УДК 539.37+539.214

РАЗВИТИЕ И ТОРМОЖЕНИЕ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ В СЛОЕ ПРИ ЕГО НАГРЕВЕ ЗА СЧЕТ ТРЕНИЯ О ШЕРОХОВАТУЮ ПЛОСКОСТЬ

А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк*, Г. Л. Панченко**

Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН,
681005 Комсомольск-на-Амуре, Россия
* Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН,
690041 Владивосток, Россия
** Владивостокский государственный университет экономики и сервиса,
690014 Владивосток, Россия
E-mails: burenin@iacp.dvo.ru, lk@iacp.dvo.ru, panchenko.21@yandex.ru

Приведено решение последовательности связанных задач термоупругопластичности, в которых исследуется возникновение и развитие течения в слое материала, находящегося в условиях чистого сдвига, и последующем его торможении при медленном снятии нагрузки. Однородность напряженного состояния слоя исключается за счет связанности теплофизических и деформационных процессов при наличии зависимости предела текучести от температуры. В качестве дополнительного источника тепла принимается его производство за счет трения материала слоя о шероховатую плоскость. Определены условия возникновения вязкопластического течения в деформируемом слое материала и закономерности движения по этому слою границ, разделяющих упругие и пластические области, рассчитываются скорости течения и большие необратимые и обратимые деформации. Показано, что обратимые деформации вызывают возникновение напряжений в области течения и упругодеформированном движущемся ядре.

Ключевые слова: упругость, пластичность, вязкость, теплопроводность, большие деформации.

DOI: 10.15372/PMTF20150410

Введение. Упругопластические задачи механики деформирования являются достаточно сложными [1, 2]. Как правило, в областях течения среды деформации нельзя полагать малыми, поэтому краевая задача ставится и решается в скоростях перемещений. В то же время в области обратимого деформирования следует решить краевую задачу для уравнений теории упругости в перемещениях. При этом необходимо обеспечить выполнение условия непрерывности перемещений на упругопластической границе, разделяющей области, в которых деформирование описывается разными системами уравнений. В противном случае будут получены ошибочные решения (см. [3]). Однако вычисление перемещений по найденному полю скоростей может оказаться сложной задачей [4], особенно

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 13-01-00283) и Министерства образования и науки РФ в рамках государственного задания вузам на выполнение научно-исследовательской работы (код проекта 2014/292).

в случае накопления значительных необратимых деформаций, т. е. при использовании модели больших упругопластических деформаций. Несмотря на то что существует много работ, посвященных построению теории больших упругопластических деформаций [5–11], получено небольшое количество решений краевых задач такой теории [7, 12–17]. Решений задач, в которых учитывается связанность процессов деформирования и теплопередачи, еще меньше [18–20].

В данной работе рассматривается одномерная задача о чистом сдвиге слоя материала, обладающего упругими и пластическими свойствами, а также имеющего вязкие свойства при пластическом течении. Учитывается нагрев материала вследствие его трения о жесткую шероховатую плоскость.

1. Постановка задачи. Исходные соотношения. В качестве независимых переменных будем использовать пространственные переменные Эйлера x_i. Пусть слой материала $0 \leqslant x_2 \leqslant h$ расположен на жесткой шероховатой плоскости $x_2 = 0$, другая его граничная плоскость нагружена:

$$\sigma_{12}\big|_{x_2=h} = \zeta t, \qquad \sigma_{22}\big|_{x_2=h} = a_0.$$

Здесь σ_{12}, σ_{22} — компоненты тензора напряжений Эйлера — Коши; t — время; ζ, a_0 — задаваемые постоянные. Смещением границы несжимаемого слоя $x_2 = h$ за счет теплового расширения пренебрегаем. Считаем, что в отсутствие перемещений на границе слоя $x_2 = 0$ материал обратимо деформируется, до тех пор пока выполняется условие

$$x_2 = 0: \qquad \sigma_{12} < f|\sigma_{22}|. \tag{1.1}$$

Здесь f — заданная постоянная сухого трения. Квазистатическое упругое деформирование происходит при условии $a_0 < k_0 f^{-1}$ (k_0 — предел текучести при комнатной температуре), иначе материал слоя перейдет в пластическое состояние до начала процесса проскальзывания, т. е. в момент времени $t = t_* = a_0 f \zeta^{-1}$. Для поля температур, формирующегося при нагреве материала за счет трения скольжения, принимаем условия

$$\theta = \frac{T}{T_0} - 1 = \theta(x_2, t), \quad \theta(x_2, t_*) = 0, \quad \theta(0, t) = \gamma u(0, t) = \gamma\varphi(t), \quad \frac{\partial\theta}{\partial x_2}\Big|_{x_2=h} = 0, \tag{1.2}$$

где T_0, T — комнатная и текущая абсолютная температура; $u(0, t) = \varphi(t)$ — перемещение на границе слоя; γ — постоянная производства тепла за счет трения. Нагружаемую границу слоя полагаем теплоизолированной. Предполагается, что функция $\varphi(t)$ является монотонно возрастающей. Дальнейшее нагружение и повышение температуры в слое приводят к возникновению вязкопластического течения материала в окрестности подложки, что обусловливает большие деформации материала в области течения.

В качестве математической модели деформирования выберем построенную в [18] модель больших термоупругопластических деформаций. В прямоугольной системе пространственных переменных Эйлера x_i геометрически непротиворечивая кинематика больших деформаций среды задается уравнениями изменения (переноса) для компонент p_{ij} тензоров необратимых деформаций и компонент m_{ij} обратимых деформаций [18]

$$\frac{Dp_{ij}}{Dt} = \varepsilon_{ij}^p - p_{ik}\varepsilon_{kj}^p - \varepsilon_{ik}^p p_{kj},$$

$$\frac{Dm_{ij}}{Dt} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p - \frac{1}{2}\big((\varepsilon_{ik} - \varepsilon_{ik}^p + z_{ik})m_{kj} + m_{ik}(\varepsilon_{kj} - \varepsilon_{kj}^p - z_{kj})\big),$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}), \qquad v_i = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_{i,j}v_j, \qquad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j},$$

$$m_{ij} = e_{ij} + \alpha(T - T_0)\delta_{ij}, \qquad r_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i}) + z_{ij}(\varepsilon_{sk}, m_{sk}), \tag{1.3}$$

$$\frac{Dn_{ij}}{Dt} = \frac{dn_{ij}}{dt} - r_{ik}n_{kj} + n_{ik}r_{kj},$$
$$d_{ij} = m_{ij} + p_{ij} - m_{ik}m_{kj}/2 - m_{ik}p_{kj} - p_{ik}m_{kj} + m_{ik}p_{km}m_{mj}.$$

Компоненты тензоров p_{ij} и m_{ij} являются необратимой и обратимой составляющими тензора полных деформаций Альманси d_{ij}. Такое разделение задается последним равенством (1.3), являющимся следствием первых двух. Заметим, что при отсутствии источника ($\varepsilon^p_{ij} = 0$) компоненты тензора необратимых деформаций p_{ij} меняются так же, как при жестком вращении тела. При этом выполняется требование, аналогичное требованию в теории малых деформаций: при термоупругом деформировании и разгрузке необратимые деформации постоянны. Для того чтобы данное требование было выполнено, необходимо использовать соответствующую объективную производную D/Dt, записанную в (1.3) для компоненты n_{ij} произвольного тензора. Выражение для нелинейной составляющей тензора поворота $r_{ij} = -r_{ji}$ в данной работе не приводится вследствие его громоздкости, соответствующее выражение в явном виде приведено, например, в [10]. Величины u_i, v_i в (1.3) — компоненты перемещений и скоростей точек среды; α — коэффициент линейного расширения.

В случае изотермического деформирования ($\theta \equiv 0$) имеем $m_{ij} = e_{ij}$, поэтому тензор с компонентами $e_{ij} - 0{,}5e_{ik}e_{kj}$ следует называть тензором упругих деформаций. Введение линейных составляющих e_{ij} и m_{ij} тензоров упругих и термоупругих деформаций позволяет записать аналог известной в нелинейной теории упругости [21] формулы Мурнагана. Эта формула принимает простую форму в предположении, что плотность распределения свободной энергии ψ зависит (как и в классических моделях типа модели Прандтля — Рейса) только от обратимых деформаций: $W = \rho_0\psi(T, m_{ij}) = W(\theta, m_{ij})$, где ρ_0 — плотность материала в недеформированном состоянии. Запишем аналог формулы Мурнагана [18] в предположении, что изменение объема среды определяется только ее тепловым расширением, а механически она несжимаема. Тогда

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} -p\delta_{ij} + (1 + 3\alpha T_0\theta)^{-1}\dfrac{\partial W}{\partial d_{ik}}(\delta_{kj} - 2d_{kj}), & p_{ij} \equiv 0, \\[2ex] -p_1\delta_{ij} + (1 + 3\alpha T_0\theta)^{-1}\dfrac{\partial W}{\partial m_{ik}}(\delta_{kj} - m_{kj}), & p_{ij} \neq 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Здесь σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; p, p_1 — неизвестные функции добавочного гидростатического давления. Упругий потенциал раскладывается в ряд Маклорена относительно свободного состояния при температуре T_0. Принимая условие изотропии, имеем

$$W = -2\mu J_1 - \mu J_2 + bJ_1^2 + (b-\mu)J_1J_2 - \chi J_1^3 + \nu_1 J_1\theta + \nu_2\theta^2 - \nu_3 J_1\theta^2 - \nu_4 J_1^2\theta - \nu_5 J_2\theta - \nu_6\theta^3 + \ldots,$$
$$J_k = \begin{cases} L_k, & p_{ij} = 0, \\ I_k, & p_{ij} \neq 0, \end{cases} \tag{1.5}$$
$$L_1 = d_{kk}, \quad L_2 = d_{ik}d_{ki}, \qquad I_1 = c_{kk}, \quad I_2 = c_{ik}c_{ki}, \qquad c_{ij} = m_{ij} - 0{,}5m_{ik}m_{kj}.$$

Здесь μ — модуль сдвига; b, χ, ν_m ($m = 1, 2, \ldots, 6$) — тепломеханические постоянные [21]. Из закона сохранения энергии наряду с формулами Мурнагана (1.4) следует уравнение баланса энтропии

$$\rho T\,\frac{dS}{dt} + q_{j,j} = D,$$

где $S = -(\rho_0 T_0)^{-1}\,\partial W/\partial\theta$; q_j — компоненты вектора теплового потока. В областях обратимого деформирования и разгрузки источник энтропии отсутствует, а в областях течения определяется величиной $\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^p$. Принимая закон теплопроводности в форме закона Фурье, из уравнения баланса энтропии получаем уравнение теплопроводности, которое в различных областях имеет следующий вид:

— в области обратимого деформирования

$$(1+\beta_1\theta+\beta_2 d_{jj})\,\frac{d\theta}{dt}+\beta_3\varepsilon_{ij}d_{ji}=q\,\frac{\partial^2\theta}{\partial x_j\,\partial x_j},$$
$$\beta_1=\frac{\nu_2(1-3\alpha T_0)-3\nu_6}{\nu_2},\qquad \beta_2=-\frac{\nu_3}{\nu_2},\qquad \beta_3=-\frac{\nu_1+\nu_5}{\nu_2}; \tag{1.6}$$

— в области течения

$$(1+\beta_1\theta+\beta_2 c_{jj})\,\frac{d\theta}{dt}+\beta_3(\varepsilon_{ij}-\varepsilon_{ij}^p)c_{ji}=q\,\frac{\partial^2\theta}{\partial x_j\,\partial x_j}-\frac{1}{2\nu_2}\,\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^p; \tag{1.7}$$

— в области разгрузки

$$(1+\beta_1\theta+\beta_2 c_{jj})\,\frac{d\theta}{dt}+\beta_3\varepsilon_{ij}c_{ji}=q\,\frac{\partial^2\theta}{\partial x_j\,\partial x_j}.$$

Здесь q — температуропроводность. Скорости необратимых деформаций связаны с напряжениями ассоциированным законом пластического течения [22]

$$\varepsilon_{ij}^p=\delta\,\frac{\partial F}{\partial\sigma_{ij}},\qquad F(\sigma_{ij},\varepsilon_{ij}^p)=k,\qquad \delta>0. \tag{1.8}$$

В качестве поверхности нагружения F будем использовать обобщение [23] условия текучести Треска

$$\max|\sigma_i-\sigma_j|=2k+2\eta\max|\varepsilon_k^p|. \tag{1.9}$$

В (1.8), (1.9) k, η — предел текучести и вязкость материала при пластическом течении соответственно; σ_i, ε_j^p — главные значения тензоров напряжений и скоростей необратимых деформаций.

2. Движение до начала течения. С увеличением времени напряжение σ_{12} в слое растет. Очевидно, что рассматриваемая задача является одномерной. Среди компонент перемещений и скорости только $u_1=u(x_2,t)$, $v_1=v(x_2,t)$ отличны от нуля. При этом с учетом (1.1) $u(0,t)=0$. Решение такой задачи является тривиальным и имеет вид

$$u=\mu^{-1}\zeta x_2 t,\qquad d_{12}=0{,}5u_{,2},\qquad d_{22}=-0{,}5u_{,2}^2,$$
$$\sigma_{22}=\sigma_{33}=a_0,\qquad \sigma_{11}=a_0+\mu^{-1}\zeta^2t^2,\qquad \sigma_{12}=\zeta t.$$

Данное квазистатическое состояние равновесия сохраняется до момента времени $t=t_*$, затем начинается проскальзывание и вследствие трения происходит нагрев материала слоя. Следовательно, при $t>t_*$ получаем связанную задачу термоупругости с уравнением теплопроводности (1.6), условиями (1.2) и граничным условием (1.1) в форме

$$(\sigma_{12}-f|\sigma_{22}|-\xi v)\big|_{x_2=0}=0, \tag{2.1}$$

где ξ — коэффициент вязкого трения. С учетом уравнений равновесия (квазистатическое приближение) и определяющих зависимостей (1.4), (1.5) имеем

$$\sigma_{33}=-(p+2\mu)-\frac{1}{2}(b+\mu)u_{,2}^2+(\nu_1+6\mu\alpha T_0)\theta-(\nu_3+3\alpha\nu_1T_0+18\mu(\alpha T_0)^2)\theta^2=-s_1,$$
$$\sigma_{11}=-s_1+\mu u_{,2}^2,\qquad \sigma_{22}=-s_1+l\theta u_{,2}^2,\qquad \sigma_{12}=\lambda u_{,2}, \tag{2.2}$$

$$u_{,2} = \zeta\lambda^{-1}t, \quad m_{12} = \frac{1}{2}\zeta\lambda^{-1}t, \quad m_{11} = \frac{1}{2}m_{12}^2, \quad m_{22} = -\frac{3}{2}m_{12}^2,$$
$$l = \nu_1 + \nu_5 + 3\alpha\mu T_0, \qquad \lambda = \mu - l\theta.$$

С использованием (1.2), (2.1) запишем краевые условия для искомых функций

$$u\big|_{x_2=0} = u_0 = \frac{1}{2}\zeta\xi^{-1}(t^2 - t_*^2) - f\xi^{-1}a_0(t - t_*),$$
$$\theta\big|_{x_2=0} = \gamma u_0, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial x_2}\Big|_{x_2=h} = 0. \tag{2.3}$$

Учитывая кинематику течения ($d\theta/dt = \partial\theta/\partial t$) и соотношения (2.2), уравнение теплопроводности (1.6) запишем в форме

$$\varkappa_1 g_1(s) + \varkappa_2 g_2(\tilde\zeta, s) + \varkappa_3 s\nu_2^{-1} g_3(s, \tilde x) = 0,$$
$$g_1(s) = (1 + \beta_1\theta + \beta_3 l\lambda^{-3}s^2)\,\frac{\partial\theta}{\partial t} - q\,\frac{\partial^2\theta}{\partial x_2^2}, \qquad g_2(\tilde\zeta, s) = \beta_3\tilde\zeta\lambda^{-2}s, \tag{2.4}$$
$$g_3(s, \tilde x) = \eta^{-1}(s - k_0(1 - \theta^2(\tilde x, t)\theta_{\text{пл}}^{-2})).$$

В рассматриваемом случае уравнение (2.4) справедливо при $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 1$, $\varkappa_3 = 0$, $s = \zeta t$, $\tilde\zeta = \zeta$, $\tilde x = x_2$. Из решения уравнения теплопроводности (2.4) с учетом начальных и граничных условий определяется температура $\theta(x_2, t)$. Затем по формулам (2.2) вычисляется напряженно-деформированное состояние в слое. Полученное решение используется далее в качестве начального условия. Это решение справедливо до момента времени $t = t_1$, в который возникает пластическое течение. Момент и область возникновения течения определяются по полученному решению задачи (2.2)–(2.4) из условия (1.9), которое в данном случае сводится к условию

$$\sigma_{12} = k(t_1), \qquad k = k_0(1 - \theta^2\theta_{\text{пл}}^{-2}), \tag{2.5}$$

где k_0 — предел текучести при комнатной температуре; $\theta_{\text{пл}}$ — температура плавления материала. Из (2.2), (2.5) следует, что пластическое течение возникает на плоскости $x_2 = 0$ в момент времени t_1, вычисляемый по формуле

$$t_1 = \zeta^{-1}k_0(1 - \theta^2(0, t_1)\theta_{\text{пл}}^{-2}).$$

3. Вязкопластическое течение. Начиная с момента времени $t = t_1$ от граничной плоскости $x_2 = 0$ распространяется область вязкопластического течения с движущейся границей $x_2 = r(t)$. В области $r(t) \leqslant x_2 \leqslant h$ материал продолжает деформироваться обратимо и напряжения в нем задаются зависимостями (2.2). В области течения прежде всего необходимо решить уравнение теплопроводности (1.7), из которого следует исключить параметры, определяющие напряженно-деформированные состояния.

Согласно определяющим уравнениям (1.4), (1.5) обратимые деформации задают напряжения и в области течения:

$$\sigma_{33} = -(p + 2\mu) - 2(b + \mu)m_{12}^2 + (\nu_1 + 6\mu\alpha T_0)\theta - (\nu_3 + 3\alpha\nu_1 T_0 + 18\mu(\alpha T_0)^2)\theta^2 = -s_2(t),$$
$$\sigma_{11} = -s_2(t) + 4\mu m_{12}^2, \qquad \sigma_{22} = -s_2(t) + 4l\theta m_{12}^2, \qquad \sigma_{12} = 2\lambda m_{12}. \tag{3.1}$$

Однако в соответствии с уравнениями равновесия $\sigma_{12} = \zeta t$, $\sigma_{22} = a_0$. Это позволяет с учетом краевых условий на плоскости $x_2 = 0$ и упругопластической границе $x_2 = r(t)$ (равенство напряжений σ_{22} и σ_{12}) получить зависимости напряжений и деформаций от относительной температуры $\theta = \theta(x)$ в каждый момент времени $t > t_1$. В области течения уравнение (1.7) записывается в форме (2.4), где $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa_3 = 1$; $s = \zeta t$; $\tilde\zeta = \zeta$; $\tilde x = x_2$.

Как и выше, краевым условием для уравнения (2.4) является условие $\theta(0,t) = \gamma u(0,t)$, а температура и тепловой поток на движущейся границе области $x_2 = r(t)$ полагаются непрерывными. В области обратимого деформирования $r(t) \leqslant x_2 \leqslant h$ распределение температуры удовлетворяет уравнению теплопроводности (2.4) при $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 1$, $\varkappa_3 = 0$, $s = \zeta t$, $\tilde{\zeta} = \zeta$, $\tilde{x} = x_2$ при указанных выше условиях на движущейся упругопластической границе в отсутствие потока тепла на границе слоя $x_2 = h$. Для решения задач теплопроводности с условиями, заданными на движущейся границе, использовалась конечно-разностная схема первого порядка по времени и второго — по пространству [24]. Положение упругопластической границы определялось равенством нулю скоростей пластических деформаций на ней. Поскольку в рассматриваемом случае условие течения (1.9) принимает вид $\sigma_{12} - \eta\varepsilon_{12}^p = k$, положение упругопластической границы $x_2 = r(t)$ определяется по формуле

$$\varepsilon_{12}^p = g_3(s,\tilde{x}) = 0, \qquad \tilde{x} = r(t). \tag{3.2}$$

Найденное распределение температуры $\theta(x)$ в любой текущий момент времени $t > t_1$ позволяет не только указать положение упругопластической границы (3.2), но и задать кинематику течения, соответствующую (1.3). Действительно, согласно (1.3) в одномерном случае получаем соотношения

$$\begin{gathered}
d_{11} = m_{11} + p_{11} - \frac{1}{2}\,m_{12}^2 - 2m_{12}p_{12}, \qquad d_{22} = m_{22} + p_{22} - \frac{1}{2}\,m_{12}^2 - 2m_{12}p_{12}, \\
d_{12} = m_{12} + p_{12}, \qquad \frac{dd_{12}}{dt} = \frac{\partial d_{12}}{\partial t} = \frac{1}{2}\,v', \\
r_{21} = -r_{12} = \frac{1}{2}\,v', \qquad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\,v' = \varepsilon_{12}^e + \varepsilon_{12}^p = \frac{\partial m_{12}}{\partial t} + \frac{\partial p_{12}}{\partial t}, \\
\varepsilon_{11}^p = \frac{dp_{11}}{dt} + 2p_{12}(r_{12} + \varepsilon_{12}^p), \qquad \varepsilon_{22}^p = \frac{dp_{22}}{dt} + 2p_{12}(r_{12} + \varepsilon_{12}^p), \\
\varepsilon_{11}^p = -\varepsilon_{22}^p = -2\varepsilon_{12}^p m_{12}.
\end{gathered} \tag{3.3}$$

По известным скоростям пластических деформаций с использованием начального условия $p_{ij}(t_1) = 0$ определяются компоненты необратимых деформаций p_{12}, p_{11}, p_{22}, после чего с помощью (3.1) получаем дифференциальное уравнение для перемещения в области течения

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = s\lambda^{-1} + 2p_{12}, \qquad s = \zeta t. \tag{3.4}$$

В области обратимого деформирования справедливо то же уравнение, если положить в нем $p_{12} = 0$. Функция интегрирования определяется из условия равенства перемещений на упругопластической границе.

Граничное условие (1.2) на нижней границе слоя $x_2 = 0$ справедливо до момента времени, в который температура на плоскости $x_2 = 0$ становится равной температуре плавления. Этот момент времени определяется зависимостью

$$t_{\text{пл}} = fa_0\zeta^{-1} + \zeta^{-1}(f^2a_0^2 + \zeta t_*(\zeta t_* - 2fa_0) + 2\xi\zeta\gamma^{-1}\theta_{\text{пл}})^{1/2}.$$

4. Течение при постоянном напряжении. Предположим, что начиная с момента времени $t = t_2 < t_{\text{пл}}$ напряжение σ_{12} не изменяется:

$$\sigma_{12}\big|_{x_2=h} = \zeta t_2.$$

В этом случае появляется новая упругопластическая граница $x_2 = r_1(t)$, движущаяся от плоскости $r(t_2)$ к плоскости $x_2 = 0$. Таким образом, область деформирования разбивается на три области: область вязкопластического течения $0 \leqslant x_2 \leqslant r_1(t)$, область $r_1(t) \leqslant x_2 \leqslant r(t_2)$, в которой компонента необратимых деформаций p_{12} не изменяется, и область обратимого деформирования $r(t_2) \leqslant x_2 \leqslant h$.

Как и выше, компоненты напряжений во всей области деформирования вычисляются по соотношениям $\sigma_{12} = \zeta t_2$, $\sigma_{22} = a_0$.

В области течения $0 \leqslant x_2 \leqslant r_1(t)$ справедливы уравнение теплопроводности (2.4) при $\varkappa_1 = \varkappa_3 = 1$, $\varkappa_2 = 0$, $s = \zeta t_2$, $\tilde{\zeta} = \zeta$, $\tilde{x} = x_2$ и уравнение для определения положения упругопластической границы $x_2 = r_1(t)$ (3.2) при $s = \zeta t_2$, $\tilde{x} = r_1(t)$. В областях $r_1(t) \leqslant x_2 \leqslant r(t_2)$ и $r(t_2) \leqslant x_2 \leqslant h$ уравнение (2.4) выполняется при $\varkappa_1 = 1$, $\varkappa_2 = \varkappa_3 = 0$, $s = \zeta t_2$. Для решения указанной системы уравнений используются краевые условия (1.2), условия непрерывности θ и $\partial\theta/\partial x_2$ на границах $r_1(t)$ и $r(t_2)$ и условие непрерывности θ при $t = t_2$. Компоненты необратимых и обратимых деформаций определяются из кинематических зависимостей (3.3), перемещения — из уравнения (3.4), где $s = \zeta t_2$, при этом используются условия непрерывности перемещений на границах $r_1(t)$, $r(t_2)$ и краевое условие

$$u\big|_{x_2=0} = 0{,}5\zeta\xi^{-1}(2t_2 t - t_2^2 - t_*^2) - fa_0\xi^{-1}(t - t_*),$$

следующее из (1.2), (2.1), (2.3).

При $t = t_3$ область течения начинает увеличиваться, т. е. граничная плоскость $r_1(t)$ движется по направлению к плоскости $r(t_2)$ и в момент времени $t = t'$ эти две плоскости совпадают. Таким образом, начиная с момента времени $t = t'$ в слое остаются две области: развивающаяся область течения $0 \leqslant x_2 \leqslant r_1(t)$ и упругая область $r_1(t) \leqslant x_2 \leqslant h$, в которых выполняются соотношения, приведенные в данном пункте. При постоянном напряжении $\sigma_{12} = \zeta t_2$ температура на нижней границе слоя $x_2 = 0$ становится равной температуре плавления в момент времени

$$t_{\text{пл}} < t'_{\text{пл}} = \frac{2\theta_{\text{пл}} + \gamma\zeta(t_2^2 + t_*^2) - 2\gamma fa_0 t_*}{2\gamma(\zeta t_2 - fa_0)}.$$

5. Течение при уменьшающемся напряжении и разгрузка. Пусть начиная с момента времени $t = t_4$ ($t_2 < t_4 < t'_{\text{пл}}$) выполняется условие

$$\sigma_{12}\big|_{x_2=h} = \zeta t_2 - \zeta_1(t - t_4), \qquad \zeta_1 > 0.$$

Тогда во всем слое $\sigma_{12} = \zeta t_2 - \zeta_1(t - t_4)$, $\sigma_{22} = a_0$. Изменение краевого условия приводит к появлению новой упругопластической границы $x_2 = r_2(t)$, движущейся от плоскости $r_1(t_4)$ к плоскости $x_2 = 0$. Область деформирования также разбивается на три области: область течения $0 \leqslant x_2 \leqslant r_2(t)$, область $r_2(t) \leqslant x_2 \leqslant r_1(t_4)$, в которой p_{12} не изменяется, и область обратимого деформирования $r_1(t_4) \leqslant x_2 \leqslant h$. В последних двух областях уравнение теплопроводности (2.4) справедливо при $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 1$, $\varkappa_3 = 0$, $\tilde{x} = x_2$. В области течения в уравнении (2.4) $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa_3 = 1$, $\tilde{\zeta} = \zeta_1$, $\tilde{x} = x_2$, в уравнении (3.2) $\tilde{x} = r_2(t)$. Полученная система уравнений решается при краевых условиях, приведенных в п. **4**. Во всех перечисленных уравнениях и уравнениях обратимых деформаций и перемещений $s = \zeta t_2 - \zeta_1(t - t_4)$ и

$$u\big|_{x_2=0} = t\xi^{-1}(\zeta_1 t_2 + \zeta_2 t_4 - fa_0) - 0{,}5\xi^{-1}(\zeta_2 t^2 + \zeta_2 t_4^2 + \zeta_1 t_2^2 + \zeta_1 t_*^2) + fa_0\xi^{-1}t_*.$$

В момент времени $t = t_5$ область течения вновь начинает увеличиваться, граница $r_2(t)$ движется к границе $r_1(t_4)$, в момент времени $t = t''$ они совпадают и в слое остаются две области: область течения $0 \leqslant x_2 \leqslant r_2(t)$ и область обратимого деформирования $r_2(t) \leqslant x_2 \leqslant h$. В момент времени $t = t''_{\text{пл}}$ температура на нижней границе слоя становится равной температуре плавления. Начиная с этого момента времени

$$t''_{\text{пл}} = \zeta^{-1}(\zeta t_2 + \zeta_1 t_4 - fa_0) + \zeta_1^{-1}\gamma^{-1}\sqrt{D_1},$$

$$D_1 = \gamma^2(\zeta t_2 + \zeta_1 t_4 - fa_0)^2 - \gamma^2\zeta_1(\zeta_1 t_4^2 + \zeta t_2^2 + \zeta t_*^2) + 2\gamma^2 fa_0 t_* - 2\gamma\zeta_1\xi\theta_{\text{пл}}$$

краевое условие (1.2) заменяется на условие

$$\theta\Big|_{x_2=0} = \theta_{\text{пл}}. \qquad (5.1)$$

Граница $x_2 = r_2(t)$ движется от плоскости $x_2 = 0$, начиная с момента времени $t = t_6$ от плоскости $r_2(t_6)$ к плоскости $x_2 = 0$ движется граница $x_2 = r_3(t)$, отделяющая область течения $0 \leqslant x_2 \leqslant r_3(t)$ от области $r_3(t) \leqslant x_2 \leqslant r_2(t_6)$, где p_{12} не изменяется. В момент времени $t_{\text{пр}} = t_4 + (\zeta t_2 - fa_0)\zeta_1^{-1}$ напряжение в слое становится равным $\sigma_{12} = fa_0$ и на нижней границе слоя выполняется условие прилипания

$$u\Big|_{x_2=0} = t_{\text{пр}}\xi^{-1}(\zeta t_2 + \zeta_1 t_4 - fa_0) - 0{,}5\xi^{-1}(\zeta_1 t_{\text{пр}}^2 + \zeta_1 t_4^2 + \zeta t_2^2 + \zeta t_*^2) + fa_0\xi^{-1}t_*. \qquad (5.2)$$

При уменьшении напряжения материал начинает остывать. Краевое условие для температуры (5.1) заменяется условием

$$\theta\Big|_{x_2=0} = \theta_{\text{пл}}(1 - \gamma_1(t - t_{\text{пр}})), \qquad (5.3)$$

где γ_1 — задаваемая постоянная.

Согласно (3.2), (5.3) в момент времени $t = t_7 > t_{\text{пр}}$, который можно вычислить из уравнения

$$\zeta t_2 - \zeta_1(t_7 - t_4) = k_0(1 - (1 - \gamma_1(t_7 - t_{\text{пр}}))^2\xi^{-2}),$$

граница $x_2 = r_3(t)$ достигает нижней границы слоя, т. е. $r_3(t_7) = 0$.

Начиная с момента времени $t = t_7$ в слое остается две области: область обратимого деформирования $r_2(t_6) < x_2 \leqslant h$ и область с накопленными пластическими деформациями $0 \leqslant x_2 \leqslant r_2(t_6)$. В момент времени $t_k = t_4 + \zeta\zeta_1^{-1}t_2$ компонента тензора напряжений σ_{12} становится равной нулю. Следовательно, разгрузка материала обусловлена уменьшением компоненты σ_{22} до нуля.

Уравнение теплопроводности во всем слое $0 \leqslant x_2 \leqslant h$ принимает вид

$$g_1(0) = 0.$$

Условие (5.2) заменяется условием

$$u\Big|_{x_2=0} = t_{\text{пр}}\xi^{-1}(\zeta t_2 + \zeta_1 t_4) - 0{,}5\xi^{-1}(\zeta_1 t_{\text{пр}}^2 + \zeta_1 t_4^2 + \zeta t_2^2 + \zeta t_*^2). \qquad (5.4)$$

В области с накопленными необратимыми деформациями перемещение определяется из дифференциального уравнения (3.4) при $s = 0$ и условия (5.4), а в области обратимого деформирования — по формуле

$$u = t_{\text{пр}}\xi^{-1}(\zeta t_2 + \zeta_1 t_4) - 0{,}5\xi^{-1}(\zeta_1 t_{\text{пр}}^2 + \zeta_1 t_4^2 + \zeta t_2^2 + \zeta t_*^2). \qquad (5.5)$$

6. Охлаждение. В момент времени $t_{\text{охл}} = t_{\text{пр}} + \gamma_1^{-1}$ на нижней границе слоя температура становится равной нулю, но в слое она еще отлична от нуля. Дальнейшее понижение температуры обусловлено наличием заданного потока тепла на верхней границе слоя

$$\frac{\partial\theta}{\partial x_2}\Big|_{x_2=h} = \gamma_2 t$$

(γ_2 — известная постоянная величина). Перемещение в области с накопленными необратимыми деформациями также определяется из уравнения (5.5) и условия (5.4), а в области обратимого деформирования вычисляется по формуле (5.6). В конечный момент времени

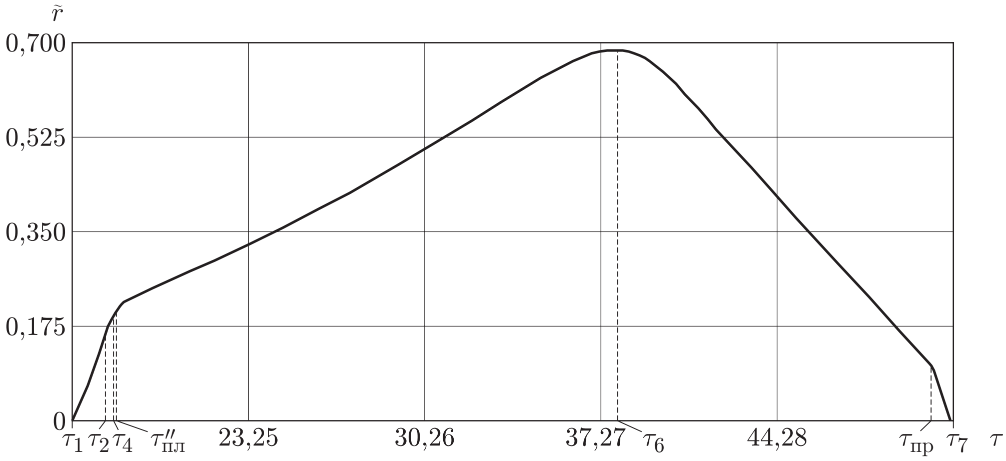

Рис. 1. Зависимость координаты границы области вязкопластического течения от времени

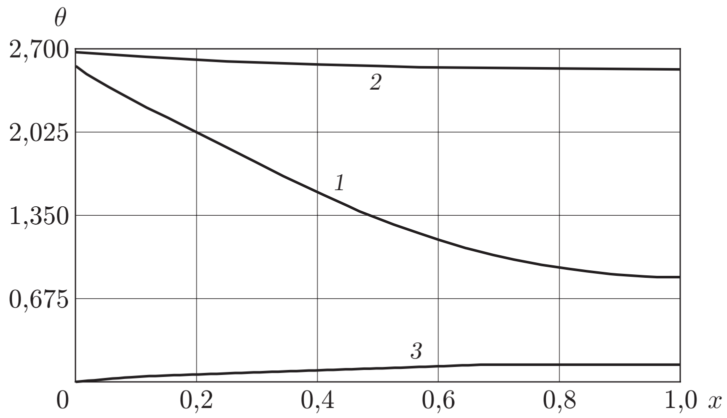

Рис. 2. Распределение безразмерной температуры в различные моменты времени:
1 — $\tau_2 = \zeta t_2 f^{-1} a_0^{-1}$, *2* — $\tau_7 = \zeta t_7 f^{-1} a_0^{-1}$, *3* — $\tau_{охл} = \zeta t_{охл} f^{-1} a_0^{-1}$

$t = t_8$, который определяется в результате численных расчетов, температура слоя становится равной комнатной температуре.

Проведение расчетов затруднено тем, что большинство термомеханических постоянных принимаемой модели неизвестно. В качестве примера получено решение задачи при следующих значениях параметров, соответствующих алюминию: $fa_0\mu^{-1} = 5 \cdot 10^{-5}$, $\zeta h^2 \mu^{-1} q^{-1} = 7{,}733 \cdot 10^{-4}$, $\gamma h = 20$, $\xi\zeta h\mu^{-2} = 2{,}679\,84 \cdot 10^{-6}$, $\eta\zeta\mu^{-2} = 3{,}349\,79 \cdot 10^{-7}$, $\nu_2\mu^{-1} = 0{,}02$, $\beta_1 = 0{,}5$, $\beta_3 = -0{,}5$, $k_0\mu^{-1} = 2{,}297\,96 \cdot 10^{-3}$, $\theta_{пл} = 2{,}682\,61$, $l\mu^{-1} = 0{,}01$. В качестве безразмерного времени будем использовать переменную $\tau = \zeta t f^{-1} a_0^{-1}$. На рис. 1 показано изменение координаты упругопластической границы $\tilde r = rh^{-1}$ в интервале времени от $\tau_1 = \zeta t_1 f^{-1} a_0^{-1} = 16{,}24$ до $\tau_7 = \zeta t_7 f^{-1} a_0^{-1} = 51{,}29$. На рис. 2 приведено характерное распределение безразмерной температуры $\theta(x)$ в слое (по оси абсцисс отложена безразмерная координата $x = x_2 h^{-1}$) в различные моменты времени. На рис. 3 представлено распределение перемещений $\tilde u = uh^{-1}$ в различные моменты времени.

Заключение. Постановка и решение приведенной в работе задачи могут быть использованы для развития теории больших деформаций сплошных сред, при моделировании процесса высокоскоростной обработки материалов (высокоскоростная штамповка, во-

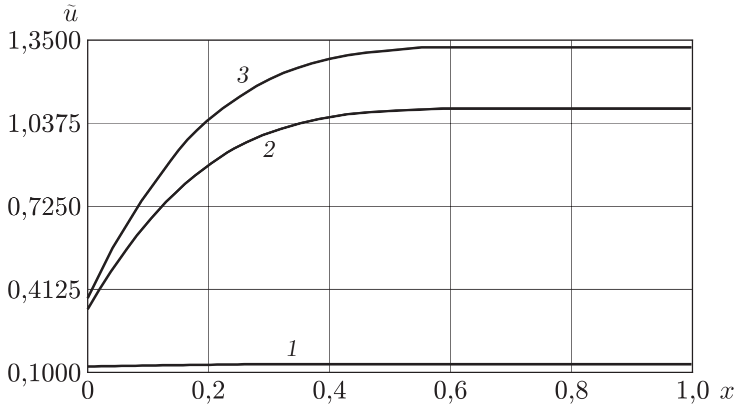

Рис. 3. Распределение перемещений в различные моменты времени:
1 — $\tau_2 = \zeta t_2 f^{-1} a_0^{-1}$, *2* — $\tau_6 = \zeta t_6 f^{-1} a_0^{-1}$, *3* — $\tau_8 = \zeta t_8 f^{-1} a_0^{-1}$

лочение, пробивание отверстий и др.), а также при тестировании алгоритмов и программ расчетов в связанных задачах теории.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Галин Л. А.** Упругопластические задачи. М.: Наука, 1984.
2. **Аннин Б. Д.** Упругопластическая задача / Б. Д. Аннин, Г. П. Черепанов. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1983.
3. **Ивлев Д. Д.** Три дискуссии по механике // Вестн. Самар. гос. ун-та. 2007. № 4. С. 115–123.
4. **Ивлев Д. Д.** Об определении перемещений в упругопластических задачах теории идеальной пластичности // Успехи механики деформируемых сред: К 100-летию со дня рожд. акад. Б. Г. Галеркина. М.: Наука, 1975. С. 236–240.
5. **Lee E. H.** Elastic-plastic deformation at finite strains // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1969. V. 36, N 1. P. 1–6.
6. **Кондауров В. И.** Об уравнениях упруговязкопластической среды с конечными деформациями // ПМТФ. 1982. № 4. С. 133–139.
7. **Левитас В. И.** Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении. Киев: Наук. думка, 1987.
8. **Быковцев Г. И., Шитиков А. В.** Конечные деформации упругопластических сред // Докл. АН СССР. 1990. Т. 311, № 1. С. 59–62.
9. **Мясников В. П.** Уравнения движения упругопластических материалов при больших деформациях // Вестн. ДВО РАН. 1996. № 4. С. 8–13.
10. **Буренин А. А., Быковцев Г. И., Ковтанюк Л. В.** Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях // Докл. АН. 1996. Т. 347, № 2. С. 199–201.
11. **Роговой А. А.** Определяющие соотношения для конечных упруго-неупругих деформаций // ПМТФ. 2005. Т. 46, № 5. С. 138–149.
12. **Ковтанюк Л. В.** О продавливании упруговязкопластического материала через жесткую круговую цилиндрическую матрицу // Докл. АН. 2005. Т. 400, № 6. С. 764–767.
13. **Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Мазелис А. Л.** Продавливание упруговязкопластического материала между жесткими коаксиальными цилиндрическими поверхностями // Прикл. математика и механика. 2006. Т. 70, вып. 3. С. 481–489.

14. **Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Устинова А. С.** Об учете упругих свойств неньютоновского материала при его вискозиметрическом течении // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 2. С. 143–151.
15. **Буренин А. А., Устинова А. С.** Развитие и торможение винтового вязкопластического течения с расчетом упругого отклика после остановки течения и разгрузки // Успехи механики сплошных сред: К 70-летию акад. В. А. Левина. Владивосток: Дальнаука, 2009. С. 91–102.
16. **Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Лушпей А. В.** Переходный процесс торможения прямолинейного вязкопластического течения при мгновенном снятии нагружающих усилий // Прикл. математика и механика. 2009. Т. 73, вып. 3. С. 494–500.
17. **Панченко Г. Л.** О прямолинейном течении в упруговязкопластическом цилиндрическом слое в условиях одностороннего прилипания // Вычисл. механика сплошных сред. 2011. Т. 4, № 4. С. 86–96.
18. **Ковтанюк Л. В.** Моделирование больших деформаций в неизотермическом случае // Дальневост. мат. журн. 2004. Т. 5, № 1. С. 107–117.
19. **Burenin A. A., Kovtanyuk L. V., Panchenko G. L.** Modeling of large elastoviscoplastic deformations with thermophysical effects taken into account // Mech. Solids. 2010. V. 45, iss. 4. P. 583–594.
20. **Ковтанюк Л. В., Панченко Г. Л.** Неизотермическое деформирование упруговязкопластического плоского тяжелого слоя // Сиб. журн. индустр. математики. 2013. Т. 16, № 1. С. 56–65.
21. **Лурье А. И.** Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.
22. **Быковцев Г. И.** Теория пластичности / Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев. Владивосток: Дальнаука, 1998.
23. **Быковцев Г. И., Семыкина Т. Д.** О вязкопластическом течении круглых пластин и оболочек вращения // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1964. № 4. С. 68–76.
24. **Самарский А. А.** Теория разностных схем. 3-е изд., испр. М.: Наука, 1989.

Поступила в редакцию 22/I 2014 г.,
в окончательном варианте — 8/IV 2014 г.