

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ПОТЕНЦИАЛЕ ТОЧЕЧНОГО СТОКА В ОДНОРОДНО-АНИЗОТРОПНОМ ПЛАСТЕ С ОСЕВОЙ СИММЕТРИЕЙ-И КОНЕЧНЫМ РАДИУСОМ КОНТУРА ПИТАНИЯ

Ю. И. Стклянин (Москва)

Потенциал точечного стока в радиальном неограниченном пласте с непроницаемыми кровлей и подошвой получен в работах [1-3]. Решения были получены в виде расходящихся рядов или интегралов. Маскет [1,2] путем преобразования полученных формул дает решения, пригодные для малых расстояний от оси стока, и другие, пригодные для больших расстояний. Эти решения с достаточной степенью точности дают распределение потенциала в ограниченном пласте при радиусе контура питания большем, чем удвоенная мощность пласта. В предлагаемой работе приводится точное решение указанной задачи, пригодное при любых соотношениях радиуса контура питания и мощности. Решение дано с учетом различия вертикальных и горизонтальных проницаемостей пласта.

Как известно [4,5], в области, содержащей источник или стоки, потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta \varphi = \psi(x, y, z) \tag{1}$$

Здесь Δ — оператор Лапласа, φ — потенциал, $\psi(x, y, z)$ — плотность источников как функция координат.

Рассмотрим приток к точечному источнику с координатами $r = 0, z = \zeta$, расположенному в круговом осесимметричном однородно-анизотропном пласте конечного радиуса (фиг. 1).

В этом случае уравнение (1) будет в виде [4,6]

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{\kappa^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = q \frac{\delta(r)}{2\pi r} \delta(z - \zeta), \quad \kappa^2 = \frac{k}{k_z} \tag{2}$$

где r — радиальная координата, z — вертикальная координата, q — мощность точечного стока, $\delta(x)$ — функция Дирака, k — горизонтальная проницаемость, k_z — проницаемость по вертикали. Будем считать кровлю ($z = 0$) и подошву ($z = H$) непроницаемыми, т. е.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = 0 \text{ и } z = H \tag{3}$$

На внешнем контуре ($r = R_0$) примем

$$\varphi = 0 \quad \text{при } r = R_0 \tag{4}$$

(если $\varphi|_{r=R_0} = \varphi_0$, то заменяя $\varphi = \varphi_1 + \varphi_0$ получим задачу (2), (4) для φ_1).

Задачу (2) — (4) будем решать методом интегральных преобразований. К (2) применим преобразование Ханкеля с конечными пределами ([4], стр. 105, 110)

$$\int_0^{R_0} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{\kappa^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) r J_0 \left(\frac{r}{R_0} \mu_i \right) dr = \left(\frac{1}{\kappa^2} \frac{d}{dz^2} - \frac{\mu_i^2}{R_0^2} \right) \varphi^*(z, \mu_i) \tag{5}$$

где μ_i — положительный корень уравнения $J_0(\mu_i) = 0$ ([7], стр. 298), $J_0(x)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка

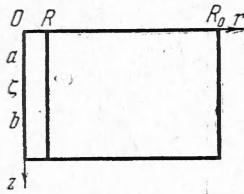
$$\varphi^*(z, \mu_i) = \int_0^{R_0} \varphi(z, r) J_0 \left(\frac{r}{R_0} \mu_i \right) r dr \tag{6}$$

Так как

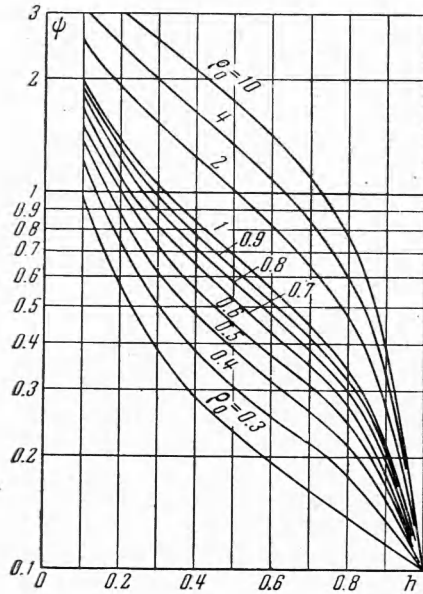
$$\int_0^{R_0} \frac{\delta(r)}{2\pi r} r J_0 \left(\frac{r}{R_0} \mu_i \right) dr = \frac{1}{2\pi}$$

то после преобразования уравнения и условия (2) — (4) примут вид

$$\left(\frac{1}{\kappa^2} \frac{d}{dz^2} - \frac{\mu_i^2}{R_0^2} \right) \varphi^* = \frac{q}{2\pi} \delta(z - \zeta), \quad \frac{d\varphi^*}{dz} = 0 \quad \text{при } z = 0 \text{ и } z = H \tag{7}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

К (7) применим косинус-преобразование Фурье с конечными пределами [4,8]

$$\int_0^H \varphi^* \cos \frac{n\pi z}{H} dz = \varphi^{**} \tag{8}$$

С учетом граничного условия (7)

$$\int_0^H \frac{d^2\varphi^*}{dz^2} \cos \frac{n\pi z}{H} dz = -\frac{n^2\pi^2}{H^2} \varphi^{**} \tag{9}$$

Так как

$$\int_0^H \delta(z - \zeta) \cos \frac{n\pi z}{H} dz = \cos \frac{n\pi \zeta}{H}$$

то из (7), получаем

$$\varphi^{**}(n, \mu_i) = -\frac{q \cos(n\pi \zeta / H)}{2\pi (n^2\pi^2 / \kappa^2 H^2 + \mu_i^2 / R_0^2)} \tag{10}$$

По найденной двойной трансформанте φ^{**} , дважды применяя формулу обращения [5, 8], найдем потенциал φ

$$\begin{aligned} \varphi(z, r) &= -\frac{2q}{HR_0^2} \sum_{i=1}^{\infty} \varphi^{**}(0, \mu_i) \frac{J_0(r\mu_i / R_0)}{J_1^2(\mu_i)} \\ &\quad - \frac{4q}{HR_0^2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{**}(n, \mu_i) \cos \frac{n\pi z}{H} \frac{J_0(r\mu_i / R_0)}{J_1^2(\mu_i)} = \\ &= -\frac{q}{\pi R_0^2} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{R_0^2}{H\mu_i^2} + \frac{2}{H} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{\cos[n\pi(z - \zeta) / H] + \cos[n\pi(z + \zeta) / H]}{n^2\pi^2 / \kappa^2 H^2 + \mu_i^2 / R_0^2} \right] \frac{J_0(r\mu_i / R_0)}{J_1^2(\mu_i)} \end{aligned} \tag{11}$$

где $J_1(x)$ — функция Бесселя первого рода первого порядка. Для ряда в квадратных скобках имеется формула обращения ([4], стр. 591, табл. VII), применяя ее, получим

$$\varphi(z, r) = -\frac{q\kappa}{2\pi R_0} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\text{ch}[\mu_i \kappa (H - |z - \zeta|) / R_0] + \text{ch}[\mu_i \kappa (H - z - \zeta) / R_0]}{\mu_i \text{sh}(\mu_i \kappa H / R_0)} \frac{J_0(r\mu_i / R_0)}{J_1^2(\mu_i)}$$

или

$$\varphi(y, \eta, \rho) = -\frac{q\kappa}{\pi R_0} \sum_i \frac{\text{ch}[\mu_i (1 - \eta) / \rho_0] \text{ch} \mu_i y / \rho_0}{\mu_i \text{sh} \mu_i / \rho_0} \frac{J_0(\rho \mu_i)}{J_1^2(\mu_i)} \tag{12}$$

$$\varphi(y, \eta, \rho) = \varphi(\eta, y, \rho) \tag{13}$$

где введены безразмерные координаты и параметры

$$y = z / H, \quad \rho = r / R_0, \quad \rho_0 = R_0 / \kappa H, \quad \eta = \zeta / H$$

Найдем потенциал для линии стоков. Будем теперь в (12), (13) считать, следуя фиг. 1 (где b — вскрытие)

$$\tilde{q} = \tilde{q}(\eta) = \begin{cases} q_0 & (0 \leq \eta \leq 1) \\ 0 & (h < \eta \leq 1) \end{cases} \quad \left(h = \frac{b}{H} \right) \tag{14}$$

Очевидно, что потенциал для линии стоков будет

$$\Phi = H \int_0^h \varphi(y, \eta, \rho) d\eta \tag{15}$$

где φ согласно (12), (14). Интегрируя (15), получим

$$\Phi_{y < h} = \frac{q_0}{\pi} \sum_i \left\{ \text{csch} \frac{\mu_i}{\rho_0} \text{ch} \frac{\mu_i y}{\rho_0} \frac{\text{sh} \mu_i (1 - h)}{\rho_0} - 1 \right\} \frac{J_0(\rho \mu_i)}{\mu_i^2 J_1^2(\mu_i)} \tag{16}$$

$$\Phi_{y > h} = -\frac{q_0}{\pi} \sum_i \frac{\text{ch}[\mu_i (1 - y) / \rho_0] \text{sh} \mu_i h / \rho_0}{\mu_i^2 \text{sh}(\mu_i / \rho_0)} \frac{J_0(\rho \mu_i)}{J_1^2(\mu_i)} \tag{17}$$

Рассмотрим ряд

$$S = -\frac{q}{\pi} \sum_i \frac{J_0(\rho \mu_i)}{\mu_i^2 J_1^2(\mu_i)} \tag{18}$$

для чего найдем трансформанту Ханкеля для функции $f(\rho) = \ln \rho$; получим

$$f^*(\mu_i) = \int_0^1 \rho \ln \rho J_0(\rho \mu_i) d\rho, \text{ или } f^* = -\frac{1}{\mu_i^2}$$

Следовательно (по формуле обращения [4], стр. 105),

$$\ln \rho = -2 \sum_i \frac{J_0(\rho \mu_i)}{\mu_i^2 J_1^2(\mu_i)} \quad (19)$$

С учетом (19) выражение (16) запишем в виде

$$\Phi = \frac{q_0}{2\pi} \ln \rho + \frac{q_0}{\pi} \sum_i \frac{\text{ch}(\mu_i y / \rho_0) \text{sh}[\mu_i(1-h)/\rho_0]}{\mu_i^2 \text{sh} \mu_i / \rho_0} \frac{J_0(\rho \mu_i)}{J_1^2(\mu_i)} \quad (20)$$

Найдем теперь расход, поступающий через линейный сток

$$Q = - \int_0^H 2\pi r \frac{\partial \Phi}{\partial r} dz = -2\pi r H \left[\int_0^h \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \Big|_{y < h} dy - \int_h^1 \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \Big|_{y > h} dy \right] = qhH$$

Таким образом,

$$\Phi - \Phi_0 = \mp \frac{Q}{2\pi h H} \left[\ln \rho + 2 \sum_i \frac{\text{ch}(\mu_i y / \rho_0) \text{sh}[\mu_i(1-h)/\rho_0]}{\mu_i^2 \text{sh} \mu_i / \rho_0} \frac{J_0(\rho \mu_i)}{J_1^2(\mu_i)} \right] \quad (21)$$

$$\Phi - \Phi_0 = \pm \frac{Q}{\pi h H} \sum_i \frac{\text{ch}[\mu_i(1-y)/\rho_0] \text{sh}(\mu_i h / \rho)}{\mu_i^2 \text{sh} \mu_i / \rho_0} \frac{J_0(\rho \mu_i)}{J_1^2(\mu_i)} \quad (22)$$

Здесь верхний знак для линии источников (нагнетательная скважина), нижний знак — для линии стоков (разгрузочная скважина). В (21), (22) для общности добавлена константа Φ_0 (теперь $\Phi = \Phi_0$ при $r = R_0$).

Рассмотрим приток к элементарному кольцу (фиг. 1). В этом случае потенциал Φ_1 будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \frac{1}{\kappa^2} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} = \frac{q}{2\pi} \delta(r - R) \delta(z - \zeta) \quad (23)$$

при граничных условиях (3), (4) (R — расстояние точек кольца от оси z). Решение этого уравнения совершенно аналогично вышеприведенному для потенциала точечного источника. Различие состоит лишь в том, что

$$\int_0^{R_0} \frac{r}{2\pi} \delta(r - R) J_0\left(\frac{r \mu_i}{R_0}\right) dr = \frac{R}{2\pi} J_0\left(\frac{R \mu_i}{R_0}\right) \quad (24)$$

Поэтому

$$\Phi_1^{**} = -\frac{q R J_0(R \mu_i / R_0)}{2\pi (n^2 \pi^2 / \kappa^2 H^2 + \mu_i^2 / R_0^2)} \cos n\pi \zeta / H \quad (25)$$

Следовательно, имеем $\omega = R / R_0$

$$\Phi_1 = -\frac{q \kappa \omega}{\pi} \sum_i \text{ch} \frac{\mu_i(1-\eta)}{\rho_0} \text{ch} \frac{\mu_i y}{\rho_0} \frac{J_0(\omega \mu_i) J_0(\rho \mu_i)}{\mu_i \text{sh}(\mu_i / \rho_0) J_1^2(\mu_i)} \quad (26)$$

$$\Phi_1 = -\frac{q \kappa \omega}{\pi} \sum_i \text{ch} \frac{\mu_i(1-y)}{\rho_0} \text{ch} \frac{\mu_i \eta}{\rho_0} \frac{J_0(\omega \mu_i) J_0(\rho \mu_i)}{\mu_i \text{sh}(\mu_i / \rho_0) J_1^2(\mu_i)} \quad (27)$$

Если теперь, аналогично потенциалу линии стоков, проинтегрировать (26), (27) по η от 0 до h , то получим несовершенную скважину с постоянной поверхностной плотностью стока. Поэтому имеем

$$\Phi_1 - \Phi_0 = \pm \frac{Q}{\pi h H} \sum_i \left[1 - \text{sh} \frac{\mu_i(1-h)}{\rho_0} \text{ch} \frac{\mu_i y}{\rho_0} \text{csch} \frac{\mu_i}{\rho_0} \right] \frac{J_0(\omega \mu_i) J_0(\rho \mu_i)}{\mu_i^2 J_1^2(\mu_i)} \quad (28)$$

$$\Phi_1 - \Phi_0 = \pm \frac{Q}{\pi h H} \sum_i \text{ch} \frac{\mu_i(1-y)}{\rho_0} \text{sh} \frac{\mu_i h}{\rho_0} \text{csch} \frac{\mu_i}{\rho_0} \frac{J_0(\omega \mu_i) J_0(\rho \mu_i)}{\mu_i^2 J_1^2(\mu_i)} \quad (29)$$

Как видно из (28) — (29) при $\rho = \omega$ потенциал на стенке кольца стоков зависит от y . За расчетный потенциал на стенке кольца Φ° возьмем среднее значение, т. е.

$$\Phi^\circ - \Phi_0 = \frac{1}{h} \int_0^h [\Phi - \Phi_0]_{\rho=\omega} dy \quad (30)$$

Интегрируя (28), получим

$$\Phi_{y < h} - \Phi_0 = \frac{Q}{\pi h H} \sum_i \left[i - \frac{\rho_0}{h \mu_i} \operatorname{sh} \frac{\mu_i (1-h)}{\rho_0} \operatorname{sh} \frac{\mu_i h}{\rho_0} \operatorname{csch} \frac{\mu_i}{\rho_0} \right] \frac{J_0^2(\omega \mu_i)}{\mu_i^2 J_1^2(\mu_i)} \quad (31)$$

Формулы (28), (29), (31) пригодны для расчета притока жидкости к несовершенному по величине вскрытия кольцу радиусом $R < R_0$, в частности и при $R = r_c$, где r_c — радиус скважины. Однако при $r_c \approx 0.1$ м и $R_0 \approx 100$ м, $\omega \approx 0.001$ и с достаточной степенью точности можно будет принять $J_0(\omega \mu_k) = 1$ для достаточно больших значений k , до которых ведется вычисление ряда и принять, что потенциал на стенке скважины Φ_c° будет (из формулы (21))

$$\Phi_c - \Phi_0 = \mp \frac{Q}{2\pi h H} \left\{ \ln \rho_c + 2 \sum_i \frac{\operatorname{ch}(\mu_i y / \rho_0) \operatorname{sh}[\mu_i (1-h) / \rho_0]}{\mu_i^2 \operatorname{sh}(\mu_i / \rho_0) J_1^2(\mu_i)} \right\} \quad (32)$$

или после усреднения

$$\Phi_c^\circ - \Phi_0 = + \frac{Q}{2\pi h H} [\ln \rho_c + \psi], \quad \psi(\rho_0, h) = \frac{2\rho_0}{h} \sum_i \frac{\operatorname{sh}(\mu_i h / \rho_0) \operatorname{sh}[\mu_i (1-h) / \rho_0]}{\mu_i^3 \operatorname{sh}(\mu_i / \rho_0) J_1^2(\mu_i)} \quad (33)$$

Графики функции $\psi(\rho_0, h)$ показаны на фиг. 2.

Автор признателен И. А. Чарному за совместное обсуждение статьи.

Поступила 30 X 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. M u s k a t M. Potential Distributions in Large Cylindrical Disks With Partially Penetrating Electrodes. Physics, may 1932, vol. 2
2. М а с к е т М. Течение однородных жидкостей в пористой среде (пер. с англ.). Гостехиздат, 1949.
3. П о л у б а р и н о в а - К о ч и н а П. Я. Теория движения грунтовых вод. Гостехиздат, 1952.
4. С н е д д о н К. Преобразования Фурье. ИИЛ, 1955.
5. И в а н е н к о Д. и С о к о л о в А. Классическая теория поля. М., 1951.
6. Ч а р н ы й И. А. Основы подземной гидравлики. М., Гостехиздат, 1956.
7. Я н к е и Э м д е. Таблицы функций. Физматгиз, 1959.
8. Т р а н т е р К. Дж. Интегральные преобразования в математической физике (пер. с англ.). М., Гостехиздат, 1956.

РАСЧЕТ НА ЭЛЕКТРОННОЙ СЧЕТНОЙ МАШИНЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ КОНТУРА НЕФТЕНОСНОСТИ, БЛИЗКОГО К ОКРУЖНОСТИ

В. В. Скворцов

(Казань)

Пусть некоторое сложное функциональное уравнение заменяется «приближенным» и в аналитическом виде находится его решение. Пусть, далее, оценка погрешности такой замены оказывается затруднительной, а решение приближенного уравнения обладает физически неочевидными свойствами. Тогда для проверки поведения решения исходного уравнения можно решить его численно на счетной машине и сравнить свойства полученных таким образом двух приближенных решений.

Ниже такой анализ проводится на примере решения одной задачи из теории фильтрации. Дается гидродинамическое истолкование полученных результатов.

Прослеживание за перемещением к одиночной скважине границы раздела нефти и воды — контура нефтеносности Γ — сводится [1] к решению задачи Коши для интегрально-дифференциального уравнения

$$f(\theta, t) f_t(\theta, t) - \frac{\lambda}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(v, t) f_t(v, t) \times \left(\lambda = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \right) \times \frac{f^2(\theta, t) - f(\theta, t) f(v, t) \cos(\theta - v) - f_0(\theta, t) f(v, t) \sin(\theta - v)}{f^2(\theta, t) - 2f(\theta, t) f(v, t) \cos(\theta - v) + f^2(v, t)} dv = \frac{\lambda - 1}{2} \quad (1)$$

Здесь $f(\theta, t)$ — расстояние от скважины до точки контура Γ , измеренное в момент t в направлении θ , а f_t и f_0 — производные по аргументам, указанным индексами: