

УДК 621.4

## **Диагностирование пространственной структуры вихревых мультиплетов в закрученном течении\***

**И.В. Наумов<sup>1,2</sup>, В.Л. Окулов<sup>1,3</sup>, Ж.Н. Соренсен<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>*Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск*

<sup>2</sup>*Новосибирский государственный университет*

<sup>3</sup>*Датский технический университет, Люнгби, Дания*

E-mail: [naumov@itp.nsc.ru](mailto:naumov@itp.nsc.ru)

Представлены результаты исследования нестационарного распада вихря. Визуализация пространственной формы вихревых мультиплетов проведена в вертикальном цилиндрическом контейнере, выполненном из прозрачного оргстекла оптического качества внутренним диаметром 288 мм и вращающейся верхней крышкой, для разных значений высоты цилиндра. 80-процентная водно-глицериновая смесь использовалась как рабочая жидкость, а трассерами служили мелкие пузырьки воздуха. Крышке сообщалось вращение с постоянной угловой скоростью исследуемого режима и воздух собирался в зонах пониженного давления на осях вихрей. Визуализация структуры течения для неустойчивых режимов закрученного течения при удлинении цилиндра от 3,2 до 5,5 впервые позволила идентифицировать эти режимы как мультиспиральные распады с образованием винтообразных вихревых дуплетов, триплетов и квадруплетов.

**Ключевые слова:** винтовые вихри, распад вихря, мультиплеты.

Равновесные конфигурации из одинаковых вихрей — вихревые мультиплеты исследуются давно, начиная с работы В. Томсона (лорда Кельвина), пытавшегося построить вихревую модель атома с помощью решения задачи об устойчивости точечных вихрей, расположенных в вершинах правильных многоугольников [1]. В эксперименте при изучении движения вихрей во вращающейся камере со сверхтекучим гелием были найдены правильные равновесные конфигурации, включающие от 2 до 6 прямолинейных вихрей [2]. Поиск правильных равновесных конфигураций из одинаковых вихрей в реальных жидкостях недавно также дал новые результаты. В работах [3–4] сообщено о возможности образования мультиплетов в интенсивно закрученном потоке, генерируемом в цилиндрическом контейнере его вращающимся торцом. Для больших, чем ранее исследовались

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 10-08-010а6), ФТР (Дания, No. 09-070608) и Мин. образования и науки РФ (ГК1У.740.11.0144).

экспериментально [5–6], удлинений цилиндра в его поперечном сечении на четверти высоты от неподвижного торца обнаружены равновесно вращающиеся самоорганизующиеся вихревые мультиплеты: дуплет, триплет и квадруплет. Очевидно, что регистрации симметричного расположения азимутально кратноповторяющихся вихревых ядер только в одном плоском сечении течения совсем недостаточно, чтобы правильно охарактеризовать трехмерную структуру мультиплетов. Связано это с тем, что в реальных жидкостях продольные вихревые структуры существуют не в виде прямолинейных вихрей, а, как правило, в виде различного рода спиралей, из которых наиболее часто встречаются винтовые вихри.

Существование равновесных совокупностей из одинаковых винтовых вихрей с осями, лежащими на общем образующем цилиндре и сдвинутыми относительно друг друга на одинаковый угол, обратно пропорциональных количеству вихрей (дуплет, триплет или квадруплет и т. д.), было предсказано теоретически [7–8]. Однако из-за вращения винтовых вихревых мультиплетов диагностировать их пространственную структуру в реальных условиях эксперимента чрезвычайно сложно, за исключением, пожалуй, концевых вихрей за пропеллером или ротором турбины, где трассеры запускаются в точках образования вихрей — с концов лопастей. Свидетельств о пространственной структуре других вихревых мультиплетов крайне мало, да и все они ограничиваются воссозданием структуры только дуплетов, так называемых двуспиральных или двойных вихрей. Например, в вихревой камере с двухскатным дном [9] была хорошо визуализирована двойная винтовая спираль, в работе [10] описано спиральное скручивание двух протяженных вихрей в пограничном слое, в работе [11] зафиксировано спиральное спаривание двух вихревых нитей при естественной конвекции; двойной вихрь иногда образуется при распаде вихрей [12] и т. п. Относительно винтовых триплетов, квадруплетов и т. д. фактических данных, прямо фиксирующих их пространственную форму, нет, есть некоторые опосредованные свидетельства, подобно зарисовке со слов очевидцев трехвихревой структуры ядра торнадо в [13].

Отметим, что все перечисленные выше примеры регистрации винтообразной структуры вихревых дуплетов получены визуализацией. Это связано не только с еще недостаточным распространением в то время бесконтактных измерительных методов лазерной доплеровской анемометрии (ЛДА) и цифровой трассерной визуализацией PIV (Particle Image Velocimetry), хорошо зарекомендовавших себя сегодня, а скорее всего с тем, что до сих пор проблема восстановления мгновенной трехмерной структуры потока по ЛДА — точечным и PIV — полям скорости нестационарного течения еще полностью не решена. С другой стороны визуализация более легкими, чем основная движущаяся среда, трассерами успешно применяется для определения пространственной структуры вихрей. Например, в [9, 14] для визуализации винтовых вихрей в воде успешно применялись пузырьки воздуха. Такая визуализация, как метод диагностирования медленно и равномерно вращающихся или неподвижных вихревых мультиплетов, хорошо аргументирована простой и ясной физической трактовкой эксперимента. Действительно, благодаря более низкому значению давления в центре вихрей пузырьки воздуха собираются на их оси, часто образуя хорошо наблюдаемую тонкую воздушную нить, которая для неподвижных вихрей совпадает с их осью. В случае равномерного движения винтовых вихрей минимум давления сохраняет форму оси вихря, хотя уже не полностью с ней совпадает, а может быть коллинеарно сдвинут за счет поправки в интеграле давления, связанной с нестационарным членом из-за периодичности движения. Однако для рассмотренных здесь режимов чрезвычайно медленного движения мультиплетов это искажение очень мало и им можно пренебречь.

Визуализация пространственной формы вихревых мультиплетов, обнаруженных в [3–4], проведена на той же экспериментальной установке, то есть в вертикальном цилиндрическом контейнере из прозрачного оргстекла оптического качества внутренним диаметром 288 мм с вращающейся верхней крышкой для разных значений высоты цилиндра  $H$ . Изменение структуры потока в этой конфигурации зависит от двух режимных параметров: удлинения цилиндра — отношения его высоты к радиусу вращающегося диска  $h = H/R$  и числа Рейнольдса  $Re = \Omega R^2/\nu$ , где  $\Omega$  — угловая скорость вращения крышки радиусом  $R$ ,  $\nu$  — кинематическая вязкость рабочей жидкости. Внешний вид экспериментальной установки изображен на фото и схеме рис. 1, а ее более детальное описание можно найти, например, в работе [6]. В качестве рабочей жидкости использовалась 80 % водно-глицериновая смесь. Кинематическая вязкость измерялась в нескольких точках в диапазоне температур 18,5–26,3 °С капиллярным вискозиметром и изменялась от  $62,1 \times 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с при 18,5 °С до  $38,8 \times 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с при 26,3 °С. Экспериментальные исследования выполнялись при температуре 22,3 °С и кинематической вязкости рабочей жидкости  $\nu = 49,4 \times 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с, а угловая скорость вращения крышки замкнутого цилиндрического контейнера составляла от 0,83 оборотов в секунду при  $Re = 2200$  до 1,17 оборотов в секунду при  $Re = 3100$  и, соответственно, линейная скорость на радиусе 144 мм находилась в диапазоне от 0,12 до 0,17 м/с. В предшествующих экспериментах использовали в качестве светорассеивающих трассеров полиамидные сферы диаметром 20 мкм с нейтральной плавучестью. После их хаотического засеивания в рабочий объем рабочая смесь специально долгое время отстаивалась для максимального выделения растворенного в ней воздуха, который потом из установки удалялся. Трассеры двигались вместе с жидкостью как пассивная примесь, отбрасываясь вместе с жидкостью вдоль крышки к периферии за счет действия центробежных сил, затем опускались вдоль стенок цилиндра к неподвижному дну, перемещались вдоль него к центру цилиндра и затем поднимались вверх за счет разрежения под крышкой. Таким образом, частички жидкости и вместе с ними нейтральные трассеры совершали сложное винтообразное движение вдоль торообразных поверхностей тока, однако их мгновенное положение относительно друг друга сохранялось хаотичным. На рис. 2 приведена мгновенная фотография хаотического положения трассеров в исследуемом течении. С помощью данной методики с использованием произвольно засеянных трассеров нейтральной плавучести не удавалось визуально определить расщепление центрального вихря

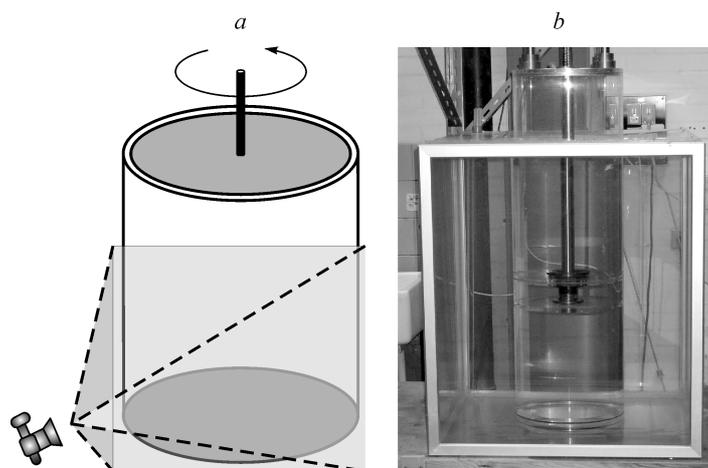


Рис. 1. Схема (а) и фотография (б) установки.



Рис. 2. Пример визуализации частицами нейтральной плавучести.

на мультиплеты, зафиксированное в PIV измерениях мгновенных полей скорости в горизонтальном сечении цилиндра [3–4]. Ранее подобное расщепление ядра в закрученном потоке в трубе наблюдалось с помощью визуализации красящим веществом близкой к воде плотности (например, в [15]), оно обеспечивалось непрерывной подачей краски к точке расщепления центрального вихря. В наших экспериментах заранее положение точки расщепления было неизвестно, и способ предварительного хаотического засеяния трассерных частиц не мог обеспечить их непрерывную подачу к данной точке. Поэтому была предпринята попытка использовать хорошо отработанную в Институте теплофизики СО РАН методику визуализации ядра вихревых структур в жидкости с помощью воздушных пузырьков [9, 14], основанную на собирании этих пузырьков в минимуме давления на вихревых осях.

В текущих опытах полиамидные трассеры не добавлялись, а воздух не удалялся, т. е. трассерами как раз и служили маленькие пузырьки воздуха размером 0,3–0,5 мм, собирающиеся на верхней крышке цилиндра за счет растворенного в смеси воздуха. Собственная скорость всплытия таких пузырьков в 80-процентной водоглицериновой смеси примерно равнялась 0,0005–0,001 м/с [16], что давало оценку для полного времени всплытия пузырьков от дна до верхней крышки не менее 30 мин. После этапа конденсации пузырьков воздуха на верхней крышке в виде пока еще мелких практически одинаковых пузырьков крышке сообщалось вращение с постоянной угловой скоростью исследуемого режима. Через несколько ее оборотов режим течения в контейнере устанавливался, пузырьки воздуха из-за малых размеров во всей области течения совершали движение в виде пассивной примеси к жидкости. Однако в центральной части с большой концентрацией завихренности воздух большей частью собирался в зонах пониженного давления на осях вихрей, также, как и в экспериментах по визуализации воздухом вихревых структур в вихревой камере квадратного сечения [9, 14]. Характерные скорости движения жидкости для исследуемых режимов при данной кинематической вязкости рабочей жидкости измерялись методами лазерной доплеровской анемометрии (ЛДА) и цифровой трассерной визуализацией (PIV) в работах [3, 4] и составляли 0,05–0,07 м/с в области формирования вихревых мультиплетов и 0,02–0,04 м/с — за пределами этой области. Следует отметить, что в этой зоне концентрированной завихренности на удалении 0,5–0,7 радиуса от оси цилиндрического контейнера тангенциальная скорость составляла 0,05–0,06 м/с. Таким образом, характерная угловая скорость вращения рабочей жидкости в области формирования мультиплетов находилась в интервале 0,09–0,11 оборотов в секунду. Следует отметить, что в наших экспериментах не было неподвижных вихревых мультиплетов, они хоть и очень медленно, но всегда вращались. Данные ЛДА измерений работы [17] после перехода к размерным координатам и делению на количество вихрей и визуальные наблюдения в настоящих экспериментах показали, что их частота вращения составляла примерно 0,1 оборот в секунду для всех типов мультиплетов, хорошо согласуясь с общей частотой вращения зоны концентрированной завихренности. Для медленно вращающихся вихрей, в отличие от неподвижных, непре-

рывная воздушная нить на их осях уже не формируется. Однако, как отмечено в [14], для одиночного винтового вихря, прецессирующего с угловой скоростью даже в 1-2 оборота в секунду, повышения концентрации пузырьков воздуха на его оси было вполне достаточно, чтобы однозначно идентифицировать его винтовую форму. В описанных здесь экспериментах при существенно меньших угловых скоростях вращения мультиплетной вихревой структуры также удалось вполне отчетливо зафиксировать их пространственную форму с помощью пузырьковой визуализации. Незначительное искажение реальной формы винтовой оси, конечно, имеет место за счет архимедовой и центробежной сил, но оно не существенно. Кроме того, присутствующее искажение формы оси вихрей не влияет на оценку их количества, так как при визуализации многоспиральных винтовых вихрей пузырьками воздуха все пузырьки строго собираются в минимумах давления, количество которых строго соответствует числу винтовых осей и однозначно их идентифицируют.

На рис. 3 представлены негативы фотографий, визуализирующих триплетную, дуплетную и квадруплетную форму вихревых структур и соответствующие распределения завихренности в плоском сечении цилиндра из работы [4] согласно диаграмме режимов течения (рис. 4). Первое фото (см. рис. 3, *a*) соответствует режиму с числом Рейнольдса  $Re = 2200$  и относительной высотой цилиндра  $h = 3,5$ , второе (*b*) —  $Re = 2800$  и  $h = 4,6$ , третье (*c*) —  $Re = 3100$  и  $h = 5,3$ . Триплетная и дуплетная вихревые структуры на первых двух фото просматриваются великолепно, все пузырьки воздуха строго распределены по винтовым осям каждого из вихрей и однозначно идентифицируют число вихрей в мультиплетах. Однако на третьем фото восприятию четырех винтовых осей в центральной части цилиндра мешает множество винтообразных структур, находящихся вблизи стенок цилиндра. Объясняется это тем, что при увеличении количества вихрей в мульти-

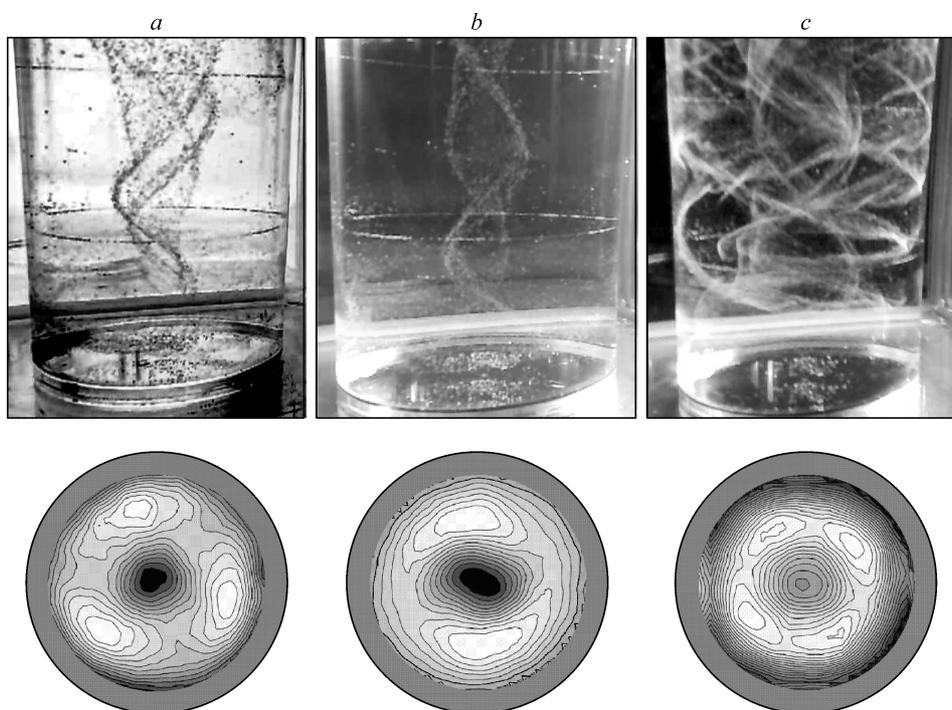


Рис. 3. Верхний ряд: визуализация мультиспиральных распадов приосевого вихря. Нижний ряд: распределения завихренности в плоском сечении цилиндра из [4].

$Re = 2200$  (*a*),  $2800$  (*b*),  $3100$  (*c*);  $h = 3,5$  (*a*),  $4,6$  (*b*),  $5,3$  (*c*).

плетах их интенсивность падает, делясь поровну между всеми, а вместе с ее уменьшением на осях вихрей возрастает давление, переставая быть абсолютным минимумом во всей области течения, как в случаях одиночного, двойного и тройного вихрей. Известно, что вдоль цилиндрических стенок контейнера в данном течении может образовываться еще одна вихревая система — Гёртлера [18]. Поскольку на третьем фото пузырьки воздуха собираются в обеих центральной и пристенной вихревых системах, то интенсивность каждого из центральных вихрей квадруплета уменьшилась настолько, что минимум давления на их осях стал соизмерим с давлением на осях пристенных вихрей, создав абсолютные минимумы давления в двух местах области течения, а пузырьки воздуха перераспределились между ними, визуализируя соответственно обе вихревые системы сразу. Если мысленно отвлечься от системы пристенных вихрей, то в центральной части контейнера на фото (см. рис. 3, c) можно заметить попарно расположенные образы четырех винтовых нитей. Сразу бросаются в глаза две яркие нити, расположенные в той же фазе, что и дуплет на фото (см. рис. 3, b), а рядом с ними чуть смещены и менее яркие еще две нити. Конечно, плоское изображение фотографии существенно затрудняет правильное пространственное восприятие, но непосредственное наблюдение однозначно регистрирует в центре контейнера четыре медленно вращающихся винтовых нити.

Данная визуализация полностью подтвердила возникновение винтовых вихревых мультиплетов согласно второй ветви перехода к нестационарному течению диаграммы из [4] и позволила немного с иной точки зрения взглянуть на описание основных режимов течения в цилиндрическом контейнере с вращающимся торцом. Будем рассматривать режимы течения в контейнере с точки зрения распада вихря, следуя обзору [19], но, конечно, учитывая, что в отличие от концентрированных протяженных вихрей в свободном пространстве или трубах здесь, в контейнере, концентрированный вихрь не свободный, а расположен во всей завихренной жидкости. Другая особенность распада закрученных течений в замкнутых контейнерах связана с тем, что соответствующие изменения формы течения или структуры, сконцентрированной в центре контейнера завихренности, возникают

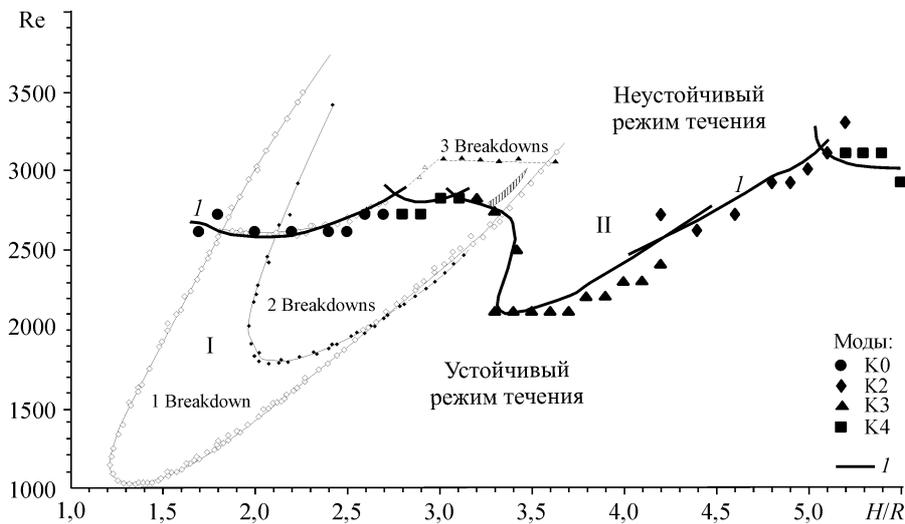


Рис. 4. Диаграмма режимов течения, закрученного в контейнере вращающейся крышкой. I — оригинальная диаграмма Эскудье из работы [5], II — настоящая работа: расчетные нейтральные кривые роста линейных возмущений (I), моды — возникновение нестационарности течения в эксперименте, где цифра означает номер гармоники или количество вихрей в мультиплете.

не спонтанно вдоль всей длины свободного вихря, а расположены на оси фиксированного размера, равного длине цилиндра. Поэтому возникновение распада в контейнере полностью определяется степенью интенсивности вихря, которая зависит от угловой скорости  $\Omega$  вращения крышки или соответствующего ей числа Рейнольдса  $Re$  и удлинения цилиндра  $h$ .

На  $(h, Re)$  диаграмме рис. 4 воспроизведены границы возникновения пузырькового распада вихря I из работы [5] и критические кривые перехода к нестационарным режимам течения, полученные численным расчетом ( $I$ ) из работ [17, 20] и найденные экспериментально (моды, количество вихрей) в работах [6, 17]. Следуя классической визуализации Эскудье [5], при увеличении значений режимных параметров сначала возникает осесимметричный распад вихря с разным количеством рециркуляционных зон — пузырей для удлинений цилиндра  $h$  от 1,25 до 3,2 при числах Рейнольдса  $Re$  от 1000 до 2500. Для  $Re$  от 2500 до 3000 этот тип распада становится нестационарным: визуально по Эскудье это характеризуется тем, что пузыри начинают осесимметрично осциллировать в приосевой области цилиндра.

Следует отметить, что результаты экспериментальных исследований течения современными методами диагностики, проведенные при одновременном использовании сразу двух бесконтактных измерительных методик — LDA и PIV в [6] для удлинений цилиндра от 1 до 3,5, очень хорошо совпали с визуализацией Эскудье [5] и с расчетной критической кривой возникновения осесимметричных колебаний, полученной численным исследованием линейной устойчивости стационарных режимов течения к малым осесимметричным возмущениям [20]. Исключение составляет только участок критической кривой для  $h$  от 2,6 до 3,2, где переход к нестационарным режимам характеризовался появлением сначала не осесимметричной, а азимутальных третьей или четвертой мод колебаний.

В дополнение к описанной проверке диаграммы Эскудье из [5] изучение режимов течения было расширено до несколько больших удлинений цилиндра  $h$  от 3,2 до 5,5. Как установлено в [4], для этих удлинений изменение структуры течения и переход к нестационарным режимам (крупные точки на диаграмме рис. 4) происходит одновременно и описывается с помощью одной критической кривой. Если соединить полученные экспериментально точки, то эта кривая будет выглядеть подобной правой ветви возникновения пузырькового распада, но с началом, смещенным вправо примерно на 2 по оси удлинений и поднятым вверх на 1100 по числу Рейнольдса. По результатам визуализации на рис. 3 и мультиплетном строении ядер этих вихревых структур, найденном в работе [4], можно с уверенностью сказать, что эта ветвь диаграммы определяет возникновение распада двух-, трех- и четырехспирального типа. Причем не удивительно, что данная кривая является одновременно границей изменения структуры течения (спирального распада концентрированного приосевого вихря на вихревые мультиплеты) и критической кривой перехода к нестационарным режимам течения. Связано это с тем, что после спирального распада возникают винтообразные вихревые мультиплеты, вращение которых сразу дает нестационарный режим.

Следует обратить внимание на сравнение данного участка экспериментальной кривой (см. рис. 4, II) с расчетом по линейной теории ( $I$ ) [17]. Здесь нет такого абсолютного совпадения, как это было при возникновении осесимметричных колебаний пузырькового распада для  $h$  от 1,7 до 2,6. Эти различия как раз и могут быть следствием того, что здесь не просто возникают нестационарные колебания течения, а зарождаются вихревые мультиплеты после многоспиральных распадов концентрированного приосевого вихря. Действительно, при линейном исследовании устойчивости [17, 20] фактически исследуется неустойчивость осесимметричных стационарных режимов к малым гармоническим возмущениям. Это полностью соответствует описанию возникновения гармонических осцилляций пузыря

и не совсем точно описывает мультиплет, который не может быть представлен только одной азимутальной гармоникой. Однако при представлении мультиплетов в виде разложения Фурье определяющей будет азимутальная гармоника с номером, соответствующим числу вихрей в мультиплете. Поэтому удовлетворительное согласие расчетов и эксперимента все-таки было получено. Но, очевидно, чтобы сравнение было более хорошим нужно описать мультиплет более аккуратно с учетом большего числа гармоник. Но здесь возникнут новые сложности нелинейного взаимодействия гармоник между собой [21], т.е. задача более точного численного определения этого участка границы становится трехмерной нелинейной и пока трудно решаемой численно.

Другое упомянутое выше несоответствие для участка изменения  $h$  от 2,7 до 3,3 на диаграмме рис. 3, при сравнении результатов, полученных разными способами, очевидно связано с появлением третьей или четвертой гармоник азимутальных колебаний в области существования осесимметричного пузырькового распада вихря вместо нулевой — осесимметричной. Поскольку эта зона находится над началом области возникновения мультиспиральных распадов, то можно предположить, что здесь развивается своеобразное соревнование между пузырьковым и мультиспиральными распадами. В результате пузырьковый распад здесь побеждает, т.е. сохраняется, но его неустойчивость развивается уже не по ожидаемому осесимметричному сценарию, а из-за близости зоны возникновения мультиспиральных распадов здесь начинают доминировать азимутальные моды при переходе к нестационарному течению.

Обнаружение в цилиндрическом контейнере главных типов распада приосевого вихря — пузырькового и (мульти-) спирального, с похожими, но параллельно сдвинутыми кривыми возникновения, навевает, конечно, аналогию с распадами концентрированного вихря в слабо конической трубе [12], однако типов мультиспирального распада здесь обнаружено существенно больше. В дополнение к хорошо известному двуспиральному распаду в трубе добавляются сразу два новых типа — трех- и четырехспиральный. Впрочем, пузырьковый распад, описанный Эскуде [5], для закрученного течения в контейнере был тоже богаче: содержал не только один, но два и даже три пузыря.

Таким образом, визуализация структуры течения, проведенная в настоящей работе, для неустойчивых режимов закрученного течения в цилиндре при его удлинениях  $h$  от 3,2 до 5,5 впервые позволила идентифицировать эти режимы как мультиспиральные распады концентрированного приосевого вихря с образованием после распада винтообразных вихревых дуплетов, триплетов и квадруплетов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Thomson W. Floating magnets (illustrating vortex-systems) // Nature. 1878. Vol. 18. P. 13–14.
2. Yarmchuk E., Gordon M., Packard R. Observation of stationary vortex array in rotating superfluid helium // Phys. Rev. Lett. 1979. Vol. 43, No. 3. P. 214–219.
3. Окулов В.Л., Наумов И.В., Соренсен Ж.Н. Вихревой триплет // ДАН. 2006. Т. 409, № 3. С. 333–337.
4. Окулов В.Л., Наумов И.В., Соренсен Ж.Н. Самоорганизующиеся вихревые мультиплеты в закрученном течении // Письма в ЖТФ, 2008. Т. 34, № 15. С. 89–95.
5. Escudier M.P. Observations of the flow produced in a cylindrical container by a rotating endwall // Exp. Fluids. 1984. Vol. 2. P. 189–196.
6. Sorensen J.N., Naumov I., Mikkelsen R. Experimental investigation of three-dimensional flow instabilities in a rotating lid-driven cavity // Exp. Fluids, 2006. Vol. 41, No. 3. P. 425–440.
7. Okulov V.L. On the stability of multiple helical vortices // J. Fluid Mech. 2004. Vol. 521. P. 319–342.
8. Okulov V.L., Sorensen J.N. Stability of helical tip vortices in a rotor far wake // J. Fluid Mech. 2007. Vol. 576. P. 1–25.
9. Алексеев С.В., Шторк С.И. Экспериментальное наблюдение взаимодействия вихревых нитей // Письма в ЖЭТФ. 1994. Т. 59, № 11. С. 746–750.

10. Chandrsuda C., Mehta R.D., Weir A.D., Bradshaw P. Effect of free-stream turbulence on large structure in turbulent mixing layers // J. Fluid Mech. 1978. Vol. 85. P. 693–704.
11. Bubnov B.M., Golitsyn G.S. Experimental study of convective structures in rotating fluids // J. Fluid Mech. 1986. Vol. 16. P. 503–532.
12. Leibovich S. The structure of vortex breakdown // Ann. Rev. Fluid Mech. 1978. Vol. 10. P. 221–246.
13. Сноу Д. Торнадо // В мире науки. 1984. № 6. С. 44–55.
14. Alekseenko, S.V., Kuibin, P.A., Okulov, V.L., Shtork S.I. Helical vortices in swirl flow // J. Fluid Mech. 1999. Vol. 382. P. 195–243.
15. Faler J.H., Leibovich S. Disrupted states of vortex flow and vortex breakdown // Phys. Fluids. 1977. Vol. 20, No. 9. P. 1385–1400.
16. Кутателадзе С.С., Накоряков В.Е. Тепломассообмен и волны в газожидкостных системах. Новосибирск: Наука, 1984. 301 с.
17. Sorensen J.N., Gelfgat A.Yu., Naumov I.V., Mikkelsen R.F. Experimental and numerical results on three-dimensional instabilities in a rotating disk — tall cylinder flow // Phys. Fluids. 2009. Vol. 21. P. 054102–054106.
18. Spohn A., Mory M., Hopfinger, E.J. Experiments on vortex breakdown in a confined flow generated by a rotating disk // J. Fluid Mech. 1998. Vol. 370. P. 73–99.
19. Lucca-Negro O., O'Doherty T. Vortex breakdown: a review // Prog. in Energy and Combustion Sci. 2001. Vol. 27, No. 4. P. 431–481.
20. Gelfgat A.Y., Bar-Yoseph P.Z., Solan A. Stability of confined flow with and without vortex breakdown // J. Fluid Mech. 2001. Vol. 438. P. 363–377.
21. Lopez J.M. Rotating and modulated rotating waves in transitions of an enclosed swirling flow // J. Fluid Mech. 2006. Vol. 553. P. 323–346.

*Статья поступила в редакцию 3 февраля 2010 г.*