

В. А. Одинцов

ДВУМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОСКОЛКОВ ЦИЛИНДРОВ ПО МАССЕ И ХАРАКТЕРИСТИКЕ ФОРМЫ

Предложена аналитическая модель двумерного распределения осколков цилиндров по массе и форме. Безусловное распределение осколков по массе учитывает наличие осколков двух классов и описано гиперэкспоненциальным бимодальным распределением. Условное распределение осколков по параметру формы представлено нормальным законом, в котором математическое ожидание параметра формы связано регрессией с массой осколка.

Механика высокоскоростной деформации и разрушения цилиндров под действием продуктов детонации рассматривалась в [1—7]. Результаты экспериментов обычно представляются в виде функции распределения осколков по массе $F(m) = N(<m)/N_0$ или плотности распределения $f(m) = dF(m)/dm$, где $N(<m)$ — число осколков с массой, меньшей m ; N_0 — полное число осколков с массой, большей нуля (теоретическая константа).

Для ряда прикладных задач требуется более полная информация о характеристиках осколочной массы, когда необходимо знать также распределение осколков по форме, т. е. иметь двумерное распределение $j(m, \Phi)$, где Φ — некоторая характеристика формы осколка. В общем случае m и Φ — зависимые случайные величины (компоненты случайного вектора).

В качестве характеристики Φ могут быть использованы характеристики осколка, получаемые непосредственно из опыта (длина осколка l , средняя проекция $\langle S \rangle$), а также производные от них величины (удлинение осколка $\lambda = (\gamma_0 l^3/m)^{1/2}$, параметр формы $\Phi = \langle S \rangle V^{2/3}$, $V = m/\gamma_0$ — объем осколка, γ_0 — плотность металла). В прикладных целях наиболее информативен параметр Φ .

Используя закон умножения плотностей, запишем выражение для плотности системы случайных величин m, Φ

$$f(m, \Phi) = f_1(m) f_2(\Phi_m), \quad (1)$$

где $f_1(m)$ — безусловная плотность распределения по массе; $f_2(\Phi_m)$ — условная плотность распределения по параметру формы.

Для описания распределения по массе наиболее известен закон Вейбулла

$$F(m) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{m}{m_0} \right)^\Lambda \right], \quad (2)$$

$$f(m) = \frac{\Lambda}{m_0} \left(\frac{m}{m_0} \right)^{\Lambda-1} \exp \left[- \left(\frac{m}{m_0} \right)^\Lambda \right].$$

Здесь m_0 — характеристическая масса распределения; Λ — показатель качества фрагментации (при увеличении Λ спектр становится более однородным). Закон Вейбулла при $\Lambda = 0,5$ иногда называют законом Мотта.

Математическое описание массы фрагмента определяется как

$$\langle m \rangle = \int_0^\infty m f(m) dm = m_0 \Gamma \left(1 + \frac{1}{\Lambda} \right),$$

где $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$ — гамма-функция.

Как показано в [8], распределение Вейбулла более или менее удовлетворительно описывает спектры разрушения достаточно хрупких ста-

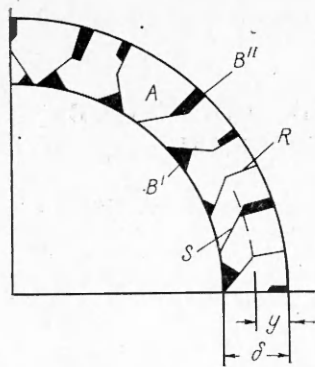


Рис. 1.

лей в комбинации с высокобризантными ВВ (при значении параметра фрагментации $\mathcal{F}_0 > 50$, где $\mathcal{F}_0 = \rho_0 D^2 a_0^{1/2} / E_s^{1/2} G^{1/2}$; ρ_0 , D — соответственно плотность ВВ и скорость детонации; a_0 — внутренний радиус цилиндра; G — модуль сдвига металла; E_s — удельная энергия разрушения (Дж/м²). При этом показатель Λ зависит от величины параметра \mathcal{F}_0 : $\Lambda = 0,4, 0,5$ и $0,6$ при $75 > \mathcal{F}_0 > 50$, $100 > \mathcal{F}_0 > 75$ и $\mathcal{F}_0 > 100$ соответственно. Характеристическая масса спектра Вейбулла может быть приближенно определена с помощью соотношения

$$m_0 = \gamma_0 \delta_0^3 / 2 \delta_a \mathcal{F}_0,$$

в котором δ_0 — толщина стенки цилиндра; $\delta_a = \delta_0 / d_0$ — относительная толщина стенки; d_0 — наружный диаметр цилиндра.

Как показано в [9], реальный спектр осколков включает в себя две морфологические совокупности: крупные осколки типа A , содержащие обе исходные поверхности, и сопутствующие осколки типа B , содержащие одну исходную поверхность (рис. 1). При этом класс B включает в себя два подкласса: B' — осколки контактной зоны, примыкающей к заряду ВВ, образованные поверхностями сдвига S , и осколки B'' в зоне, расположенной у внешней поверхности цилиндра, образованные хрупким отрывом радиального направления R . Относительная глубина зоны отрыва y/δ возрастает с увеличением содержания углерода в стали.

Отсюда следует, что более общей моделью спектра, учитывающей наличие в нем двух классов осколков, является гипервейбулловое бимодальное распределение

$$F(m) = 1 - \xi \exp\left[-\left(\frac{m}{m_a}\right)^\alpha\right] - (1 - \xi) \exp\left[-\left(\frac{m}{m_b}\right)^\beta\right],$$

$$f(m) = \xi \frac{\alpha}{m_a} \left(\frac{m}{m_a}\right)^{\alpha-1} \exp\left[-\left(\frac{m}{m_a}\right)^\alpha\right] + (1 - \xi) \frac{\beta}{m_b} \left(\frac{m}{m_b}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{m}{m_b}\right)^\beta\right], \quad (3)$$

$$\langle m \rangle = \xi m_a \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) + (1 - \xi) m_b \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right),$$

(m_a , m_b — соответственно характеристические массы совокупностей осколков типа A и B , а ξ — относительное число осколков типа A) или его частный случай при $\alpha = \beta = 1$ (гиперэкспоненциальное распределение)

$$F(m) = 1 - \xi \exp\left(-\frac{m}{m_a}\right) - (1 - \xi) \exp\left(-\frac{m}{m_b}\right),$$

$$f(m) = \frac{\xi}{m_a} \exp\left(-\frac{m}{m_a}\right) + \frac{1 - \xi}{m_b} \exp\left(-\frac{m}{m_b}\right), \quad (4)$$

$$\langle m \rangle = \xi m_a + (1 - \xi) m_b.$$

Отметим, что в последнем случае соотношения, определяющие относительные массы фракций, удается получить в виде конечных формул.

Возможность удовлетворительного описания разнородных спектров унифицированных цилиндров № 12 с помощью распределения (4) подтверждена в [9]. Сравнение с экспериментом проводилось на распределениях в форме «масса по массе»

$$\varphi(m) = \frac{m}{\langle m \rangle} f(m) = \frac{1}{\langle m \rangle} \left[\xi \frac{m}{m_a} \exp\left(-\frac{m}{m_a}\right) + (1 - \xi) \frac{m}{m_b} \exp\left(-\frac{m}{m_b}\right) \right],$$

на которых бимодальный характер спектра выявляется наиболее отчет-

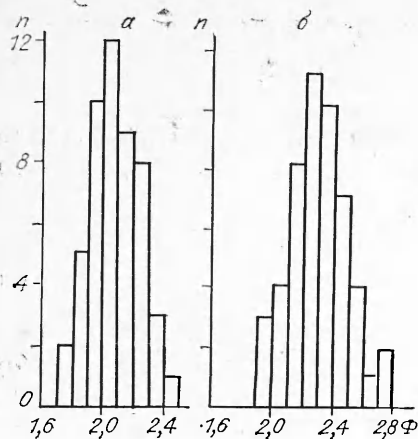


Рис. 2.

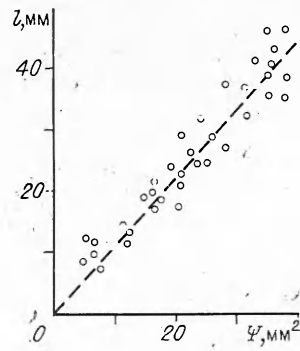


Рис. 3.

ливо. Условное распределение $f_2(\Phi|m)$ опишем нормальным законом

$$f_2(\Phi|m) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(\Phi - \langle \Phi \rangle_m)^2}{2\sigma^2} \right].$$

Применимость в данном случае нормального закона подтверждается экспериментальными измерениями. Среднюю проекцию $\langle S \rangle$ определяли с помощью многолучевого компаратора. Согласие статистической модели с опытным распределением проверяли по критерию Пирсона χ^2 .

На рис. 2 представлены гистограммы распределения осколков цилиндра № 12 (Ст. 60, ТНТ) по параметру формы Φ (n — число осколков в данном интервале $\Delta\Phi = 0,05$, объем выборки — 50 осколков) для двух интервалов масс: 1—2 (а) и 4—5 г (б). В последнем случае выборка составлялась по результатам подрыва нескольких цилиндров. Средние значения масс соответственно составляли 1,43 и 4,46 г, а параметры формы $\bar{\Phi}$ — 2,07 и 2,30. Обработка большого числа распределений по параметру формы в разных интервалах масс при различных сочетаниях металл — ВВ показала, что значение коэффициента вариации $\bar{V} = \sigma/\bar{\Phi}$ (σ — выборочное среднеквадратичное отклонение) составляло в среднем 0,12.

Условное математическое ожидание параметра формы $\langle \Phi \rangle_m$ находится с помощью регрессии $\langle \Phi \rangle_m = \mathcal{R}_1(m)$, которую можно построить с помощью другой регрессии $\langle l \rangle_\Psi = \mathcal{R}_2(\Psi)$ (l , Ψ — длина и площадь поперечного сечения осколка, $\langle l \rangle_\Psi$ — математическое ожидание длины осколка, найденное для условного распределения $t_2(l|\Psi) = t(\Psi, l)/t_1(\Psi)$).

Регрессия $\langle l \rangle_\Psi = \mathcal{R}_2(\Psi)$ получается с помощью следующих соображений. Допустим, что вдоль образующей цилиндра располагается система плоских трещин, нормальных к образующей, со средней линейной плотностью Π , которую можно рассматривать как пуассоновский поток. Площадь трещины S_R примем постоянной, площадь сечения Ψ рассматриваем как переменную величину. Вероятности разрушения $P_0 = 0$ при $S_R/\Psi = 0$ и $P_0 = 1$ при $S_R/\Psi = 1$.

Линеаризируя на интервале $S_R/\Psi \in [0, 1]$, получим $P_0 = S_R/\Psi$. Вероятность попадания на участок длиной l при площади сечения Ψ хотя бы одной разрушающей трещины

$$P = 1 - \exp[-\langle n \rangle P_0],$$

где $\langle n \rangle = \Pi l$ — математическое ожидание числа трещин, попадающих на участок длиной l . Отсюда

$$P = 1 - \exp \left(-\frac{\Pi S_R}{\Psi} \right)$$

и, следовательно, при заданном уровне вероятности

$$l = A\Psi, \quad A = -\frac{\ln(1-P)}{\Pi S_R}.$$

Отсюда вытекает простое соотношение между массой и условным математическим ожиданием длины осколка $\langle l \rangle_m$. Учитывая, что для прямой призмы

$$m = \gamma_0 \Psi l,$$

получим при $\Psi = l/A$

$$\langle l \rangle_m = (A/\gamma_0)^{1/2} m^{1/2}. \quad (5)$$

Экспериментальные измерения осколков унифицированных цилиндров № 12 [10] (внутренний диаметр $d_a = 40$ мм, наружный $d_0 = 60$ мм, длина камеры $L_0 = 160$ мм, удлинение камеры $\lambda_0 = L_0/d_a = 4$, относительная толщина стенки $\delta_a = \delta_0/d_0 = 1/6$) при различных комбинациях металл — ВВ подтвердили существование линейной связи $l = A\Psi$ (рис. 3), где $A = 1,1$ 1/мм. Средняя длина находилась для интервалов масс 0,5—1,1—2,2—3 г и т. д., причем значение Ψ определялось для средней массы в интервале. Из (3) следует, что при увеличении массы осколка геометрическое подобие нарушается, т. е. растет относительное удлинение фрагмента $\lambda = l/\sqrt{\Psi}$. Действительно,

$$\lambda = \frac{l}{\sqrt{\Psi}} = A \sqrt{\frac{l}{\Psi}} = A^{3/4} \left(\frac{m}{\gamma_0} \right)^{1/4}.$$

При определенных условиях возможно образование спектра крупных осколков с длиной, равной длине цилиндра (спектра «полос»).

С другой стороны, наличие сильной корреляционной связи $l = \mathcal{R}(\Psi)$, характеризующейся большой ковариацией $\text{cov}(\Psi, l)$, приводит к значительному укрупнению спектра, вытекающему из соотношения для средней массы:

$$\langle m \rangle = \gamma_0 [\langle \Psi \rangle \langle l \rangle + \text{cov}(\Psi, l)].$$

Возвращаясь к параметру формы, учтем, что для выпуклых тел средняя площадь проекции $\langle S \rangle$, согласно лемме Коши, определяется как

$$\langle S \rangle = S_{\Sigma}/4,$$

где S_{Σ} — полная поверхность площади тела. Принимая модель осколка в виде прямой призмы длиной l площадью сечения Ψ и периметром сечения p , получим

$$S_{\Sigma} = 2\Psi + pl,$$

откуда параметр формы

$$\Phi = \frac{\langle S \rangle}{V^{2/3}} = \frac{2\Psi + pl}{4V^{2/3}}.$$

В безразмерных переменных

$$\Phi = \frac{2 + \Omega\lambda}{4\lambda^{2/3}}, \quad (6)$$

где $\Omega = p/\sqrt{\Psi}$ — относительный периметр сечения призмы. Величина Ω зависит от характера разрушения цилиндра. Для осколков, образованных комбинированным разрушением отрыв — сдвиг, $\Omega = 4,5 \div 5$, для осколков, образованных сдвигом, $\Omega = 5 \div 6$. Для модельной формы сечения в виде ромба с острым углом β получаем

$$\Omega = 4/\sqrt{\sin \beta}.$$

При $\beta = 30, 40, 50^\circ$ значение $\Omega = 5,66, 4,99$ и $4,57$ соответственно. При $\Omega\lambda \gg 2$ формула (4) упрощается:

$$\Phi = \Omega\lambda^{1/3}/4,$$

откуда

$$\langle \Phi \rangle_m = \frac{A^{1/4} \Omega}{4\gamma_0^{1/12}} m^{1/12}. \quad (7)$$

Принимая $A = 1,1$ 1/мм, $\Omega = 5,25$, $\gamma_0 = 7,85 \cdot 10^{-3}$ г/мм³, получим

$$\langle \Phi \rangle_m = Bm^{1/12}, \quad B \approx 2,$$

m в г. Таким образом, из (1) с учетом (7) получаем двумерное распределение осколков по массе и форме в виде аналитического выражения

$$f(m, \Phi) = f_1(m) \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(\Phi - Bm^{1/12})^2}{2\sigma^2} \right],$$

где безусловная плотность распределения по массе («спектр») берется в одной из форм (2), (3) или (4).

Безусловная плотность распределения по параметру формы определяется соотношением

$$\xi(\Phi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(m, \Phi) dm,$$

а математическое ожидание параметра формы для всего спектра осколков

$$\langle \Phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi \xi(\Phi) d\Phi.$$

Эти величины находятся с помощью численного интегрирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Одинцов В. А., Чудов Л. А. Расширение и разрушение оболочек под действием продуктов детонации // Проблемы динамики упругопластических сред.— М.: Мир, 1975.— С. 85—154.
2. Held M. Berechnung der Splittermassenverteilung von Splittermunition // Explosivstoffe.— 1968.— № 11.
3. Lamborn I. R., Bedford A. J., Walsh B. E. The fracture of steel cylinders at explosive strain rates. Mech. prop. high rates strain proc. conf.— Oxford, 1974.
4. Иванов А. Г., Минеев В. Н. О масштабных эффектах при разрушении // ФГВ.— 1979.— 15, № 5.
5. Степанов Г. В. Разрушение металлического кольца при импульсном нагружении // Проблемы прочности.— 1982.— № 6.
6. Колобанова А. Е. Расчет числа трещин и распределения их по размерам при импульсном вязком разрушении кольца // Там же.— 1989.— № 9.
7. Селиванов В. В., Соловьев В. С., Сысоев Н. Н. Ударные и детонационные волны. Методы исследования.— М.: Изд-во МГУ, 1990.— 256 с.
8. Одинцов В. А. Бимодальное распределение фрагментов цилиндров // ФГВ.— 1991.— 27, № 5.
9. Одинцов В. А. Взрывное разрушение цилиндра продольными трещинами как марковский случайный процесс.— Проблемы прочности.: Киев (в печати).
10. Одинцов В. А. Моделирование процессов фрагментации с помощью унифицированных цилиндров.— М.: Изд-во МГТУ, 1991.

г. Москва

Поступила в редакцию 5/V 1992