eta - r) + \\ + \int_{\eta}^1 e^{-\sigma \psi_2} \{ \mu F_2^2 (1 + \psi_{2y}^2 - \sigma \psi_{2x}^2) - 2\sigma^{-1} (e^{\sigma \psi_2} - 1) + 2(\psi_2 - y) \} dy = \\ = 2\mu F_2^2 + 2(\lambda^{-2} + \sigma^{-2})(1 - \sigma - e^{-\sigma}), \end{aligned} \quad (7)$$

представляющему собой безразмерную версию уравнения (2), из которого давление исключено в силу интеграла Бернулли. Построение асимптотического разложения для решения

уравнений (3), (4) в виде $\psi_j = \psi_j^{(0)} + \sigma\psi_j^{(1)} + O(\sigma^2)$ ($j = 1, 2$) приводит к следующим выражениям для коэффициентов:

$$\begin{aligned}\psi_1^{(0)} &= \frac{y - \eta}{r + \eta}, & \psi_2^{(0)} &= y - \eta \frac{\sin \lambda(1 - y)}{\sin \lambda(1 - \eta)}, \\ \psi_1^{(1)} &= -\frac{1}{6} \left(\frac{1}{r + \eta} \right)_{xx} \{ (y + r)^3 - (r + \eta)^2(y + r) \}, \\ \psi_2^{(1)} &= \frac{\sin \lambda(1 - y)}{2\lambda} \left(\frac{\eta}{\sin \lambda(1 - \eta)} \right)_{xx} \{ (1 - \eta) \operatorname{ctg} \lambda(1 - \eta) - (1 - y) \operatorname{ctg} \lambda(1 - y) \} + \\ &+ \frac{1}{6} \eta^2 \left\{ \frac{\sin \lambda(\eta - y) + \sin \lambda(1 - \eta) - \sin \lambda(1 - y)}{\sin^3 \lambda(1 - \eta)} + \frac{\sin^2 \lambda(1 - y)}{\sin^2 \lambda(1 - \eta)} - \frac{\sin \lambda(1 - y)}{\sin \lambda(1 - \eta)} \right\} + \\ &+ \frac{\eta(\eta - y)}{2} \frac{\sin \lambda(1 - y)}{\sin \lambda(1 - \eta)}.\end{aligned}$$

Подставляя указанные асимптотические формулы для функций ψ_1, ψ_2 в соотношение (7) и оставляя в нем слагаемые с точностью до величин порядка $O(\sigma^2)$, получаем модель второго приближения теории мелкой воды. В результате имеем обыкновенное дифференциальное уравнение для функции η

$$\sigma \left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2 = \frac{\eta^2(A_0 + A_1\eta + A_2\eta^2 + A_3\eta^3)}{B_0 + B_1\eta + B_2\eta^2 + B_3\eta^3 + B_4\eta^4}, \quad (8)$$

где коэффициенты A_j, B_j являются тригонометрическими полиномами относительно переменной η . Указанные коэффициенты выражаются через величины $s_n = \sin n\lambda(1 - \eta)$ и $c_n = \cos n\lambda(1 - \eta)$ с целыми и полуцелыми n по следующим формулам:

$$\begin{aligned}A_0 &= 18r\lambda s_1^2 \{ [2(F_1^2 - 1) - \sigma F_2^2] s_1^2 + \lambda F_2^2 s_2 \}, \\ A_1 &= 2\lambda F_2^2 \{ s_1^2 [\lambda(9 - 2\sigma r)s_2 - s_1^2(6r\lambda^2 + 9\sigma)] - 2s_{1/2}^2 [r\sigma s_1 + 3r\sigma\lambda^2(1 + 2c_1)] \} - 36\lambda s_1^4, \\ A_2 &= 4\lambda^2 F_2^2 s_{1/2}^2 \{ 3\sigma\lambda(r - 1)(1 + 2c_1) - 4(3\lambda s_1^2 + \sigma s_2)c_{1/2}^2 - \sigma s_1 \}, \\ A_3 &= 12\lambda^3 \sigma F_2^2 s_{1/2}^2 (1 + 2c_1), \\ B_0 &= 12\lambda r^3 F_1^2 s_1^4 + 9r F_2^2 (2\lambda - s_2) s_1^2, \\ B_1 &= 9F_2^2 \{ r\lambda(2\lambda - s_2)s_2 - [2(r - 1)\lambda + s_2] s_1^2 \}, \\ B_2 &= 9\lambda F_2^2 \{ \lambda[r(s_1^2 - 3) + 2]s_2 + 4s_1^4 + 2r\lambda^2 - 2(r\lambda^2 + 3)s_1^2 \}, \\ B_3 &= -9\lambda^2 F_2^2 \{ (c_1^2 + 2)s_2 + 2\lambda(r - 1)c_1^2 \}, & B_4 &= -18\lambda^3 F_2^2 c_1^2.\end{aligned}$$

Уравнение (8) является аналогом модели, предложенной Л. В. Овсянниковым [3] для случая двухслойной жидкости с постоянными плотностями в слоях. Далее это уравнение используется в качестве базовой модели для анализа поведения решений типа уединенных волн в пределе при $\sigma \rightarrow 0$.

3. Дисперсионные свойства. В нелинейных средах с дисперсией уединенные волны, как правило, распространяются со скоростями, превышающими фазовые скорости линейных волн, поэтому для описания области сверхкритических значений параметров, входящих в уравнения (3)–(5), рассмотрим свойства спектра задачи о малых возмущениях одномерного течения с функциями тока $\psi_1 = r^{-1}y + w_1(x, y)$ и $\psi_2 = y + w_2(x, y)$. Линеаризация уравнений относительно функций η, w_j и построение решений в виде волновых пакетов $\eta(x) = a \exp(ikx)$ и $w_j(x, y) = W_j(y) \exp(ikx)$ дают дисперсионное соотношение

$$\Delta(k; F, \sigma, \lambda) = 0 \quad (9)$$

с функцией Δ , определенной формулой

$$\Delta = F_1^2 \sqrt{\sigma} rk \operatorname{cth} \sqrt{\sigma} rk + F_2^2 \left(\sqrt{\lambda^2 - \sigma k^2 - \sigma^2/4} \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda^2 - \sigma k^2 - \sigma^2/4} - \sigma/2 \right) - 1.$$

Поскольку задача отыскания нормальных мод для уравнений (3)–(5) является самосопряженной, квадрат волнового числа k^2 , играющий в ней роль собственного значения, здесь всегда вещественный. Таким образом, корни k уравнения (9) могут быть только вещественными или мнимыми. В силу четности дисперсионной функции по k эти корни образуют симметричные пары на координатных осях комплексной k -плоскости, причем кратным может оказаться только корень $k = 0$. В вещественную область $\lambda^2 < \sigma k^2 + \sigma^2/4$ дисперсионная функция продолжается вещественным выражением

$$\Delta = F_1^2 \sqrt{\sigma} rk \operatorname{cth} \sqrt{\sigma} rk + F_2^2 \left(\sqrt{\sigma k^2 - \lambda^2 + \sigma^2/4} \operatorname{cth} \sqrt{\sigma k^2 - \lambda^2 + \sigma^2/4} - \sigma/2 \right) - 1.$$

Спектр линеаризованной задачи образуют точки в плоскости пар чисел Фруда $F = (F_1, F_2)$, для которых дисперсионное соотношение (9) имеет по крайней мере одну пару вещественных корней k . Данное множество симметрично относительно координатных осей плоскости F , поскольку функция Δ четна по каждому из параметров F_j . В зависимости от количества пар действительных корней уравнения (9), соответствующих данной точке F , весь спектр разбивается на счетное множество подобластей, содержащих спектры отдельных волновых мод. При возмущении точки F вещественные корни появляются в результате их перехода с мнимой оси на действительную через значение $k = 0$, поэтому границы модальных областей задаются ветвями кривой, определяемой уравнением

$$\Delta(0; F, \sigma, \lambda(F_2)) = F_1^2 + F_2^2 \left(\sqrt{\sigma/(\mu F_2^2) - \sigma^2/4} \operatorname{ctg} \sqrt{\sigma/(\mu F_2^2) - \sigma^2/4} - \sigma/2 \right) - 1 = 0 \quad (10)$$

(здесь учтено выражение (6) для $\lambda = \lambda(F_2)$). Внешняя граница спектра задается ветвями, при $|F_1| \rightarrow \infty$ имеющими горизонтальные асимптоты $F_2 = \pm F_2^{(*)}$, где

$$F_2^{(*)} = \sqrt{\sigma/\mu} / \sqrt{\pi^2 + \sigma^2/4}. \quad (11)$$

Вся часть спектра, для точек которой существует более одной пары вещественных волновых чисел, находится внутри полосы $|F_2| < F_2^{(*)}$ толщины порядка $\sqrt{\sigma}$. В пределе при $\sigma \rightarrow 0$ эта часть, содержащая спектры старших волновых мод, исчезает. При $\sigma = 0$ остается спектр линейных волн в жидкости с постоянными плотностями ρ_1 и ρ_2 в слоях. Этот спектр порождается волновыми числами единственной моды и совпадает с кругом $F_1^2 + F_2^2 \leq 1$. Легко заметить, что граница спектра возмущенной задачи, задаваемая уравнением (10), трансформируется в единичную окружность неравномерно относительно (F_1, F_2) . Указанная неравномерность возникает из-за наличия малого параметра σ при ведущей степени F_2 в дисперсионном соотношении (9) (с учетом выражения (6) для λ) и соответственно в уравнении (10).

Отметим, что наличие малого параметра σ в левой части дифференциального уравнения (8) не препятствует равномерной пригодности по x асимптотического приближения в плоскости течения. Причина этого — в особой структуре правой части (8), коэффициенты которой оказываются хорошо согласованными со спектральными свойствами исходной задачи. Действительно, используя разложения коэффициентов A_j, B_j по степеням η , уравнение (8) можно представить в виде

$$\sigma \eta_x^2 = \eta^2 [\gamma_0 + \gamma_1 \eta + O(\eta^2)]. \quad (12)$$

Здесь коэффициент $\gamma_0(F, \sigma, \lambda)$ имеет вид $\gamma_0 = \alpha_0/\beta_0$, где

$$\alpha_0 = 12 \left\{ F_1^2 + F_2^2 \left(\lambda \operatorname{ctg} \lambda - \frac{\sigma}{2} \right) - 1 \right\}, \quad \beta_0 = 4r^2 F_1^2 + 3F_2^2 \frac{2\lambda - \sin 2\lambda}{\lambda \sin^2 \lambda},$$

а в выражении для коэффициента $\gamma_1 = (\alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1)/\beta_0^2$ используются величины

$$\begin{aligned} \alpha_1 = & -48(F_1^2 - 1)\lambda \operatorname{ctg} \lambda - F_2^2(36\lambda^2 \operatorname{ctg}^2 \lambda - 12r^{-1}\lambda \operatorname{ctg} \lambda - 8\lambda^2) - 12r^{-1} - \\ & - \sigma F_2^2 \left[6r^{-1} + \left(\frac{8\lambda \sin^2(\lambda/2)}{\sin^3 \lambda} - \frac{64}{3} \right) \lambda \operatorname{ctg} \lambda + \frac{4\lambda \sin^2(\lambda/2)}{3 \sin^3 \lambda} \left(1 + \frac{3\lambda}{\sin \lambda} \right) \right], \\ \beta_1 = & -16r^2 F_1^2 \lambda \operatorname{ctg} \lambda - 6F_2^2 \left(2 - \frac{2\lambda - \sin 2\lambda}{2r\lambda \sin^2 \lambda} \right). \end{aligned}$$

Следует отметить, что именно зависимость коэффициента γ_0 от параметров F_j содержит информацию о дисперсионных свойствах исходной задачи. Действительно, поскольку при $F_1^2 + F_2^2 \neq 0$ величина β_0 строго положительна, а для α_0 справедливо соотношение $\alpha_0 = 12\Delta + O(\sigma^2)$, картина линий нулевого уровня $\gamma_0(F, \sigma, \lambda(F_2)) = 0$ с точностью до величин порядка $O(\sigma^2)$ воспроизводит и форму, и многомодовую структуру спектра, получаемого на основе исходных уравнений Эйлера. При этом уединенные волны главной моды, ответвляющиеся от безволнового режима в граничных точках спектра, с необходимостью являются сверхкритическими в смысле выполнения неравенства $\gamma_0 > 0$. Отметим, что для точек F , расположенных вне спектра и удовлетворяющих неравенству $\gamma_0(F, \sigma, \lambda(F_2)) > 0$, параметр λ принимает значения в интервале $0 < \lambda < \pi$. В сверхкритической области, внешней по отношению к спектру, все корни дисперсионного соотношения (9) являются мнимыми. Пусть $k = \pm i\kappa$ ($\kappa > 0$) — пара корней, ближайших к точке $k = 0$. Безразмерный параметр $\varepsilon = \sqrt{\sigma} \kappa$ дает показатель экспоненциального затухания уединенных волн в исходных размерных переменных: $\eta(x) = O(\exp(-\varepsilon|x|/h_2))$ при $|x| \rightarrow \infty$. Из разложения дисперсионной функции

$$\Delta(0; F, \sigma, \lambda) - \Delta(i\kappa; F, \sigma, \lambda) = \left(\frac{1}{3} r^2 F_1^2 + F_2^2 \frac{2\lambda - \sin 2\lambda}{4 \sin^2 \lambda} \right) \varepsilon^2 + O(\sigma^2)$$

следует, что на линиях уровня дисперсионной функции $\Delta(0; F, \sigma, \lambda(F_2)) = C$ при степенной зависимости константы $C = M\sigma^m$ ($M > 0$, $m > 0$) от малого параметра σ величина ε при $\sigma \rightarrow 0$ имеет порядок $\sigma^{m/2}$. Поэтому при построении длинноволновой асимптотики необходимо учитывать, что вблизи границы спектра на линиях уровня $\Delta = M\sigma^m$ с заданным показателем m исходная размерная переменная x должна подвергаться растяжению $x/h_2 = \sigma^{-m/2} x_{m/2}$ ($x_{m/2}$ — соответствующая медленная безразмерная переменная). В этом смысле в исходных уравнениях (3)–(5) и основном приближенном уравнении (8) используется безразмерная переменная $x = x_{1/2}$.

4. Бифуркации уединенных волн. Масштаб длины волны порядка $\sigma^{-1/2}$, учитываемый при выводе уравнения (8), является естественным для точек F на линиях уровня $\gamma_0(F, \sigma, \lambda(F_2)) = M\sigma$. Для таких точек растяжение искомой функции $\eta = \sigma\eta_0$ в (12) в приближении низшего порядка дает уравнение

$$\left(\frac{d\eta_0}{dx_{1/2}} \right)^2 = \eta_0^2 (M + \gamma_1 \eta_0). \quad (13)$$

Следовательно, в случае общего положения ($\gamma_1 \neq 0$) ответвляющиеся уединенные волны имеют форму обычных солитонов Кортевега — де Фриза с амплитудой порядка $O(\sigma)$, т. е. второго порядка малости по параметру ε — модулю волнового числа. При этом в области значений параметров, удовлетворяющих неравенству $\gamma_1 < 0$, получаются волны возвышения, а в случае $\gamma_1 > 0$ — волны типа впадин. В действительности при $\gamma_1 \neq 0$ порядок малости константы, задающей линии уровня коэффициента γ_0 , не играет важной роли. При согласованном с показателем $m > 0$ масштабе длины волны предельное уравнение сохраняет вид (13), а амплитуда волны оказывается квадратичной по волновому числу независимо от выбора семейства линий уровня.

В точках, где коэффициент γ_1 обращается в нуль, вклад в модельное уравнение могут давать слагаемые с более высокими степенями η из правой части (12). Кроме того, вид уравнения для главного члена асимптотики может меняться в зависимости от степенного порядка константы, задающей линии уровня коэффициента γ_0 . Найдем приближенные выражения для координат точек бифуркации указанного особого типа, которые являются точками пересечения кривых $\gamma_0(F, \sigma, \lambda(F_2)) = 0$ и $\gamma_1(F, \sigma, \lambda(F_2)) = 0$ в плоскости (F_1, F_2) . Заметим, что в силу первого уравнения данной системы второе уравнение равносильно соотношению $\alpha_1(F, \sigma, \lambda(F_2)) = 0$. В свою очередь, вместо этого соотношения можно использовать приближенное уравнение $\alpha_1(F, 0, \lambda(F_2)) = 0$. Переходя в нем к переменной λ в качестве независимого параметра и исключая число Фруда F_1 , получаем уравнение, которое с точностью до величин порядка $O(\sigma^2)$ имеет вид

$$\frac{\sigma}{\mu} \left(\frac{3 \operatorname{ctg} \lambda}{r \lambda} + 3 \operatorname{ctg}^2 \lambda + 2 \right) - \frac{3}{r} = 0.$$

В промежутке $\lambda \in (0, \pi)$ данное уравнение имеет два корня, которые асимптотически близки к концам указанного интервала: $\lambda_1 = \sqrt{(1+r)\sigma/\mu} + O(\sigma)$ и $\lambda_2 = \pi - \sqrt{r\sigma/\mu} + O(\sigma)$. В пределе при $\sigma \rightarrow 0$ корню λ_1 соответствует точка P_1 с координатами

$$F_1 = r/\sqrt{(1+r)r}, \quad F_2 = 1/\sqrt{1+r}. \quad (14)$$

Указанная точка P_1 (рис. 2,а) находится в первом квадранте плоскости F и является точкой бифуркации для внутренних волн типа плавного бора и уединенных волн типа плато в двухслойной жидкости [7, 8]. В окрестности этой точки рассмотрим линии уровня $\gamma_0(F, \sigma, \lambda(F_2)) = M\sigma^2$. Растяжение переменных $x_1 = \sqrt{\sigma}x_{1/2}$, $\eta = \sigma\eta_0$ в уравнении (8) приводит к следующему уравнению для главного члена асимптотики:

$$\left(\frac{d\eta_0}{dx_1} \right)^2 = \eta_0^2 (M + \theta_1\eta_0 + \theta_2\eta_0^2). \quad (15)$$

Здесь $\theta_1 = \gamma'_{1\sigma}(F, 0, \lambda(F_2))$, $\theta_2 = \gamma_2(F, 0, \lambda(F_2))$; γ_2 — коэффициент при η^2 в разложении (12). При $\theta_2 > 0$ уравнение (15) дает решения типа уединенных волн, если полином четвертой степени по η_0 в его правой части наряду с двукратным корнем $\eta_0 = 0$ имеет два простых вещественных ненулевых корня $\eta_0 = a_1$, $\eta_0 = a_2$. В случае, когда эти корни совпадают и дают еще один двукратный корень $a = a_1 = a_2$ ($|a| = \sqrt{M/\theta_2}$), волна на границе раздела имеет вид плавного бора с профилем $\eta_0(x_1) = (a/2)[1 + \operatorname{th}(\sqrt{M}x_1)]$. Если же простые корни a_1 и a_2 мало отличаются друг от друга, уединенные волны имеют вид широкого плато. В пределе при $a_1 \rightarrow a_2$ фронты такой волны принимают форму плавного бора, который приближенно описывает половину симметричной уединенной волны типа плато. Таким образом, этот особый случай, так же как и рассмотренный выше случай общего положения, сохраняет основные асимптотические свойства слабонелинейных волн, характерные для стандартной двухслойной модели [10].

Теперь рассмотрим корень λ_2 , который порождает точку P_2 с координатами

$$F_1 = 1 + \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\sigma}{r\mu}} + O(\sigma), \quad F_2 = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\sigma}{\mu}} + \frac{\sqrt{r}\sigma}{\pi^2\mu} + O(\sigma^{3/2}).$$

Данная точка находится на границе спектра в непосредственной близости от горизонтальной асимптоты l указанной границы (рис. 2,б). Особые свойства этой точки бифуркации обусловлены наличием слабой непрерывной стратификации в верхнем слое жидкости, в спектре модели с постоянными плотностями в слоях эта точка не имеет аналога. В окрестности ветви кривой Γ_1 : $\gamma_1(F, 0, \lambda(F_2)) = 0$, проходящей через точку P_2 , решения

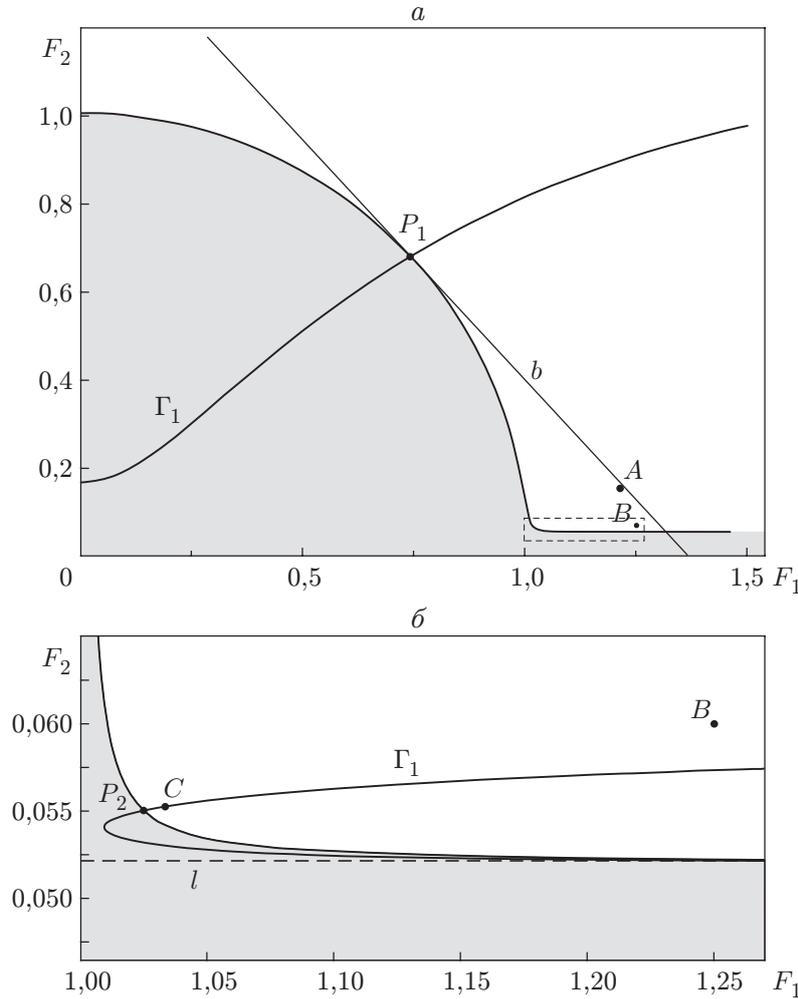


Рис. 2. Спектр главной моды при $\sigma = 0,000\ 08$, $\mu = 0,003$, $r = 1,2$ (а) и увеличенный фрагмент этого спектра (б)

уравнения (8) обнаруживают необычное поведение. Покажем это, используя приближенную параметризацию кривой Γ_1

$$F_1 = 1 + [9r + \mu(3 - 2\pi^2 r^3)\tau^2 + 2\pi^2 \mu^2 r^2 \tau^4] \frac{\sqrt{\sigma}}{24\pi\mu r\tau}, \quad F_2 = \frac{\sqrt{\sigma/\mu}}{\pi - \tau\sqrt{\sigma}}$$

с параметром $\tau = \sqrt{r/\mu} + t\sqrt{\sigma}$. Данная параметризация выбрана таким образом, чтобы при $t = 0$ выражения для чисел Фруда давали два первых члена в разложении координат точки P_2 по дробным степеням параметра σ . Выполняя для таких точек F растяжение переменных $x = \sigma^{1/4}x_{1/4}$, $\eta = \sigma^{1/2}\eta_0$ в уравнении (8), получаем предельное уравнение

$$\left(\frac{d\eta_0}{dx_{1/4}}\right)^2 = \eta_0^3 \frac{R^2 + 3R(\pi\eta_0 + R)^3 - 3(\pi\eta_0 + R)^4}{r^3(\pi\eta_0 + R)^4 + 3r^2/(2\pi^2\mu^2)}, \quad (16)$$

где $R = \sqrt{r/\mu}$. В отличие от рассмотренных выше уравнений (13), (15) правая часть (16) имеет трехкратный корень $\eta_0 = 0$, поэтому решения уравнения (16) имеют не экспоненциальную, а степенную асимптотику затухания при $|x_{1/4}| \rightarrow \infty$. Наиболее наглядно это получается для упрощенного модельного уравнения $(d\eta_0/dx_{1/4})^2 = \alpha\eta_0^3(1 - \eta_0/\beta)$, в котором

константы α, β фиксируются линейной интерполяцией рациональной функции в правой части (16) на промежутке $(0, \eta_*)$, где η_* — ненулевой корень числителя. Соответствующее решение типа уединенной волны имеет вид $\eta_0(x) = 4\beta/(4 + \alpha\beta x^2)$.

5. Профили волн. Рассмотрим полученные выше асимптотики малых решений в контексте приближенных моделей волн конечной амплитуды, также связанных с уравнением (8). Вдали от спектра параметр $\varepsilon(\sigma)$, характеризующий затухание волны на бесконечности, вообще говоря, не является малым, поэтому в уравнении (8) можно перейти к безразмерной переменной $x = x_0$, соответствующей одинаковым линейным масштабам по вертикали и горизонтали. Учитывая, что для фиксированных чисел Фруда F_1 и $F_2 \neq 0$ согласно формуле (6) параметр λ имеет порядок малости $\sqrt{\sigma}$, разложим коэффициенты A_j, B_j по степеням λ и удержим в числителе и знаменателе правой части (8) слагаемые наименьшей степени. В результате предельного перехода при $\lambda \rightarrow 0$ получаем уравнение с дробно-рациональной правой частью четвертой степени по η

$$\left(\frac{d\eta}{dx_0}\right)^2 = \frac{3\eta^2[\eta^2 + (F_2^2 - rF_1^2 - 1 + r)\eta + r(F_1^2 + F_2^2 - 1)]}{r^3F_1^2(1 - \eta) + F_2^2(r + \eta)}, \quad (17)$$

которое является уравнением второго приближения теории мелкой воды для двухслойной жидкости с постоянными плотностями в слоях [3], записанным в безразмерной форме. Для точек первого квадранта плоскости (F_1, F_2) уравнение (17) имеет решения типа уединенных волн в части сверхкритической области $F_1^2 + F_2^2 > 1$, ограниченной прямой $b: \sqrt{r}F_1 + F_2 = \sqrt{1+r}$ (см. рис. 2,а). Прямая b является геометрическим местом точек, для которых уравнение (17) имеет решения типа плавного бора. Бор ответвляется от основного течения в точке касания P_1 прямой b с границей спектра (единичной окружностью). В областях типа клюва вблизи точки бифуркации с координатами (14) параметры уединенных волн характеризуются специальной автомоделной зависимостью от чисел Фруда [8]. В модели со слабой непрерывной стратификацией данное свойство проявляется в виде расслоения узкой области действия слабонелинейной асимптотики линиями уровня дисперсионной функции со степенным порядком $m = 2$ по параметру σ . При этом и для уравнения (8), и для уравнения (17) уравнение для главного члена асимптотики решения вблизи точки P_1 имеет структуру (15). Приближение двухслойной жидкости (17) сохраняет свою точность по отношению к модели (8) в области, включающей точки A и B (см. рис. 2,а). Профили уединенных волн, вычисленных для уравнений (17) и (8), практически совпадают (рис. 3,а).

В части сверхкритической области, находящейся вблизи асимптоты границы спектра (см. рис. 2,б), параметр λ не является малым, однако согласно формуле (11) малым оказывается число Фруда F_2 , имеющее порядок $O(\sqrt{\sigma})$. Учитывая это и устремляя σ к нулю в правой части уравнения (8), получаем

$$r^3F_1^2\eta_x^2 = 3\eta^2(r(F_1^2 - 1) - \eta). \quad (18)$$

Уравнение (18) по форме совпадает с известным уравнением Буссинеска — Рэлея для уединенных поверхностных волн в слое однородной жидкости с безразмерной глубиной r и числом Фруда $F_1 > 1$. Это означает, что главная мода внутренних волн для уравнения (8) здесь ведет себя как мода поверхностных волн для нижней однородной жидкости с числом Фруда $F_1 = u_1/\sqrt{g_1 h_1}$ ($g_1 = (\rho_1 - \rho_2)g/\rho_1$ — приведенное ускорение свободного падения). Данный предельный режим согласуется и с уравнением (17), которое при $F_2 \rightarrow 0$ также дает уравнение (18). На рис. 3,б показано, что профили уединенной волны, вычисленные по моделям (8), (17) и (18) для точки B (см. рис. 2), в которой все еще пригодным оказывается приближение двухслойной жидкости, хорошо согласуются. На рис. 3,а показано, что при увеличении числа Фруда F_2 область применимости уравнения Буссинеска — Рэлея

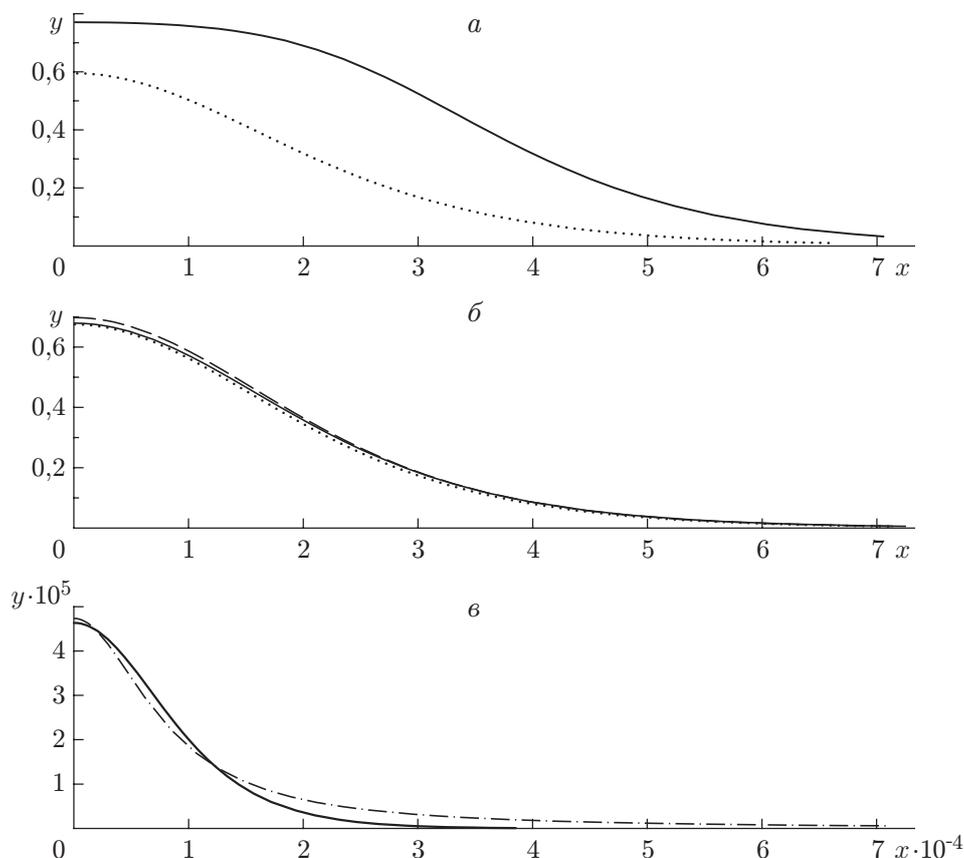


Рис. 3. Профили уединенных волн для различных точек в плоскости чисел Фруда ($\sigma = 0,000\,08$, $\mu = 0,003$, $r = 1,2$):

a — точка *A* ($F_1 = 1,223$, $F_2 = 0,15$); *б* — точка *B* ($F_1 = 1,25$, $F_2 = 0,06$); *в* — точка *C* ($F_1 = 1,020\,84$, $F_2 = 0,055\,03$); сплошные линии — решение уравнения (8), пунктирные — решение уравнения (18), штриховая — решение уравнения (17), штрихпунктирная — решение уравнения (16)

оказывается довольно узкой. Интересным является тот факт, что данная модель быстро теряет свою точность и при уменьшении числа Фруда F_1 в результате приближения к особой точке P_2 на границе спектра. На рис. 3, *в* показано, что профили уединенных волн для базовой модели (8) и уравнения (16) достаточно близки, тогда как амплитуда волны для уравнения (18) отличается здесь на два порядка. Как известно, для поверхностных уединенных волн уравнение Буссинеска — Рэлея наилучшим образом работает в окрестности точки бифуркации $F_1 = 1$. В рассматриваемом случае этому препятствует смена ведущего порядка нелинейности в уравнении (8) на кривой Γ_1 вблизи точки P_2 . Окрестность данной особой точки требует отдельного исследования, поскольку неясно, каким образом отсутствие экспоненциальной асимптотики затухания уединенных волн для приближенного уравнения (16) влияет на асимптотику решений более общих моделей.

Заключение. В рамках второго приближения теории мелкой воды для двухслойной жидкости исследовано влияние слабой непрерывной стратификации в одном из слоев на параметры стационарных волн на границе раздела. Показано, что ответвление уединенных волн главной моды от основного кусочно-постоянного течения может происходить по трем сценариям. В первом случае бифуркации аналогичны режиму ответвления классических уединенных волн Кортевега — де Фриза, во втором — режиму уединенных волн

типа плато и плавного бора в жидкости с постоянными плотностями в слоях. Третий тип ветвления, имеющий место для чисел Фруда $F_1 \approx 1$ и $F_2 = O(\sqrt{\sigma})$, реализуется только при наличии непрерывной стратификации. Для этого типа характерной является смена экспоненциального затухания решения при $|x| \rightarrow \infty$ степенным затуханием в главном по σ порядке вблизи точки бифуркации. При этом переход в параметрическую область волн конечной амплитуды последовательно описывается серией асимптотических моделей, включающей модель Буссинеска — Рэлея при малых F_2 и модель Л. В. Овсянникова при умеренных значениях F_2 .

ЛИТЕРАТУРА

1. **Тернер Дж.** Эффекты плавучести в жидкостях. М.: Мир, 1977.
2. **Yih C. S.** Stratified flows. N. Y.: Acad. Press, 1980.
3. **Овсянников Л. В.** Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн / Л. В. Овсянников, Н. И. Макаренко, В. И. Налимов и др. Новосибирск: Наука. Сиб. отделение, 1985.
4. **Miyata M.** An internal solitary wave of large amplitude // La Mer. 1985. V. 23, N 2. P. 43–48.
5. **Voronovich A. G.** Strong solitary internal waves in a 2.5-layer model // J. Fluid Mech. 2003. V. 474. P. 85–94.
6. **Long R. R.** On the Boussinesq approximation and its role in the theory of internal waves // Tellus. 1965. V. 17, N 1. P. 46–52.
7. **Макаренко Н. И.** Smooth bore in a two-layer fluid // Intern. Ser. Numer. Math. 1992. V. 106. P. 195–204.
8. **Мальцева Ж. Л.** Об одном типе уединенных внутренних волн в двухслойной жидкости // ПМТФ. 1999. Т. 40, N 5. С. 55–61.
9. **Benney D. J., Ko D. R. S.** The propagation of long large amplitude internal waves // Stud. Appl. Math. 1978. V. 59. P. 187–199.
10. **Kakutani T., Yamasaki N.** Solitary waves on a two-layer fluid // J. Phys. Soc. Japan. 1978. V. 45. P. 674–679.

*Поступила в редакцию 16/VII 2007 г.,
в окончательном варианте — 23/XI 2007 г.*
