

ВОЛНООБРАЗОВАНИЕ ПРИ СВАРКЕ ВЗРЫВОМ

С. К. Годунов, А. А. Дерибас, Н. С. Козин

(Новосибирск, Москва)

В работе проводится анализ гипотетической аналогии между образованием волн при сварке взрывом и дорожкой Кармана и исследуются физические закономерности процесса волнообразования.

При сварке металлов взрывом, происходящей в результате косых соударений металлических пластин, на поверхности контакта, как правило, образуются периодические волны (фиг. 1).

Впервые это явление наблюдалось в 1944 году в экспериментах группы М. А. Лаврентьева [1]. Подобное волнообразование наблюдали Аллен и сотрудники [2]. В работе Абрахамсона [3] излагается попытка качественного объяснения механизма волнообразования. В работе [4] и других исследованиях высказывалось предположение об общности механизмов волнообразования при соударениях и образования периодической вихревой дорожки при обтекании цилиндра потоком жидкости. В работе [5] Бахрани, Блэк и Кроссланд критически оценили соображения Абрахамсона и привели свои качественные гипотезы о механизме волнообразования, основываясь на представлениях о периодическом появлении и захлопывании кумулятивных струй. В работе [6] изложена попытка описать количественно явление волнообразования, основанная на известном эффекте неустойчивости тангенциального разрыва скоростей в идеальной жидкости. Эту попытку, по-видимому, нельзя считать успешной, так как в настоящее время известны случаи волнообразования при симметричных соударениях, когда какие-либо тангенциальные разрывы вообще отсутствуют.

В экспериментальных исследованиях волнообразования, описанных в работах [7,8], была установлена связь между длиной волн λ и амплитудой a и параметрами, определяющими соударения. Эта связь в случае, когда толщина неподвижной пластины δ_2 во много раз превышает толщину метаемой пластины δ_1 , дается формулой

$$\frac{\lambda}{\delta_1} = 26 \sin^2 \frac{\gamma}{2} \quad (\gamma - \text{угол соударения}) \quad (0.1)$$

Амплитуда волн a во всех режимах соударения для различных металлов имела порядок длины λ

$$a / \lambda \approx 0.25$$

Экспериментально обнаружено также, что волнообразование наблюдалось в случаях, когда скорость перемещения зоны высоких давлений U (в плоском случае скорость точки контакта) была меньше скорости звука c_0 в соударяющихся металлах.

В работе [9] рассматривался процесс возбуждения волн. При помощи уравнений линейной акустики в этой работе дана оценка характерного размера зоны высоких давлений; проведен численный расчет двумерной нестационарной задачи о соударениях; вычисленные значения гидродинамических величин сопоставлены с результатами, вытекающими из линейной теории.

1. Волнообразование и дорожка Кармана. В работе [4] была предложена аналогия между образованием волн при сварке взрывом и вихревой дорожкой Кармана, образующейся в жидкости при обтекании цилиндра.



Фиг. 1

Покажем, что анализ основных факторов приводит к выводу о неправомерности подобной аналогии. Как известно, при обтекании цилиндра периодический вихревой след нетурбулентного характера возникает в диапазоне чисел Рейнольдса от 20 до 300, а частота образования вихрей определяется при этом значением числа Струхаля, равным 0.2.

Вихревой след за цилиндром хорошо описывается приближением Озенна уравнений Навье — Стокса, приведенным в [10]. Это подтверждается сравнением с экспериментом по расчету силы сопротивления, действующей на цилиндр при обтекании его жидкостью. Завихренность следа $\Omega(x, y) = u_y - v_x$, образующегося за цилиндром, при этом вычисляется по следующей формуле:

$$\Omega = \frac{2U \sqrt{\pi U / v}}{2 \ln(\gamma^* U a / v) - 1} \frac{\sin \theta}{\sqrt{r}} e^{k(x-r)} \quad (1.1)$$

Здесь r и θ суть полярные координаты, v — вязкость жидкости, a — радиус цилиндра, $\gamma^* = 1,78\dots$ — постоянная Эйлера. Предполагая, что аналогия между обтеканием цилиндра и рассматриваемой задачей имеет место, следует предположить, что приближение Озенна правильно описывает след за точкой контакта.

Уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} U \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} &= v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ U \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} &= v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \end{aligned} \quad (1.2)$$

Их решение записывается функциями Φ и Ψ в виде

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{1}{2} e^{kx} \Psi + \frac{1}{2k} \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{1}{2k} \frac{\partial \Psi}{\partial y} e^{kx} \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = k^2 \Psi \quad (1.4)$$

Функции Φ и Ψ подбираем, исходя из следующих условий: течение должно быть симметрично относительно оси x , след за точкой контакта должен быть похожим на след за цилиндром, т. е. величина завихренности искомого следа должна лишь множителем отличаться от (1.1), а в окрестности точки контакта $x = 0$ асимптотика решения должна быть такой же, как асимптотика задачи о соударениях струй, найденная в работе [9].

В этих предположениях Φ и Ψ определяются однозначно, а завихренность Ω имеет вид

$$\Omega = 2c_0 k \frac{\sin \theta}{\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2} e^{k(x-r)} \quad (1.5)$$

Постоянную c_0 находим, вычислив импульс следа J , который можно определить из первого уравнения (1.3). С другой стороны, можно определить потерю импульса, рассмотрев задачу о соударении струй. Сравнив полученные выражения, найдем окончательную формулу для завихренности

$$\Omega = 2k \frac{\delta_1 \delta_2 \sin^2(\gamma/2)}{(\delta_1 + \delta_2) \pi^{3/2}} \left(\frac{U^3}{v} \right)^{1/2} \frac{\sin \theta}{\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2} e^{k(x-r)} \quad (1.6)$$

Здесь δ_2 — толщина нижней пластины. Сравнивая (1.1) и (1.6), видим, что должно быть

$$\frac{2U \sqrt{\pi U / v}}{2 \ln(\gamma^* U a / v) - 1} = 2k \frac{\delta_1 \delta_2}{\delta_1 + \delta_2} \sin^2 \frac{\gamma}{2} \pi^{-3/2} \sqrt{U^3 / v}$$

Отсюда найдем радиус a такого цилиндра, чтобы след при его обтекании совпадал со следом за точкой контакта

$$a = \frac{v}{U} \frac{4V^e}{\gamma^*} \exp - \frac{4\pi v}{U\alpha} \approx \frac{4}{U} \frac{v}{\alpha} \exp - \frac{4\pi v}{U\alpha} \quad \left(\alpha = \frac{4}{\pi} \frac{\delta_1 \delta_2}{\delta_1 + \delta_2} \sin^2 \frac{\gamma}{2} \right)$$

Соответствующее число Рейнольдса

$$R = \frac{aU}{v} \approx 4 \exp - \frac{4\pi v}{U\alpha} \quad (1.7)$$

очевидно, не превышает 4, что противоречит экспериментальным данным об образовании дорожек Кармана.

Из (1.7) следует, что

$$\ln \frac{4}{R} = \frac{4\pi v}{U\alpha} = \frac{4\pi v}{aU} \frac{a}{\alpha} = \frac{4\pi}{R} \frac{a}{\alpha}$$

Однако это равенство возможно, лишь если

$$\alpha/a\pi > e = 2.71\dots$$

С другой стороны, число Струхала S можно выразить через длину волны λ

$$S = \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda}{a} \quad \left(S = \frac{U}{\omega a}, \lambda = \frac{2\pi U}{\omega} \right)$$

Приняв, что $\lambda = 20a$, как это следует из экспериментов по сварке взрывом (см. формулу (0.1)), получим, что число Струхала

$$S \approx \frac{20}{2\pi} \frac{a}{a} > \frac{20}{2} \cdot 2.72 = 27.2$$

Из экспериментов с вихревыми слоями известно, что $S = 0.2$. Для оценки действительных значений чисел Рейнольдса и Струхала при соударениях можно пользоваться экспериментальными данными о вязкости металлов в условиях ударного сжатия, полученными в работах [11, 12]. При этом вычисления дают

$$R \sim 10, \quad S \sim 10^2$$

Такое существенное несовпадение характерных безразмерных параметров позволяет заключить, что явления волнообразования при сварке взрывом и образования вихревых дорожек Кармана имеют различную физическую природу.

2. Распространение линейных возмущений в соударяющихся пластинах. Используя линейные уравнения акустики подобно работе [9], можно исследовать возможные формы линейных колебаний при соударении, а также, рассмотрев влияние свободных поверхностей, исследовать их затухание.

В работе [9] использовалась следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial v}{\partial t} + U \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} + U \frac{\partial p}{\partial x} + \rho_0 c_0^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь $U + u, v$ и p — соответственно компоненты скорости и давления, а ρ_0 — плотность соударяющихся металлов.

В той же работе показано, что стационарное решение системы (2.1), описывающее распределение гидродинамических величин в окрестности точки контакта, имеет вид

$$u = -a_1 \frac{\cos(\frac{1}{2}\theta)}{\sqrt{r_1}}, \quad v = -a_1 \frac{\sin(\frac{1}{2}\theta)}{\sqrt{r_1}}, \quad p = a_1 \frac{\cos(\frac{1}{2}\theta)}{\sqrt{r_1}} \quad (2.2)$$

Здесь

$$r_1 = \left[\left(\frac{x}{\sqrt{1-U^2/c_0^2}} \right)^2 + y^2 \right]^{1/2}, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{y \sqrt{1-U^2/c_0^2}}{x}, \quad a_1 = 1.3\delta_1 \sin^2 \frac{\gamma}{2}$$

В этом решении предполагалось, что угол соударения γ мал и свободные поверхности пластин изображались верхней и нижней сторонами разреза $x < 0, y = 0$. Форма свободной поверхности $\eta(x)$ определялась из уравнения

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + U \frac{\partial \eta}{\partial x} = v \Big|_{y=0} \quad (2.3)$$

решением которого была парабола

$$\eta = \sqrt{|x|} 2a_1 / U$$

Естественно предположить, что распространение периодических возмущений из окрестности точки контакта также описывается решением системы (2.1). Исключая из (2.2) компоненты скорости, получаем уравнение для давления

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + 2U \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial t} = (c_0^2 - U^2) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + c_0^2 \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \quad (2.4)$$

Сделаем замену переменных по формулам

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - x_0}{\sqrt{1 - U^2/c_0^2}}, & y' &= y \\ t' &= \left(1 - \frac{U^2}{c_0^2}\right)^{1/2} t + \frac{U(x - x_0)}{c_0 \sqrt{1 - U^2/c_0^2}} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь x_0 — некоторый сдвиг начала координат. В новых переменных уравнение (2.4) примет вид обычного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t'^2} = c_0^2 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y'^2} \right) \quad (2.6)$$

Это уравнение имеет периодическое по времени решение вида

$$p = A \sin(k_1 c_0 t') Z_v(k_1 \sqrt{x'^2 + y'^2}) \sin(v\theta + \alpha) \quad (\operatorname{tg} \theta = y'/x') \quad (2.7)$$

Здесь Z_v — функция Бесселя, α и k_1 — произвольные постоянные. Возвращаясь к первоначальным переменным, получаем

$$p = A \sin \left[k_1 c_0 \sqrt{1 - U^2/c_0^2} t + \frac{k_1 U}{c_0 \sqrt{1 - U^2/c_0^2}} (x - x_0) \right] \sin(v\theta + \alpha) Z_v(k_1 r_2) \quad (2.8)$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x - x_0} \left(1 - \frac{U^2}{c_0^2}\right)^{1/2}, \quad r_2 = \left[\frac{(x - x_0)^2}{\sqrt{1 - U^2/c_0^2}} + y^2 \right]^{1/2} \quad (2.9)$$

Из (2.8) и (2.1) можно получить для определения компонент u и v скорости

$$u = u_c \cos(k_1 c_0 \sqrt{1 - U^2/c_0^2} t) + u_s \sin(k_1 c_0 \sqrt{1 - U^2/c_0^2} t) \quad (2.10)$$

$$v = v_c \cos(k_1 c_0 \sqrt{1 - U^2/c_0^2} t) + v_s \sin(k_1 c_0 \sqrt{1 - U^2/c_0^2} t)$$

Здесь u_c, u_s, v_c, v_s — функции координат x и y , определяющиеся из первых двух уравнений системы (2.1).

Ограничиваюсь рассмотрением волн, уходящих на бесконечность, в выражении (2.8) можно положить

$$Z_v(kr) = H_v^{(1)}(kr)$$

Здесь $H_v^{(1)}(kr)$ есть функция Ханкеля первого рода порядка v . Будем считать, что источник возмущений находится в некоторой точке x_0 , расположенной в зоне высоких давлений вблизи точки контакта. Размеры этой зоны были определены в работе [9], и будем считать

$$x_0 \sim \delta_1 \sin^2 \gamma / 2 \quad (2.11)$$

Порядок функции Ханкеля v и сдвиг фазы α определяются следующими соображениями. Границному условию $p = 0$ на свободной границе $x < 0, y = 0$ можно удовлетворить, полагая $v = 1/2, 1, 3/2, 2, \dots$ и выбирая α , равные 0 при v целых и $\pi/2$ при v полуцелых. Определив u_c, u_s, v_c, v_s из (2.1) и используя (2.10), можно из (2.3) найти форму волн на свободной поверхности.

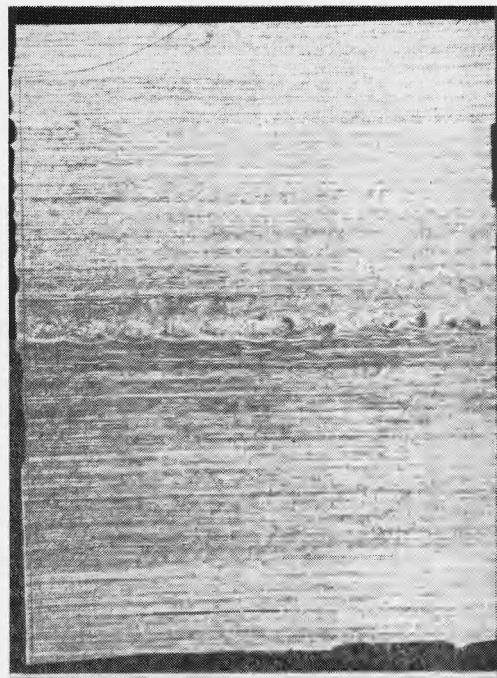
Заметим, что обычно наблюдаемые асимметричные волны соответствуют в формуле (2.8) случаю $v = 1$. В отдельных случаях, обеспечивая прецизионную симметрию режима соударения, удается наблюдать симметричные колебания (фиг. 2), соответствующие $v = 1/2$. Возможность появления более высоких гармоник, соответствующих более высоким типам симметрии, в настоящее время представляется неясной.

Итак, естественно заключить, что в большинстве экспериментов при волнобразовании значения гидродинамических величин определяются формулой для давления

$$p = A \sin \left[k_1 c_0 \sqrt{1 - U^2 / c_0^2} t + \frac{k_1 U (x - x_0)}{c_0 \sqrt{1 - U^2 / c_0^2}} \right] H_1^{(1)}(k_1 r) \sin \theta \quad (2.12)$$

и сопротивлениями (2.10) для скоростей. Очевидно, в реальном процессе источник колебаний не сосредоточен в точке x_0 , а распределен в некотором малом объеме в окрестности точки контакта.

Колебания, описываемые формулой (2.12), могут отражать действительный волновой процесс лишь на расстояниях от точки контакта, существенно превышающих размер зоны высокого давления $\delta_1 \sin^2(\gamma/2)$ и меньших толщины метаемой пластины δ_1 . На больших расстояниях от точки контакта влияние свободных границ приведет к экспоненциальному



Фиг. 2

убыванию амплитуды колебаний при увеличении расстояния от точки контакта.

Проиллюстрируем процесс «замораживания» следующим элементарным примером. Рассмотрим некоторый источник гармонических колебаний, движущийся влево вдоль оси x со скоростью U , для которого распределение компоненты скорости вдоль оси y при $y = 0$ имеет следующий вид:

$$v = \sin \omega t e^{-(x+Ut)}$$

Из уравнения для смещения свободной поверхности (2.3) имеем

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = v|_{y=0} = \sin \omega t e^{-(x+Ut)}$$

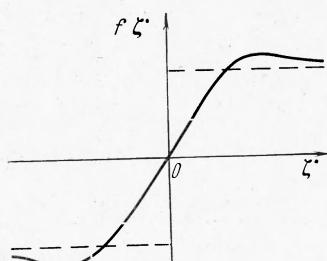
Отсюда находим свободную поверхность при $x + Ut > 0$ (за источником)

$$\eta = A_0 \sin(\omega x/U) + \sin \omega t e^{-(x+Ut)}$$

Здесь A_0 — амплитуда волн на поверхности контакта для достаточно больших t . Полученная формула показывает, что после прохождения источника через точку x с течением времени форма границы в ней замораживается и имеет вид

$$\eta = A_0 \sin(\omega x/U)$$

3. Рассмотрение волн при сварке взрывом с точки зрения автоколебаний. 1. Как известно из общей теории автоколебаний (см., например, [13]), любая автоколебательная система должна содержать осциллятор с некоторой частотой ω и декрементом затухания $\omega/2\pi\tau_0$. Кроме того, при автоколебаниях должен существовать механизм подкачки энергии, который в реальных системах, как правило, связывается с наличием нелинейного «отрицательного» сопротивления трения. Уравнение, описывающее такой процесс в системе с одной степенью свободы, имеет вид



Фиг. 3

Здесь ζ есть отклонение системы от положения равновесия. Типичный график функции $f(\zeta)$ для системы с так называемым «жестким» возбуждением приведен на фиг. 3. Кривую $f(\zeta)$ можно приближенно представить в виде кусочно-постоянной функции (фиг. 3).

Очевидно, что при слабом начальном возмущении колебания в такой системе с жестким возбуждением не возникают, так как система не попадает в интервал значений f , отличных от нуля.

Предполагая, что частота автоколебаний примерно равна ω и что колебания точки синусоидальны

$$\zeta = B \sin \omega (t - t_0) \quad (3.2)$$

можно приближенно определить их амплитуду из энергетических соображений, умножив уравнение (3.1) на ζ и проинтегрировав по периоду колебаний. Будем иметь

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\frac{\zeta^2}{2} + \omega^2 \zeta^2 \right]_{t_0}^T = \int_{t_0}^T \left[-\frac{\zeta^2}{\tau_0} + \zeta f(\zeta) \right] dt = \\ &= -\frac{\omega^2 B^2}{2\tau_0} + \int_0^{2\pi} \omega B \cos \theta f(\omega B \cos \theta) d\theta \approx -\frac{\omega^2 B^2}{2\tau_0} + K 2F \omega B \\ K &= K(B) \leqslant 1 \quad (T = t_0 + 2/\pi\omega) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Множитель K появляется из-за того, что $f(\zeta) = 0$ при $|\zeta| < \zeta_0$. При больших B коэффициент K можно считать равным единице. Из соотношения (3.3) получим

$$B = \frac{4F\tau_0}{\omega} K \approx \frac{4F\tau_0}{\omega}$$

Заметим, что убывание $f'(\zeta)$ при больших ζ необходимо для устойчивости предельного цикла, обеспечивающего автоколебательный режим [13].

2. Рассмотрим случай, когда $f(\zeta)$ кусочно-линейна и выполняются соотношения

$$\begin{aligned} f'(\zeta) &= F_1 & (\zeta < \zeta_0) \\ f'(\zeta) &= F_2 > F_1 & (\zeta_0 < \zeta < \zeta_1) \\ f'(\zeta) &= F_2 > F_1 & (\zeta_1 < \zeta) \end{aligned}$$

В этом случае, если

$$F_1 < \frac{1}{2\tau_0}, \quad F_2 < \frac{1}{2\tau_0}, \quad F_2 > \frac{1}{2\tau_0}, \quad \zeta_1 < \zeta_0$$

при этом ζ_0 достаточно велико, в системе возможны автоколебания, аналогичные ранее рассмотренному случаю. Легко убедиться, что уравнение

$$-\frac{\omega^2 B^2}{2\tau_0} + \int_0^{2\pi} \omega B \cos \theta f(\omega B \cos \theta) d\theta = 0$$

имеет единственное решение. Возможны также другие нелинейные зависимости $f(\zeta)$ и даже $f(\zeta, \dot{\zeta})$, приводящие к появлению автоколебаний.

3. В работе [9] при помощи анализа экспериментов, численных и аналитических решений уравнений гидродинамики было установлено, что для возникновения волн необходимо достаточно сильное начальное возмущение процесса соударения. В работе было исследовано также возмущение — волна разрежения, приходящая в точку контакта от свободной поверхности метаемой пластины.

Кроме того, были поставлены специальные эксперименты, в которых возмущения создавались искусственно — уступами на неподвижной пластине. Эти исследования позволили сделать вывод, что волнообразование при сварке взрывом не является проявлением какой-либо неустойчивости, являясь автоколебательным процессом с жестким возбуждением, механизм которого сосредоточен в малой окрестности точки контакта.

Для того чтобы применить к анализу этого процесса приведенные в предыдущих пунктах факты из теории колебаний, необходимо определить, что надо понимать под отклонением ζ , характеристиками осциллятора ω и τ_0 , и выяснить, каким процессам при соударениях может соответствовать зависимость $f(\zeta)$.

4. Осциллятор. В работе [9] при рассмотрении гидродинамической модели соударения, было показано, что плотность и температура соударяющихся пластин существенно отличаются от своих исходных значений в окрестности точки контакта, имеющей линейный размер, определяемый формулой

$$R^o = \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{U^2}{c_0^2}\right)^{1/2} \frac{2\delta_1\delta_2}{(\delta_1 + \delta_2)} \sin^2 \frac{\gamma}{2} \quad (4.1)$$

В этой окрестности скорость звука c также существенно отличается от исходной c_0 , и эту область можно считать осциллятором колебаний с частотой ω порядка $c_0 R^o$, т. е.

$$\omega \approx c_0 R^o$$

В процессе колебаний этого осциллятора происходит излучение волн в окружающую среду; волны будут затухать и характерное время затухания τ можно считать имеющим порядок периода

$$\tau \approx 2\pi/c_0 R^\circ$$

Рассмотрим далее пример подобного осциллятора в гидродинамическом приближении. Можно полагать, что рассмотрение аналогичных упругих задач не внесет существенных изменений в характер и порядок величин частоты и декремента затухания.

1. Комплексные частоты осциллятора $\kappa = i\omega - \tau^{-1}$ могут быть определены как собственные значения следующей системы:

$$\begin{aligned} \kappa u + U(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + V(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho(x, y)} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ \kappa v + U(x, y) \frac{\partial v}{\partial x} + V(x, y) \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho(x, y)} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ \kappa p + U(x, y) \frac{\partial p}{\partial x} + V(x, y) \frac{\partial p}{\partial y} + \rho(x, y) c^2(x, y) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Скорости $U(x, y)$, $V(x, y)$, распределение плотности $\rho(x, y)$ и квадрат скорости звука $c^2(x, y)$ должны быть определены из решения стационарной задачи, линейная модель которой описана в п.2. Нахождение собственных значений этой системы в общем случае затруднительно и не может быть выполнено без трудоемких машинных расчетов. Ниже приводится прикидочный расчет этой системы для случая $U = 0$, $V = 0$. Заметим, что при обычных режимах соударения имеем $(U^2 + V^2)/c^2 < 1/4$.

Распределение плотности и скорости звука в рассматриваемой модели также схематизируем, положив

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= \begin{cases} \rho_0 & (x^2 + y^2 > R^\circ)^2 \\ \rho^* > \rho_0 & (x^2 + y^2 < R^\circ)^2 \end{cases} \\ c(x, y) &= \begin{cases} c_0 & (x^2 + y^2 > R^\circ)^2 \\ c^* > c_0 & (x^2 + y^2 < R^\circ)^2 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Поскольку давление равно нулю на разрезе $x < 0$, $y = 0$, будем искать решение системы (4.1) в виде

$$p(x, y) = \sin \theta W(r) \quad (4.4)$$

Таким образом, исследуются лишь антисимметричные формы колебаний. Подставляя (4.4) в (4.2), получаем

$$p = \sin \theta Z_1 \left(\frac{i\kappa}{c} r \right) \quad \left(c = \begin{cases} c_0 & (r > R^\circ) \\ c^* & (r < R^\circ) \end{cases} \right) \quad (4.5)$$

Заметим, что под Z_1 здесь понимаются различные ветви цилиндрических функций первого порядка при r , меньших и больших R° . Для компонент скорости при этом получаются соотношения

$$\begin{aligned} u &= -\frac{i \sin 2\theta}{2\kappa\rho} \left\{ -\frac{i\kappa}{c} Z_0 \left(\frac{i\kappa}{c} r \right) + \frac{2}{r} Z_1 \left(\frac{i\kappa}{c} r \right) \right\} \\ v &= \frac{i}{\rho\kappa} \left\{ \frac{i\kappa}{2c} Z_0 \left(\frac{i\kappa}{c} r \right) - \cos 2\theta \left[\frac{i\kappa}{2c} Z_0 \left(\frac{i\kappa}{c} r \right) + \frac{1}{r} Z_1 \left(\frac{i\kappa}{c} r \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Условие на бесконечности (условие излучения) состоит в том, что $W(r)$ при $r > R^\circ$ совпадает с точностью до произвольного постоянного

множителя с функцией $H_1^{(1)}(ixr/c_0)$ (см. п.2). При $r < R^\circ$ регулярность в точке $x = 0, y = 0$ приводит к формуле

$$W(r) = \text{const} J_1\left(\frac{ix}{c_0} r\right)$$

Границные условия при $r = R^\circ$ (непрерывность p, u, v) могут быть удовлетворены только для дискретного ряда собственных значений χ . Приведены значения $\omega R/c_0, R/\tau c_0$ для ряда некоторых значений отношения $\rho_0^* c_0^{*2}/\rho_0 c_0^2$

$\rho_0^* c_0^{*2}/\rho_0 c_0^2 = 2.25$	3.38	4.00	4.50	6.00	8.00
$\omega R^\circ/c_0 = 1.80$	1.83	1.82	1.85	1.85	1.86
$-R^\circ/\tau c_0 = 0.38$	0.42	0.40	0.40	0.44	0.45

из этих данных вытекает, что декремент затухания $R/\tau c_0$ и частота колебаний $\omega R^\circ/c_0$ слабо зависят от параметра $\rho_0^* c_0^{*2}/\rho_0 c_0^2$. При этом $R^\circ/\tau c_0 \approx -0.4$, $\omega R^\circ/c_0 \approx 2$, т. е. частота имеет порядок ширины зоны высоких давлений.

5. О механизме подкачки энергии. Для существования незатухающих автоколебаний необходима подкачка энергии в окрестности точки контакта. Попытаемся описать одну из возможных схем механизма подкачки энергии. Рассмотрим систему уравнений гидродинамики с тензором вязких напряжений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial (p + \rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho u v)}{\partial y} - \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial (\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u v)}{\partial x} + \frac{\partial (p + \rho v^2)}{\partial y} - \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} &= 0 \\ \rho T \left(\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} \right) &= u_x \sigma_{11} + (u_y + v_x) \sigma_{12} + v_y \sigma_{22} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Здесь S — плотность энтропии на единицу массы, давление p есть функция от плотности и энтропии $p = p(\rho, S)$.

Правая часть последнего уравнения определяет тепло, выделяющееся при внутреннем трении. Естественно считать, что полная мощность источника тепла есть функция от распределения скоростей деформации.

Из системы (5.1) можно получить уравнение для давления

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho c^2} \frac{dp}{dt} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{p_S}{\rho^2 T c^2} Q \right) \\ \left(\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Если предположить, что функция $Q(x, y, t)$ отлична от нуля в некоторой окрестности точки контакта и имеет характер диполя, т. е. постулировать несимметричное выделение тепла при $y > 0$ и $y < 0$, можно сделать вывод, что для существования автоколебаний необходимо, чтобы правую часть уравнения (5.2) можно было с достаточной точностью считать диполем с мощностью f , которая приближенно представляется нелинейной функцией от $d \langle p \rangle / dt$. Здесь $\langle p \rangle$ — среднее давление в одной из половин окрестности (распределение давлений следует также предполагать имеющим дипольный характер).

Для существования автоколебаний характер зависимости $f(d \langle p \rangle / dt)$ должен быть нелинейным, как показано п. 3.2. Нелинейность этой зависимости, по всей вероятности, может быть следствием пластичности материала. В самом деле, тензор напряжений $\{\sigma_{ij}\}$ должен был связан

с тензором скоростей деформаций следующей зависимостью:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} = \eta \begin{pmatrix} u_x - v_y & u_y + v_x \\ u_y + v_x & u_x - v_y \end{pmatrix} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \begin{pmatrix} u_x + v_y & 0 \\ 0 & u_x + v_y \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

Условие пластичности Мизеса [14] можно понимать как следующую связь между η и скоростями деформаций:

$$\eta = \begin{cases} \eta_0 & (\Delta < Y_0) \\ \eta_0 Y_0 / \Delta & (\Delta > Y_0) \end{cases} \quad (5.4)$$

$$\Delta = \sqrt{(u_x - v_y)^2 + (u_y + v_x)^2}$$

Предположим, что в некоторой области, которая и в п. 2 моделировалась особенностью функции Бесселя, происходят гармонические колебания по закону

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= u_0(x, y) + D \sin \omega t u_1(x, y) \\ v(x, y, t) &= v_0(x, y) + D \sin \omega t v_1(x, y) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Будем для простоты считать, что $u_1 \ll u_0$, $v_1 \ll v_0$. В рассматриваемой области касательные напряжения также гармонически зависят от времени. Вследствие нелинейной связи между η и касательными напряжениями зависимость Q от времени не будет гармонической. Естественно считать, что именно нелинейность такого типа описывает механизм подкачки энергии.

Вообще говоря, возможны и другие типы нелинейных связей между вязкими напряжениями, скоростями деформаций и температурой. Для выяснения этих зависимостей необходимо детальное исследование поведения металлов в условиях высоких динамических давлений.

Возможно, что в тонком слое вблизи поверхности контакта играет существенную роль какой-нибудь механизм, подобный кулоновскому трению, обеспечивающий необходимую подкачуку энергии для существования автоколебаний.

Поступила 1 XII 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Дерабас А. А., Кудинов В. М., Матвеенков Ф. И., Симонов В. А. Сварка взрывом. Физика горения и взрыва, 1967, № 1.
2. Allen W. A., Mares T. M., Wilson W. G. An effect produced by oblique impact of a cylinder on a thin target. J. Appl. Phys., 1964, vol. 25, No. 5.
3. Абрахамсон Г. Остаточные периодические деформации поверхности под действием перемещающейся струи. Тр. Америк. об-ва, Сер. Е, Прикл. механ., 1961, № 4.
4. Schmidt E., Koch W., Schenck H. Vorgänge beim Explosivschweißen metallischen Werkstoffe. Arch. Eisenhüttenwesen, 1965, Bd 36, No. 9.
5. Bahrami A. S., Black T. J., Crossland B. The mechanics of wave formation in explosive welding. Proc. Roy. Soc., 1967, A, vol. 296, No. 1445.
6. Hunt J. H. Wave formation in explosive welding. Philos. Mag., 1968, vol. 17, No. 148.
7. Дерабас А. А., Кудинов В. М., Матвеенков Ф. И. Влияние начальных параметров на процесс волнообразования при сварке металлов взрывом. Физика горения и взрыва, 1967, № 4.
8. Дерабас А. А., Кудинов В. М., Матвеенков Ф. И., Симонов В. А. О моделировании процесса волнообразования при сварке взрывом. Физика горения и взрыва, 1968, № 1.
9. Godilov S. K., Deribas A. A., Zabrodin A. V., Kozin N. S. Hydrodynamic effects in colliding solids. J. comput. Phys., 1970, vol. 5, No. 3.
10. Коции Н. Е., Кибелль И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидродинамика, т. 2. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
11. Минеев В. Н., Савинов Е. В. Вязкость и температура плавления алюминия, свинца, хлористого натрия при ударном сжатии. ЖЭТФ, 1967, т. 52, вып. 3.
12. Годунов С. К., Дерабас А. А., Захаренко И. Д., Мали В. И. Вязкость металлов при высокоскоростных соударениях. Физика горения и взрыва, 1971, № 1.
13. Харкевич А. А. Автоколебания. М., Гостехиздат, 1953.
14. Соколовский В. В. Теория пластичности. М., «Высшая школа», 1969.