

УДК 532.536

ПОДСЕТОЧНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ПРОТЕКАНИЯ В АНИЗОТРОПНОЙ ФРАКТАЛЬНОЙ СРЕДЕ

О. Н. Соболева, Е. П. Курочкина*

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
630090 Новосибирск

* Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mails: olga@nmsf.sccc.ru, kurochkina@itp.nsc.ru

Получены уравнения для эффективных коэффициентов случайных полей проводимости в стационарной задаче протекания во фрактальной анизотропной среде. Для полей предполагается логнормальная статистика. При решении задачи используется метод подсеточного моделирования. Результаты теоретических расчетов сравниваются с результатами прямого трехмерного численного моделирования. Установлено, что результаты численных и теоретических расчетов хорошо согласуются.

Ключевые слова: анизотропия, фрактальность, логарифмически нормальное распределение проводимости, эффективные коэффициенты, подсеточное моделирование.

Введение. Осадконакопление в достаточно спокойных условиях (в отсутствие антропогенных факторов или природных катастроф) приводит к тому, что природные неоднородные среды приобретают свойства слоистой системы. Поэтому представляет интерес исследование задач геоэлектрики и фильтрации в анизотропных средах. Как правило, решение таких задач основано на аналитическом или численном решении уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами для сред с различного рода регулярными неоднородностями — слоями. Однако для природных сред, особенностью которых является существенная неоднородность, решение задачи требует больших вычислительных затрат, и использование его для анализа и интерпретации результатов существенно затруднено. Обычно мелкомасштабные аномалии поля можно учесть с помощью эффективных коэффициентов, используя статистические подходы [1, 2]. Если размеры области, в которой решается задача, велики по сравнению с масштабом неоднородности, то эффективные коэффициенты внутри области слабо зависят от постановки граничной задачи. В этом случае для определения эффективных коэффициентов нужно учитывать члены высшего порядка в теории возмущений [1]. Для решения данной задачи используются методы полевой ренормализационной группы [3, 4] и метод подсеточного моделирования [5]. В настоящей работе с помощью метода подсеточного моделирования получены уравнения для эффективных коэффициентов в задаче протекания в анизотропной среде, когда проводимость в точке изотропна, а корреляционная функция поля анизотропна. Как правило, реальные пласты в осадочных породах обладают анизотропией именно такого рода.

Постановка задачи. Пусть локальный поток \mathbf{v} и поле \mathbf{h} связаны системой соотношений

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x})\mathbf{h}(\mathbf{x}), \quad \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{h}(\mathbf{x}) = -\nabla U(\mathbf{x}). \quad (1)$$

Если рассматривать задачу протекания постоянного электрического тока в неоднородной среде, то вектор \mathbf{v} представляет собой вектор плотности электрического тока, поле \mathbf{h} , опре-

деляемое потенциалом $U(\mathbf{x})$, — электрическое поле, локальная проводимость $\sigma(\mathbf{x})$ — случайное поле удельной электропроводности среды. Если же рассматривать задачу фильтрации однофазной жидкости в неоднородной среде при малых числах Рейнольдса, то вектор \mathbf{v} представляет собой вектор скорости фильтрации, \mathbf{h} — поле, определяемое градиентом давления: $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = -\nabla p(\mathbf{x})$, локальная проводимость $\sigma(\mathbf{x})$, равная отношению проницаемости к вязкости, — случайное поле, зависящее от координат. Давление и скорость связаны уравнением Дарси. Будем считать, что на границе Γ области V , в которой решаются уравнения (1), заданы некоторые граничные условия. Размеры области V велики по сравнению с масштабом неоднородности, поэтому формулы для эффективных коэффициентов внутри области слабо зависят от типа граничной задачи.

Для моделирования поля $\sigma(\mathbf{x})$ используется подход, подробно описанный в работе [5]. Поле физического параметра $\sigma(\mathbf{x})$ (проницаемости, пористости, электропроводности и т. д.) известно, если выполнено его измерение с некоторым шагом l_0 . Случайная функция пространственных координат $\sigma(\mathbf{x})$ рассматривается как предел параметра $\sigma_{l_0}(\mathbf{x})$. При $l_0 \rightarrow 0$ $\sigma_{l_0}(\mathbf{x}) \rightarrow \sigma(\mathbf{x})$. Аналогично [6, 7] в работе [5] рассматривается безразмерное поле ψ , равное отношению проводимостей, сглаженных по двум различным масштабам l, l' . Обозначим через $\sigma(\mathbf{x})_l$ сглаженный по масштабу l параметр $\sigma_{l_0}(\mathbf{x})$. Тогда $\psi(\mathbf{x}, l, l') = \sigma(\mathbf{x})_{l'}/\sigma(\mathbf{x})_l$, $l' < l$. При $l' \rightarrow l$ получается поле $\varphi(\mathbf{x}, l') = (\partial\psi(\mathbf{x}, l', l'y)/\partial y)|_{y=1}$, которое определяет все статистические свойства среды. В результате имеем уравнение

$$\frac{\partial \ln \sigma(\mathbf{x})_l}{\partial \ln l} = \varphi(\mathbf{x}, l). \quad (2)$$

Фактически мелкомасштабные флуктуации поля φ могут наблюдаться только в некотором конечном диапазоне масштабов $l_0 < l < L$. Решение уравнения (2) имеет вид

$$\sigma_{l_0}(\mathbf{x}) = \sigma_0 \exp \left(- \int_{l_0}^L \varphi(\mathbf{x}, l_1) \frac{dl_1}{l_1} \right), \quad (3)$$

где σ_0 — константа.

Согласно теореме о суммах независимых случайных полей [8], если дисперсия $\varphi(\mathbf{x}, l)$ в данной точке конечна, то при больших значениях L/l_0 интеграл в (3) стремится к значению, соответствующему полю с нормальным распределением вероятностей. Если дисперсия поля $\varphi(\mathbf{x}, l)$ бесконечна и существует невырожденное (не сосредоточенное в одной точке) предельное распределение суммы случайных величин, то это распределение является устойчивым. В данной работе предполагается, что поле $\varphi(\mathbf{x}, l)$ имеет нормальное распределение и однородную корреляционную функцию:

$$\langle \varphi(\mathbf{x}, l) \varphi(\mathbf{y}, l') \rangle - \langle \varphi(\mathbf{x}, l) \rangle \langle \varphi(\mathbf{y}, l') \rangle = \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, l, l') \delta(\ln l - \ln l') \quad (4)$$

(угловые скобки означают статистическое усреднение). Предполагается, что флуктуации поля φ в разных масштабах не коррелируют. Данное предположение, обычное для скейлинговых моделей, соответствует тому факту, что статистическая зависимость становится незначительной, если масштабы флуктуаций параметров различны по величине. Если среда автомодельная, то для любого положительного значения K выполняется условие

$$\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, l) = \Phi(K\mathbf{x} - K\mathbf{y}, Kl).$$

В соответствии с консервативным описанием каскада [7] для любого l должно выполняться равенство $\langle \sigma_l(\mathbf{x}) \rangle = \sigma_0$. Для таких полей, как поля пористости, это условие следует из их физического смысла, причем оно справедливо и для полей проницаемости и электропроводности, если принять эргодическую гипотезу, т. е. допустить возможность сглаживания

по большим объемам, эквивалентным статистическому усреднению. Из (3) для консервативного каскада следует

$$\left\langle \exp \left(- \int_{l_0}^L \varphi(\mathbf{x}, l_1) \frac{dl_1}{l_1} \right) \right\rangle = 1. \quad (5)$$

В частном случае некоррелированных флуктуаций поля φ разных масштабов (4) равенство (5) выполняется при условии

$$\Phi_0(l) = 2\langle \varphi(l) \rangle, \quad (6)$$

где $\Phi_0(l) = \Phi(0, l)$.

Подсеточное моделирование. Функцию проводимости $\sigma(\mathbf{x}) = \sigma_{l_0}(\mathbf{x})$ разделим на две компоненты в соответствии с масштабом l . Крупномасштабная компонента $\sigma(\mathbf{x}, l)$ получена статистическим усреднением по всем $\varphi(\mathbf{x}, l_1)$ при $l_1 < l$, мелкомасштабная равна $\sigma'(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x}) - \sigma(\mathbf{x}, l)$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \sigma(\mathbf{x}, l) &= \sigma_0 \exp \left(- \int_l^L \varphi(\mathbf{x}, l_1) \frac{dl_1}{l_1} \right) \left\langle \exp \left(- \int_{l_0}^l \varphi(\mathbf{x}, l_1) \frac{dl_1}{l_1} \right) \right\rangle, \\ \sigma'(\mathbf{x}) &= \sigma(\mathbf{x}, l) \left[\exp \left(- \int_{l_0}^l \varphi(\mathbf{x}, l_1) \frac{dl_1}{l_1} \right) / \left\langle \exp \left(- \int_{l_0}^l \varphi(\mathbf{x}, l_1) \frac{dl_1}{l_1} \right) \right\rangle - 1 \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Крупномасштабная (надсеточная) компонента $U(\mathbf{x}, l)$ представляет собой статистическое среднее решений системы (1), в которых крупномасштабная компонента $\sigma(\mathbf{x}, l)$ фиксирована, а мелкомасштабная σ' случайна, т. е. $U(\mathbf{x}, l) = \langle U(\mathbf{x}) \rangle$. Подсеточная компонента равна $U' = U(\mathbf{x}) - U(\mathbf{x}, l)$. Подставляя выражения для $U(\mathbf{x})$, $\sigma(\mathbf{x})$ в систему (1) и усредняя по мелкомасштабной компоненте, получим

$$\nabla[\sigma(\mathbf{x}, l)\nabla U(\mathbf{x}, l) + \langle \sigma'(\mathbf{x})\nabla U'(\mathbf{x}) \rangle] = 0. \quad (8)$$

В уравнении (8) неизвестное второе слагаемое нельзя отбросить без предварительной оценки, поскольку корреляция между проводимостью и градиентом потенциала может быть существенной [1]. Выбор вида второго слагаемого в (8) определяет подсеточную модель. Для оценки величины этого слагаемого используется теория возмущений. Пусть начальное значение масштаба l близко к наименьшему масштабу l_0 . Из системы (1), учитывая (8) и пренебрегая членами второго порядка малости, так же как в [5], получим подсеточное уравнение

$$\Delta U'(\mathbf{x}) = - \frac{1}{\sigma(\mathbf{x}, l)} \nabla \sigma'(\mathbf{x}) \nabla U(\mathbf{x}, l). \quad (9)$$

Поскольку незначительное изменение масштаба $\sigma(\mathbf{x}, l)$ вызывает значительные флуктуации самого поля (что характерно для фрактальных полей), можно считать, что само поле и его производные меняются медленнее, чем величина $\sigma'(\mathbf{x})$ и ее производные. Такие же предположения примем для поля $U(\mathbf{x}, l)$. В соответствии с методом подсеточного моделирования величины $\sigma(\mathbf{x}, l)$, $U(\mathbf{x}, l)$, входящие в правую часть уравнения (9), считаются известными. Поскольку значения $U'(\mathbf{x})$ на границе равны нулю, решение уравнения (9) имеет вид

$$U'(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\sigma(\mathbf{x}, l)} \left(\int_V \frac{1}{r} \nabla' \sigma'(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \right) \nabla U(\mathbf{x}, l), \quad (10)$$

где $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$; ∇' означает дифференцирование по переменной \mathbf{x}' . Величина $\nabla U(\mathbf{x}, l)$ вынесена из-под знака интеграла в соответствии с принятыми выше предположениями. Используя (10), для подсечного слагаемого в уравнении (8) получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \langle \sigma'(\mathbf{x}) \nabla_i U'(\mathbf{x}) \rangle &= \frac{1}{4\pi\sigma(\mathbf{x}, l)} \left\langle \sigma'(\mathbf{x}) \int_V \nabla_i \frac{1}{r} \nabla'_j \sigma'(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \right\rangle \nabla_j U(\mathbf{x}, l) = \\ &= -\frac{1}{4\pi\sigma(\mathbf{x}, l)} \int_V \nabla'_i \frac{1}{r} \nabla'_j \langle \sigma'(\mathbf{x}) \sigma'(\mathbf{x}') \rangle d\mathbf{x}' \nabla_j U(\mathbf{x}, l). \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь $\nabla_i = \partial/\partial x_i$; по повторяющимся индексам проводится суммирование от 1 до 3. При логнормальном распределении вероятностей проводимости из формулы (7) для статистических моментов следует, что при малом $dl = l - l_0$ справедливы равенства

$$\sigma(\mathbf{x}, l) = \sigma_l(\mathbf{x}) \left(1 - \langle \varphi \rangle \frac{dl}{l} + \frac{1}{2} \Phi_0(l) \frac{dl}{l} \right), \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \langle \sigma'(\mathbf{x}) \sigma'(\mathbf{x}') \rangle &= \sigma(\mathbf{x}, l)^2 \left\langle \exp \left(- \int_{l_0}^l (\varphi(\mathbf{x}, l_1) + \varphi(\mathbf{x}', l_1) - 2\langle \varphi \rangle + \Phi_0(l_1)) \frac{dl_1}{l_1} \right) - 1 \right\rangle \approx \\ &\approx \sigma(\mathbf{x}, l)^2 \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}', l) \frac{dl}{l}. \end{aligned} \quad (13)$$

Подставим (13) в (11):

$$\langle \sigma'(\mathbf{x}) \nabla_i U'(\mathbf{x}) \rangle = \eta_{ij} \sigma(\mathbf{x}, l) \nabla_j U(\mathbf{x}, l) \frac{dl}{l}, \quad \eta_{ij} = -\frac{1}{4\pi} \int_V \nabla'_i \frac{1}{r} \nabla'_j \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}', l) d\mathbf{x}'. \quad (14)$$

Интеграл по области V в формуле (14) заменим интегралом с бесконечными пределами, так как корреляционная функция, стоящая под интегралом, мала, если $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| > L$ ($L \ll L_0$; L_0 — наименьший размер области V ; L — наибольший масштаб неоднородностей). При такой замене ошибка значительна только в узкой области (размер которой равен радиусу корреляции) вблизи границы. Для вычисления интеграла (14) необходимо знать корреляционную функцию Φ . Определить вид корреляционной функции из экспериментальных данных или натуральных измерений достаточно сложно (см., например, [9, 10]). Для того чтобы получить представление о степени влияния вида корреляционной функции на эффективные коэффициенты, предлагаемые в данной работе, сравним между собой две корреляционные функции и часто используемую прямоугольную аппроксимацию корреляционных функций. Проводящую среду будем считать стратифицированной таким образом, что проводимость по координатам x_1, x_2 имеет одинаковые масштабы неоднородностей. Пусть вдоль осей x_1, x_2 масштаб равен $l_1 = \alpha_1 l$, вдоль оси x_3 — $l_2 = \alpha_2 l$ (α_1, α_2 — положительные константы). Одинаковые масштабы по двум осям рассматриваются для того, чтобы избежать громоздких вычислений и численного расчета эллиптических интегралов, которые возникают при интегрировании корреляционных функций для трехмерных структур. Рассмотрим корреляционную функцию

$$\Phi_1(\mathbf{x}, l) = \Phi_0(l) \exp \left(-\frac{\alpha_1^2}{l^2} [(x'_1 - x_1)^2 + (x'_2 - x_2)^2] - \frac{\alpha_2^2}{l^2} (x'_3 - x_3)^2 \right). \quad (15)$$

При $i = j$ ($i = 1, 2$), $\alpha_1 < \alpha_2$, $c^2 = (\alpha_2^2 - \alpha_1^2)/\alpha_1^2$ интеграл в (14) равен

$$\eta_{11} = \frac{c^2 + 1}{2c^2} \left(\frac{1}{c} \operatorname{arctg} c - \frac{1}{c^2 + 1} \right).$$

При $i \neq j$ интеграл равен нулю, поскольку в этом случае под интегралом стоит нечетная функция. При $i = j = 3$ интеграл равен

$$\eta_{12} = \frac{c^2 + 1}{c^2} \left(1 - \frac{1}{c} \operatorname{arctg} c \right).$$

При $i = j$ ($i = 1, 2$), $\alpha_1 > \alpha_2$, $c^2 = (\alpha_1^2 - \alpha_2^2)/\alpha_1^2$ интеграл в (14) равен

$$\eta_{11} = \frac{1 - c^2}{2c^2} \left(\frac{1}{2c} \ln \left(\frac{1 + c}{1 - c} \right) - \frac{1}{1 - c^2} \right),$$

при $i = j = 3$ —

$$\eta_{12} = \frac{1 - c^2}{c^2} \left(\frac{1}{2c} \ln \left(\frac{1 + c}{1 - c} \right) - 1 \right).$$

Используя полученные выражения для интегралов и формулу (12) и пренебрегая членами второго порядка малости по dl , получим оценку второго члена в надсеточном уравнении:

$$\begin{aligned} \langle \sigma'(\mathbf{x}) \nabla_i U'(\mathbf{x}) \rangle &\simeq \left(\frac{\Phi_0}{2} - \Phi_0 \eta_{11} - \langle \varphi \rangle \right) \frac{dl}{l} \langle \sigma_l(\mathbf{x}) \nabla_i U(\mathbf{x}, l) \rangle, \quad i = 1, 2, \\ \langle \sigma'(\mathbf{x}) \nabla_3 U'(\mathbf{x}) \rangle &\simeq \left(\frac{\Phi_0}{2} - \Phi_0 \eta_{12} - \langle \varphi \rangle \right) \frac{dl}{l} \langle \sigma_l(\mathbf{x}) \nabla_3 U(\mathbf{x}, l) \rangle. \end{aligned} \quad (16)$$

Подставляя (16) в (8) и устремляя dl к нулю, получим уравнения для расчета эффективного локального потока

$$\frac{d \ln \sigma_{0l}^1}{d \ln l} = \frac{\Phi_0}{2} - \Phi_0 \eta_{11} - \langle \varphi \rangle, \quad \frac{d \ln \sigma_{0l}^2}{d \ln l} = \frac{\Phi_0}{2} - \Phi_0 \eta_{12} - \langle \varphi \rangle. \quad (17)$$

При $\alpha_2 \rightarrow \alpha_1$ получим результат, соответствующий изотропному случаю: $\eta_{11} = \eta_{12} = 0,333$. При оценке можно не учитывать свойство масштабной инвариантности. Это означает, что функциями масштаба могут являться также коэффициенты α_1, α_2 . Если среда масштабно-инвариантная, то решение уравнений (17) имеет вид

$$\sigma_{0l}^1 = \sigma_{0L}(l/L)^{\Phi_0/2 - \Phi_0 \eta_{11} - \langle \varphi \rangle}, \quad \sigma_{0l}^2 = \sigma_{0L}(l/L)^{\Phi_0/2 - \Phi_0 \eta_{12} - \langle \varphi \rangle}. \quad (18)$$

Рассмотрим вторую анизотропную корреляционную функцию проводимости [10]:

$$\Phi_2(\mathbf{x}, l) = \Phi_0 \exp \left(- \frac{\alpha_1}{l} \sqrt{(x'_1 - x_1)^2 + (x'_2 - x_2)^2} - \frac{\alpha_2}{l} |x'_3 - x_3| \right). \quad (19)$$

Для функции (19) интеграл в (14) равен

$$\begin{aligned} \eta_{21} &= \frac{\sqrt{c^2 - 1}}{4c^3} \left(2 \ln (c + \sqrt{c^2 - 1}) + \ln \frac{c + 1}{c - 1} \right) - \frac{\sqrt{c^2 - 1} (1 - \sqrt{c^2 - 1})}{2c^2}, \\ \eta_{22} &= - \frac{\sqrt{c^2 - 1}}{2c^3} \left(2 \ln (c + \sqrt{c^2 - 1}) + \ln \frac{c + 1}{c - 1} \right) + \frac{1 + \sqrt{c^2 - 1}}{c^2}. \end{aligned}$$

Здесь $c^2 = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)/\alpha_2^2$. При $\alpha_2 \rightarrow \alpha_1$ $\eta_{21} = 0,312$, $\eta_{22} = 0,377$, т. е. анизотропия сохраняется. Поскольку определить вид корреляционной функции по экспериментальным данным достаточно сложно, в некоторых случаях используется аппроксимация корреляционной функции [1]:

$$\Phi_3(\mathbf{x}, l) = \begin{cases} \Phi_0, & |x_i| \leq l/\alpha_i, \quad i = 1, \dots, 3, \\ 0, & |x_i| > l/\alpha_i. \end{cases} \quad (20)$$

Таблица 1

Зависимость параметров η_{ij} от отношения α_1/α_2

α_1/α_2	η_{11}/η_{12}	η_{21}/η_{22}	η_{31}/η_{32}
0,01	0,008/0,985	0,022/0,957	0,005/0,991
0,05	0,037/0,926	0,070/0,861	0,023/0,955
0,25	0,148/0,704	0,179/0,642	0,110/0,781
0,50	0,236/0,527	0,244/0,511	0,205/0,590
1,00	0,333/0,333	0,312/0,377	0,333/0,333
5,00	0,472/0,056	0,432/0,136	0,488/0,025
10,00	0,490/0,020	0,461/0,078	0,497/0,006
20,00	0,497/0,007	0,479/0,043	0,499/0,002

Функцию Φ_3 не всегда можно использовать для аппроксимации корреляционной функции, поскольку при определенных значениях частот ее спектральная плотность принимает отрицательные значения. Функция $\Phi_3(\mathbf{x}, l)$ не является изотропной, так как при равенстве всех коэффициентов α_i параллелепипед переходит в куб. Для аппроксимации (20) вычислим интеграл в (14):

$$\eta_{31} = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\alpha_1}{\sqrt{2\alpha_2^2 + \alpha_1^2}}, \quad \eta_{32} = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1 \sqrt{2\alpha_2^2 + \alpha_1^2}}.$$

При $\alpha_1 = \alpha_2$ имеем $\eta_{31} = \eta_{32} = 0,333$. Таким образом, получен результат, соответствующий изотропному случаю, несмотря на то что используемая функция является анизотропной. Значения параметров η_{ij} , вычисленные в зависимости от отношения α_1/α_2 , свидетельствуют о том, что средний локальный поток несущественно зависит от вида корреляционной функции (табл. 1). Из табл. 1 следует, что результаты расчетов с использованием всех функций Φ_i близки, за исключением области, в которой значения η_{ij} малы. Однако для этой области поправки при оценке среднего локального потока пренебрежимо малы. Таким образом, эффективные коэффициенты в основном зависят от масштаба корреляций по различным координатным осям.

Найдем эффективные коэффициенты для оценки тензора вторых статистических одноточечных моментов поля \mathbf{h} . В точке \mathbf{x} компоненты тензора второго статистического момента равны

$$\langle h_n(\mathbf{x})h_j(\mathbf{x}) \rangle = \nabla_n U(\mathbf{x}, l) \nabla_j U(\mathbf{x}, l) + \langle \nabla_n U'(\mathbf{x}) \nabla_j U'(\mathbf{x}) \rangle. \quad (21)$$

Оценим второй член в (21). Обозначим $r_1 = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$, $r_2 = |\mathbf{x} - \mathbf{x}''|$. Используя формулу (9), получим компоненты корреляционного тензора для $\nabla U'$:

$$\langle \nabla_n U'(\mathbf{x}) \nabla_j U'(\mathbf{x}) \rangle = I \nabla_m U(\mathbf{x}, l) \nabla_k U(\mathbf{x}, l) \frac{dl}{l}, \quad (22)$$

$$I = \frac{1}{16\pi^2} \iint \nabla'_n \frac{1}{r_1} \nabla''_j \frac{1}{r_2} \nabla'_m \nabla''_k \Phi(\mathbf{x}'' - \mathbf{x}', l) d\mathbf{x}'' d\mathbf{x}'.$$

Вычислив интеграл в (22) при $n = j$ с использованием корреляционной функции (15), для второго статистического момента поля $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ получим

$$\begin{bmatrix} \langle h_1(\mathbf{x})^2 \rangle \\ \langle h_2(\mathbf{x})^2 \rangle \\ \langle h_3(\mathbf{x})^2 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(\mathbf{x}, l)^2 \\ h_2(\mathbf{x}, l)^2 \\ h_3(\mathbf{x}, l)^2 \end{bmatrix} + \Phi_0(l) \frac{dl}{l} A_1 \begin{bmatrix} h_1(\mathbf{x}, l)^2 \\ h_2(\mathbf{x}, l)^2 \\ h_3(\mathbf{x}, l)^2 \end{bmatrix}, \quad (23)$$

где матрица A_1 при $\alpha_1 < \alpha_2$, $c^2 = (\alpha_2^2 - \alpha_1^2)/\alpha_1^2$, $b = \text{arctg } c$ равна

$$A_1 = \begin{bmatrix} \frac{3(c^2 - 3)(c^2 + 1)}{16c^5} b + \frac{3(c^2 + 3)}{16c^4} & \frac{(c^2 - 3)(c^2 + 1)}{16c^5} b + \frac{c^2 + 3}{16c^4} & \frac{(c^2 + 3)(c^2 + 1)}{4c^5} b - \frac{3(1 + c^2)}{4c^4} \\ \frac{(c^2 - 3)(c^2 + 1)}{16c^5} b + \frac{c^2 + 3}{16c^4} & \frac{3(c^2 - 3)(c^2 + 1)}{16c^5} b + \frac{3(c^2 + 3)}{16c^4} & \frac{(c^2 + 3)(c^2 + 1)}{4c^5} b - \frac{3(1 + c^2)}{4c^4} \\ \frac{(c^2 + 3)(c^2 + 1)}{4c^5} b - \frac{3(1 + c^2)}{4c^4} & \frac{(c^2 + 3)(c^2 + 1)}{4c^5} b - \frac{3(1 + c^2)}{4c^4} & -\frac{3(c^2 + 1)^2}{2c^5} b + \frac{(c^2 + 1)(2c^2 + 3)}{2c^4} \end{bmatrix},$$

а при $\alpha_1 > \alpha_2$, $c^2 = (\alpha_1^2 - \alpha_2^2)/\alpha_1^2$, $b = \ln((1 + c)/(1 - c))$ —

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\frac{3(1 - c^2)(c^2 + 3)}{32c^5} b - \frac{3(c^2 - 3)}{16c^4} & -\frac{(1 - c^2)(c^2 + 3)}{32c^5} b - \frac{c^2 - 3}{16c^4} & \frac{(1 - c^2)(3 - c^2)}{8c^5} b - \frac{3(1 - c^2)}{4c^4} \\ -\frac{(1 - c^2)(c^2 + 3)}{32c^5} b - \frac{c^2 - 3}{16c^4} & -\frac{3(1 - c^2)(c^2 + 3)}{32c^5} b - \frac{3(c^2 - 3)}{16c^4} & \frac{(1 - c^2)(3 - c^2)}{8c^5} b - \frac{3(1 - c^2)}{4c^4} \\ \frac{(1 - c^2)(3 - c^2)}{8c^5} b - \frac{3(1 - c^2)}{4c^4} & \frac{(1 - c^2)(3 - c^2)}{8c^5} b - \frac{3(1 - c^2)}{4c^4} & -\frac{3(1 - c^2)^2}{4c^5} b - \frac{(1 - c^2)(2c^2 - 3)}{2c^4} \end{bmatrix}.$$

Матрица A_1 является симметричной, поэтому имеет действительные собственные значения λ_i и независимые собственные векторы. В уравнении (23) выполним замену переменных $u_i(\mathbf{x}, l) = Th_i^2(\mathbf{x}, l)$ (T — преобразование, которое приводит матрицу A_1 к диагональному виду). Так же как и при оценке среднего локального потока, учитывая соотношение (12), получим уравнение

$$\frac{d \ln \hat{\sigma}_l^i}{d \ln l} = \Phi_0 + \lambda_i \Phi_0 - 2\langle \varphi \rangle.$$

Следовательно, для масштабно-инвариантной среды компоненты вектора $u_i(\mathbf{x}, l)$ вычисляются по формуле

$$u_i(\mathbf{x}) = (l/L)^{\Phi_0 + \lambda_i \Phi_0 - 2\langle \varphi \rangle} u_i(\mathbf{x}, l).$$

Применяя к вектору \mathbf{u} обратное преобразование T^{-1} , получим оценку для $\langle h(\mathbf{x})^2 \rangle$.

Оценим величину $\langle h_n(\mathbf{x})h_j(\mathbf{x}) \rangle$ с использованием корреляционной функции Φ_1 , если $n \neq j$. При $\alpha_1 < \alpha_2$ интеграл в (22) равен

$$\eta_{112} = \frac{c^2 + 3}{8c^4} + \frac{(c^2 - 3)(c^2 + 1)}{8c^5} \text{arctg } c, \quad \eta_{113} = -\frac{3(c^2 + 1)}{4c^4} + \frac{(c^2 + 1)(3 + c^2)}{4c^5} \text{arctg } c,$$

а при $\alpha_1 > \alpha_2$ —

$$\eta_{112} = \frac{3 - c^2}{16c^4} - \frac{(1 - c^2)(c^2 + 3)}{32c^5} \ln \left(\frac{1 + c}{1 - c} \right), \quad \eta_{113} = \frac{(3 - c^2)(1 - c^2)}{8c^5} \ln \left(\frac{1 + c}{1 - c} \right) - \frac{3(1 - c^2)}{4c^4},$$

$\eta_{123} = \eta_{113}$. При $n \neq j$ уравнения для эффективных коэффициентов для элементов тензора второго статистического момента вектора $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ имеют вид

$$\frac{d \ln \hat{\sigma}_l^1}{d \ln l} = \Phi_0 + \eta_{112} \Phi_0 - 2\langle \varphi \rangle, \quad \frac{d \ln \hat{\sigma}_l^2}{d \ln l} = \Phi_0 + \eta_{113} \Phi_0 - 2\langle \varphi \rangle.$$

В случае если среда масштабно-инвариантная, зависимости оценок элементов тензора второго статистического момента вектора $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ от масштаба являются степенными:

$$\langle h_1(\mathbf{x})h_2(\mathbf{x}) \rangle \sim (l/L)^{\Phi_0 + \eta_{112} \Phi_0 - 2\langle \varphi \rangle} h_1(\mathbf{x}, l)h_2(\mathbf{x}, l),$$

$$\langle h_1(\mathbf{x})h_3(\mathbf{x}) \rangle = \langle h_2(\mathbf{x})h_3(\mathbf{x}) \rangle \sim (l/L)^{\Phi_0 + \eta_{113} \Phi_0 - 2\langle \varphi \rangle} h_2(\mathbf{x}, l)h_3(\mathbf{x}, l).$$

В случае аппроксимации корреляционной функции $\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}', l)$ функцией (20) в уравнении (23) для компонент тензора второго статистического момента вектора \mathbf{h} при $n = j$ матрица равна

$$A_2 = \begin{bmatrix} -\frac{3c^2 - 2}{2\pi c^2 \sqrt{2c^2 - 1}} + \frac{2}{\pi} b & \frac{1}{2\pi \sqrt{2c^2 - 1}} & \frac{c^2 - 1}{\pi c^2 \sqrt{2c^2 - 1}} \\ \frac{1}{2\pi \sqrt{2c^2 - 1}} & -\frac{3c^2 - 2}{2\pi c^2 \sqrt{2c^2 - 1}} + \frac{2}{\pi} b & \frac{c^2 - 1}{\pi c^2 \sqrt{2c^2 - 1}} \\ \frac{c^2 - 1}{\pi c^2 \sqrt{2c^2 - 1}} & \frac{c^2 - 1}{\pi c^2 \sqrt{2c^2 - 1}} & -\frac{2(c^2 - 1)}{\pi c^2 \sqrt{2c^2 - 1}} + \frac{2}{\pi} b \end{bmatrix}.$$

Здесь $b = \arctg(1/\sqrt{2c^2 - 1})$; $c^2 = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)/\alpha_1^2$. При $\alpha_1 = \alpha_2$ элементы матрицы на главной диагонали равны 0,15, внедиагональные элементы равны $9,2 \cdot 10^{-2}$. Для инварианта тензора

$\sum_{i=1}^3 \langle h_i(\mathbf{x})^2 \rangle$ получаем ту же формулу, что и для изотропного поля:

$$\sum_{i=1}^3 \langle h_i(\mathbf{x})^2 \rangle \approx \left(1 + \Phi_0 \frac{dl}{3l}\right) \sum_{i=1}^3 h_i(\mathbf{x}, l)^2.$$

Несмотря на то что инвариант тензора не изменился, диагональные элементы матрицы A_2 уменьшились приблизительно в 1,3 раза за счет увеличения внедиагональных элементов. Слабая анизотропия корреляционной функции Φ_3 приводит к некоторому выравниванию дисперсии компонент вектора \mathbf{h} . При $i \neq j$ для элементов тензора имеем

$$\langle h_1(\mathbf{x})h_2(\mathbf{x}) \rangle \approx \left(1 + \frac{1}{2\pi \sqrt{2c^2 - 1}} \Phi_0 \frac{dl}{l}\right) h_1(\mathbf{x}, l)h_2(\mathbf{x}, l),$$

$$\langle h_1(\mathbf{x})h_3(\mathbf{x}) \rangle \approx \left(1 + \frac{c^2 - 1}{2\pi c^2 \sqrt{2c^2 - 1}} \Phi_0 \frac{dl}{l}\right) h_1(\mathbf{x}, l)h_3(\mathbf{x}, l).$$

Следовательно,

$$\frac{d \ln \hat{\sigma}_l^1}{d \ln l} = \left(1 + \frac{1}{2\pi \sqrt{2c^2 - 1}}\right) \Phi_0 - 2\langle \varphi \rangle, \quad \frac{d \ln \hat{\sigma}_l^2}{d \ln l} = \left(1 + \frac{c^2 - 1}{2\pi c^2 \sqrt{2c^2 - 1}}\right) \Phi_0 - 2\langle \varphi \rangle.$$

В табл. 2 приведены элементы матриц $A_1(a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{33})$ и $A_2(\hat{a}_{11}, \hat{a}_{12}, \hat{a}_{13}, \hat{a}_{33})$ в зависимости от отношения α_1/α_2 .

Таблица 2

Зависимость элементов матриц A_1, A_2 от отношения α_1/α_2

α_1/α_2	a_{11}/\hat{a}_{11}	a_{12}/\hat{a}_{12}	a_{13}/\hat{a}_{13}	a_{33}/\hat{a}_{33}
0,01	0,003/0,001	0,001/0,001	0,004/0,002	0,977/0,986
0,05	0,015/0,006	0,005/0,006	0,017/0,011	0,891/0,933
0,25	0,069/0,029	0,023/0,027	0,056/0,052	0,592/0,676
0,50	0,125/0,067	0,042/0,053	0,070/0,084	0,387/0,421
1,00	0,200/0,150	0,066/0,092	0,066/0,092	0,200/0,150
5,00	0,340/0,323	0,113/0,153	0,019/0,012	0,017/0,001
10,00	0,362/0,336	0,121/0,157	0,008/0,003	0,005/0
20,00	0,370/0,340	0,123/0,159	0,003/0,001	0,001/0

Оценим корреляционный тензор локального потока \mathbf{v} . Одноточечный второй статистический момент локального потока равен

$$\begin{aligned} \langle v_i(\mathbf{x})v_k(\mathbf{x}) \rangle &= \sigma(\mathbf{x}, l)^2 \nabla_i U(\mathbf{x}, l) \nabla_k U(\mathbf{x}, l) + \sigma(\mathbf{x}, l)^2 \langle \nabla_k U'(\mathbf{x}) \nabla_i U'(\mathbf{x}) \rangle + \\ &+ \langle \sigma'(\mathbf{x})^2 \rangle \nabla_k U(\mathbf{x}, l) \nabla_i U(\mathbf{x}, l) + 2 \langle \sigma'(\mathbf{x}) \nabla_k U'(\mathbf{x}) \rangle v_i(\mathbf{x}, l) + 2 \nabla_k U(\mathbf{x}, l) \langle \sigma'(\mathbf{x}) \nabla_i U'(\mathbf{x}) \rangle + \\ &+ \langle \sigma'(\mathbf{x})^2 \nabla_i U'(\mathbf{x}) \nabla_k U'(\mathbf{x}) \rangle + 2\sigma(\mathbf{x}, l) \langle \sigma'(\mathbf{x}) \nabla_k U'(\mathbf{x}) \nabla_i U'(\mathbf{x}) \rangle + \\ &+ \langle \sigma'(\mathbf{x})^2 \nabla_k U'(\mathbf{x}) \rangle \nabla_i U(\mathbf{x}, l) + \langle \sigma'(\mathbf{x})^2 \nabla_i U'(\mathbf{x}) \rangle \nabla_k U(\mathbf{x}, l). \end{aligned} \quad (24)$$

Оценка второго члена в (24) следует из вычисленной выше оценки второго момента \mathbf{h} , оценка третьего члена — из формул (12), (13), оценку четвертого и пятого членов можно получить, вычислив интеграл в (14). Остальные слагаемые равны нулю с точностью до членов второго порядка малости по dl . Используя (13), (16), (22), (24), для компонент тензора при $i \neq j$ и корреляционной функции (15) получим

$$\begin{bmatrix} \langle v_1(\mathbf{x})^2 \rangle \\ \langle v_2(\mathbf{x})^2 \rangle \\ \langle v_3(\mathbf{x})^2 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1(\mathbf{x}, l)^2 \\ v_2(\mathbf{x}, l)^2 \\ v_3(\mathbf{x}, l)^2 \end{bmatrix} + \Phi_0(l) \frac{dl}{l} A_3 \begin{bmatrix} v_1(\mathbf{x}, l)^2 \\ v_2(\mathbf{x}, l)^2 \\ v_3(\mathbf{x}, l)^2 \end{bmatrix}.$$

При $\alpha_1 < \alpha_2$ матрица A_3 равна

$$A_3 = \begin{bmatrix} -\frac{(29c^2+9)(c^2+1)}{16c^5} b + \frac{w}{16c^4} & \frac{(c^2-3)(c^2+1)}{16c^5} b + \frac{c^2+3}{16c^4} & \frac{(c^2+3)(c^2+1)}{4c^5} b - \frac{3(1+c^2)}{4c^4} \\ \frac{(c^2-3)(c^2+1)}{16c^5} b + \frac{c^2+3}{16c^4} & -\frac{(29c^2+9)(c^2+1)}{16c^5} b + \frac{w}{16c^4} & \frac{(c^2-3)(c^2+1)}{4c^5} b - \frac{3(1+c^2)}{4c^4} \\ \frac{(c^2-3)(c^2+1)}{4c^5} b - \frac{3(1+c^2)}{4c^4} & \frac{(c^2-3)(c^2+1)}{4c^5} b - \frac{3(1+c^2)}{4c^4} & \frac{(c^2+1)(5c^2-3)}{2c^5} b - \frac{w_1}{2c^4} \end{bmatrix}.$$

Здесь $b = \arctg c$; $w = 16c^4 + 35c^2 + 9$; $w_1 = 4c^4 + 3c^2 - 3$.

При $\alpha_1 > \alpha_2$

$$A_3 = \begin{bmatrix} \frac{(29c^2-9)(1-c^2)}{32c^5} b + \frac{w}{16c^4} & -\frac{(c^2+3)(1-c^2)}{32c^5} b - \frac{c^2-3}{16c^4} & -\frac{(c^2-3)(1-c^2)}{8c^5} b - \frac{3(1-c^2)}{4c^4} \\ -\frac{(c^2+3)(1-c^2)}{32c^5} b - \frac{c^2-3}{16c^4} & \frac{(29c^2-9)(1-c^2)}{32c^5} b + \frac{w}{16c^4} & -\frac{(c^2-3)(1-c^2)}{8c^5} b - \frac{3(1-c^2)}{4c^4} \\ -\frac{(c^2-3)(1-c^2)}{8c^5} b - \frac{3(1-c^2)}{4c^4} & -\frac{(c^2-3)(1-c^2)}{8c^5} b - \frac{3(1-c^2)}{4c^4} & -\frac{(1-c^2)(5c^2+3)}{4c^5} b - \frac{w_1}{2c^4} \end{bmatrix}.$$

Здесь $b = \ln((1+c)/(1-c))$; $w = 16c^4 - 35c^2 + 9$; $w_1 = 4c^4 - 3c^2 - 3$.

Далее используется тот же подход, что и для оценки второго статистического момента вектора \mathbf{h} . Матрица A_3 приводится к диагональному виду. В масштабно-инвариантной среде зависимость эффективных коэффициентов от масштаба для линейных комбинаций $u_m = t_{mk} v_k(\mathbf{x})^2$ является степенной (t_{mk} — элементы матрицы, образованной из собственных векторов матрицы A_3). При этом показатели степени зависят от собственных значений λ_m матрицы A_3 . Применяя обратное линейное преобразование к векторам u_m , получим оценку для $\langle v_k(\mathbf{x})^2 \rangle$. Из (13), (16), (22), (24) следует, что при $i \neq j$ компоненты корреляционного тензора, вычисленного с использованием корреляционной функции (15), равны

$$\begin{aligned} \langle v_1(\mathbf{x})v_2(\mathbf{x}) \rangle &= \left(1 + \Phi_0(\eta_{112} + 1 - 4\eta_{11}) \frac{dl}{l}\right) v_1(\mathbf{x}, l)v_2(\mathbf{x}, l), \\ \langle v_1(\mathbf{x})v_3(\mathbf{x}) \rangle &= \left(1 + \Phi_0(\eta_{113} + 1 - 4\eta_{12}) \frac{dl}{l}\right) v_1(\mathbf{x}, l)v_3(\mathbf{x}, l). \end{aligned} \quad (25)$$

При $dl \rightarrow 0$ из (25) следует, что эффективные коэффициенты удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d \ln(\hat{\sigma}_{0l}^1)^2}{d \ln l} = 2\Phi_0 + \eta_{112}\Phi_0 - 4\eta_{11}\Phi_0 - 2\langle\varphi\rangle,$$

$$\frac{d \ln(\hat{\sigma}_{0l}^2)^2}{d \ln l} = 2\Phi_0 + \eta_{113}\Phi_0 + 4\eta_{12}\Phi_0 - 2\langle\varphi\rangle.$$

Численное моделирование. Для проверки приведенных выше формул, как и в изотропном случае, задача решается в единичном кубе с единичным скачком потенциала при $\sigma_0 = 1$. Расчеты проводятся для двух вариантов граничных условий:

1. На гранях куба $y = 0$, $y = L_0$ задается постоянный потенциал: $U(x, y, z)|_{y=0} = U_1$, $U(x, y, z)|_{y=L_0} = U_2$, $U_1 > U_2$. Потенциал на других гранях куба задается линейной зависимостью по y : $U = U_1 + (U_2 - U_1)y/L_0$. В этом случае наибольшая компонента локального потока направлена вдоль оси y , средние значения компонент v_x , v_z равны нулю.

2. На гранях куба $z = 0$, $z = L_0$ задается постоянный потенциал, на других гранях потенциал задается линейной зависимостью по z : $U = U_1 + (U_2 - U_1)z/L_0$. Компонента локального потока вдоль оси z является наибольшей, средние значения компонент v_x , v_y равны нулю.

В расчетах используются безразмерные переменные. Сетка по пространственным переменным — $256 \times 256 \times 256$. Поле проводимости моделируется по формуле (3), которая заменяется конечно-разностным аналогом

$$\sigma(\mathbf{x})_l = \exp\left(-\ln 2 \int_{\log_2 l}^{\log_2 L} \varphi(\mathbf{x}, \tau) d\tau\right) \approx 2^{-\sum_{i=-8}^0 \varphi(\mathbf{x}, \tau_i) \Delta\tau}. \quad (26)$$

Здесь $\tau = \log_2 l$, $\tau_i = \log_2 l_i$ (логарифм по основанию 2 введен для удобства); шаг по масштабу $\Delta\tau = 1$. В расчетах использовалось три масштаба: $\tau_1 = -6$, $\tau_2 = -5$, $\tau_3 = -4$. Два первых и три последних слагаемых в сумме формулы (26) равны нулю. Для численного моделирования применяется алгоритм “по строкам и столбцам”, приведенный в [11]. Используется масштабно-инвариантная корреляционная функция нормального случайного поля

$$\Phi_1^*(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \tau_j) = \frac{\Phi_0}{\ln 2} \exp\left(-\frac{\alpha_1^2(x_1 - y_1)^2 + \alpha_1^2(x_2 - y_2)^2 + \alpha_2^2(x_3 - y_3)^2}{2^{2\tau_j}}\right). \quad (27)$$

Рассматриваются две модели среды: 1) по осям x , y предполагаются крупные масштабы неоднородностей, по оси z — мелкие; $\alpha_1/\alpha_2 = 0,25$; 2) по осям x , y предполагаются мелкие масштабы неоднородностей, по оси z — крупные; $\alpha_1/\alpha_2 = 4$. Все результаты получены при значениях параметров $\Phi_0 = 0,3$, $\langle\varphi\rangle = 0,15$, т. е. рассматривается консервативный каскад (6). На рис. 1 приведены результаты численного моделирования анизотропного поля по формуле (26) (первая модель среды).

Численно рассчитываемый средний локальный поток \mathbf{v} в диапазоне масштабов (l, L) сравнивается со средним потоком, полученным по теоретическим формулам для того же диапазона масштабов, при этом $l \rightarrow l_0$. Эффективная проводимость должна давать истинный средний локальный поток в диапазоне (L, l) . Поскольку проводимость (26) масштабно-инвариантна, зависимости средних локальных потоков от масштаба являются степенными. Фактически проверяются показатели степени в формуле (18). Для проверки точности эффективных коэффициентов (18) приводятся зависимости логарифма средних значений компонент локального потока от масштаба обрезки. Численные расчеты показали, что для замены статистического усреднения усреднением по пространству при $\alpha_1/\alpha_2 = 0,25$

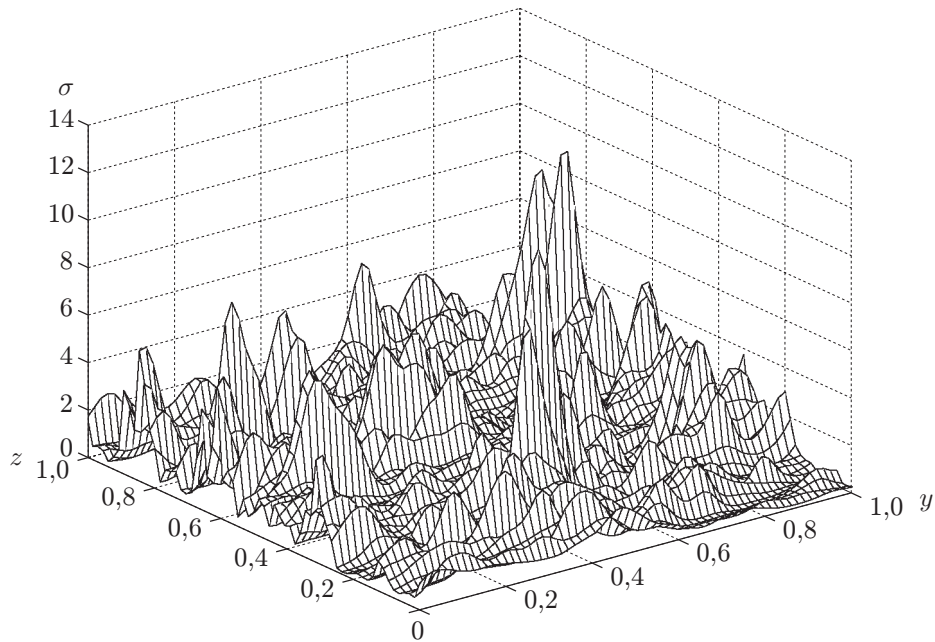


Рис. 1. Поле проводимости σ (численное моделирование по формуле (26)) для трех масштабов в среднем сечении ($x = 0,5$, $\Phi_0 = 0,3$, $\langle \varphi \rangle = 0,15$, $\alpha_1/\alpha_2 = 0,25$)

и $\alpha_1/\alpha_2 = 4$ размер куба недостаточно велик (в обоих случаях максимальный масштаб равен $1/4$), поэтому использовалось дополнительное усреднение по ансамблю Гиббса. Генерация коэффициента и решение задачи выполнялись 80 раз с последующим усреднением по пространству. При выбранных параметрах задачи этого оказалось достаточно. Для численного решения системы (1) использовался метод итераций. На рис. 2–7 по оси абсцисс отложено число слагаемых k в сумме, стоящей в показателе степени формулы (26) (т. е. количество масштабов, используемых для моделирования σ). Для сравнения средних локальных потоков и вторых статистических моментов в изотропном и анизотропном случаях на рис. 2–7 приведены результаты для изотропного случая.

На рис. 2, 3 приведены зависимости логарифма средних значений компонент локального потока от количества масштабов для первой и второй моделей среды. Уменьшение локального потока при увеличении числа масштабов в среде объясняется увеличением площади контактной поверхности между областями среды с различной проводимостью, вследствие чего увеличивается сопротивление течению. По той же причине увеличивается дисперсия локального потока и поля \mathbf{h} . Для обеих моделей среды при различных направлениях течения результаты численного и теоретического расчетов хорошо согласуются. Для вариантов течения, соответствующих рис. 2,а, 3,б, погрешность оценки среднего локального потока для трех масштабов не превышает 1 %, для вариантов течения, соответствующих рис. 3,а, 2,б, — 8,8 и 4,2 % соответственно.

На рис. 4, 5 представлены зависимости корреляционного тензора поля \mathbf{h} от количества учитываемых масштабов для первой и второй моделей среды. Величины $\langle h_x(\mathbf{x})^2 \rangle - \langle h_x(\mathbf{x}) \rangle^2$, $\langle h_y(\mathbf{x})^2 \rangle - \langle h_y(\mathbf{x}) \rangle^2$, $\langle h_z(\mathbf{x})^2 \rangle - \langle h_z(\mathbf{x}) \rangle^2$ обозначены D_x , D_y , D_z соответственно. На рис. 4,а показаны только две компоненты D_x , D_y . В этом случае $D_z \approx D_x$. На рис. 5 приведены компоненты D_x , D_z ($D_y = D_x$, а на рис. 5,б для анизотропной среды $D_z \approx D_x$). Точность оценок дисперсии \mathbf{h} меньше точности оценок средних значений локального потока как в изотропном, так и в анизотропном случае.

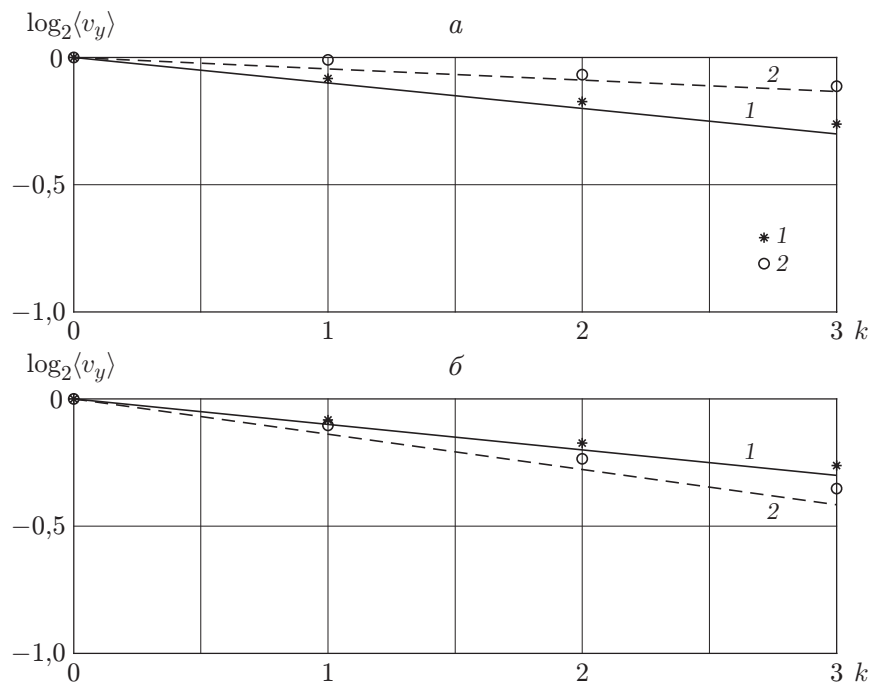


Рис. 2. Зависимости $\log_2 \langle v_y \rangle$ от количества масштабов (основной поток направлен вдоль оси y):

a — $\alpha_1/\alpha_2 = 0,25$; b — $\alpha_1/\alpha_2 = 4$; линии — результаты теоретического расчета, точки — результаты численного расчета; 1 — изотропная среда, 2 — анизотропная среда

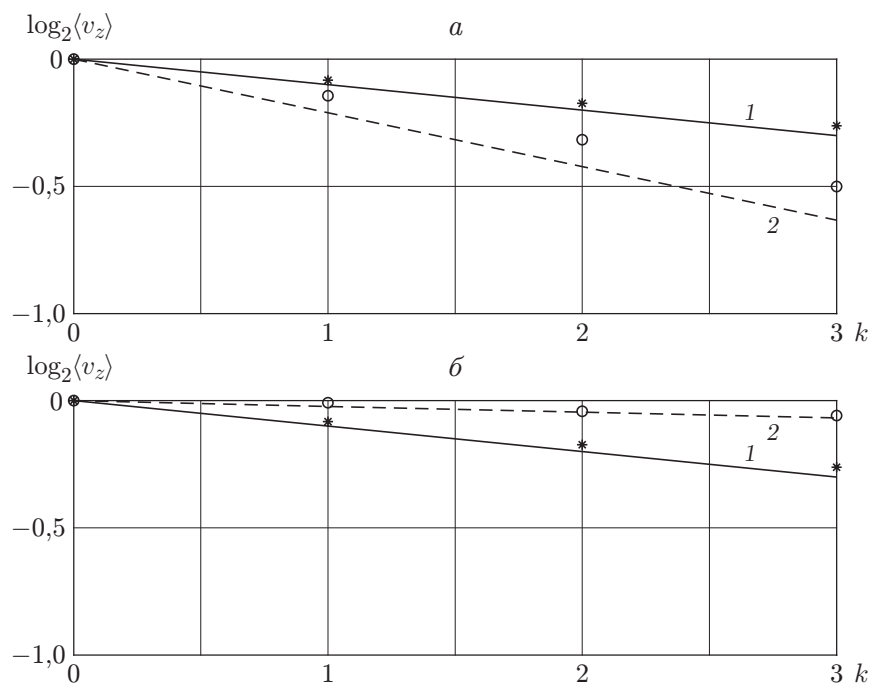


Рис. 3. Зависимости $\log_2 \langle v_z \rangle$ от количества масштабов (основной поток направлен вдоль оси z):

a — $\alpha_1/\alpha_2 = 0,25$; b — $\alpha_1/\alpha_2 = 4$ (обозначения те же, что на рис. 2)

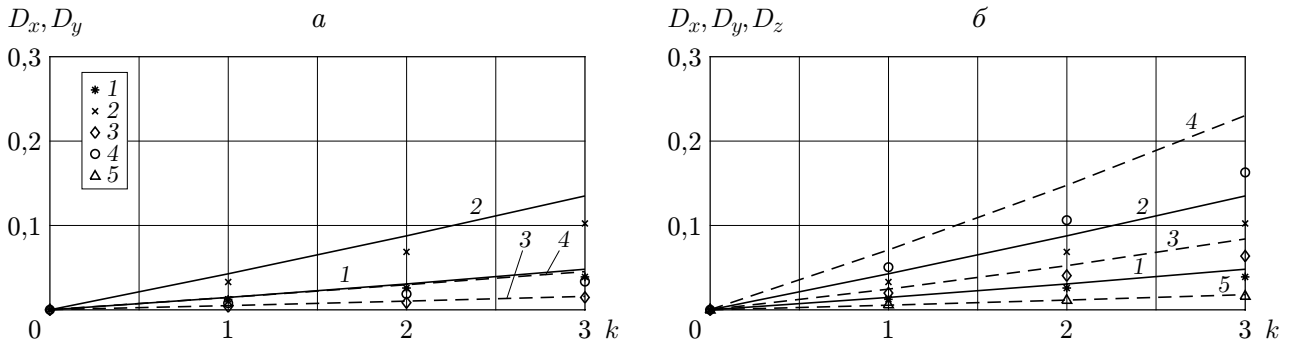


Рис. 4. Зависимости компонент дисперсии поля h от количества масштабов (основной поток направлен вдоль оси y):
 а — $\alpha_1/\alpha_2 = 0,25$; б — $\alpha_1/\alpha_2 = 4$; линии — теоретические оценки, точки — результаты численного расчета; 1, 2 — изотропная среда (1 — D_x ; 2 — D_y); 3–5 — анизотропная среда (3 — D_x ; 4 — D_y ; 5 — D_z)

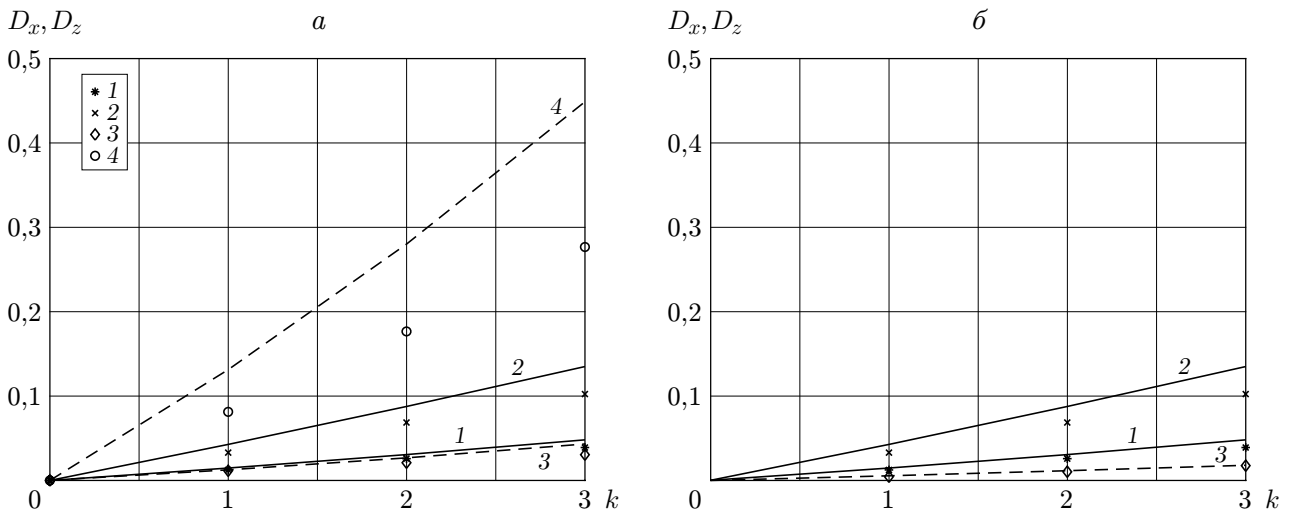


Рис. 5. Зависимости компонент дисперсии поля h от количества масштабов (основной поток направлен вдоль оси z):
 а — $\alpha_1/\alpha_2 = 0,25$; б — $\alpha_1/\alpha_2 = 4$; линии — теоретические оценки, точки — результаты численного расчета; 1, 2 — изотропная среда (1 — D_x ; 2 — D_z); 3, 4 — анизотропная среда (3 — D_x ; 4 — D_z)

На рис. 6, 7 приведены зависимости дисперсии поля локального потока от количества учитываемых масштабов для первой и второй моделей среды. Величины $\langle v_x(\mathbf{x})^2 \rangle - \langle v_x(\mathbf{x}) \rangle^2$, $\langle v_y(\mathbf{x})^2 \rangle - \langle v_y(\mathbf{x}) \rangle^2$, $\langle v_z(\mathbf{x})^2 \rangle - \langle v_z(\mathbf{x}) \rangle^2$ обозначены D'_x , D'_y , D'_z соответственно. На рис. 6,а показаны только две компоненты D'_x , D'_y . В этом случае $D'_z \approx D'_x$. На рис. 7 приведены компоненты D'_x , D'_z ($D'_y = D'_x$).

Заключение. В работе получены уравнения на эффективные коэффициенты для среднего потенциала течения, среднего локального потока и его дисперсии и дисперсии градиента потенциала в стационарной задаче протекания в анизотропной мультифрактальной среде, а также степенные законы для усредненных компонент локального потока в автомодельной среде. Проведено сравнение теоретических результатов с результатами, полученными прямым численным моделированием. Из результатов численного экспери-

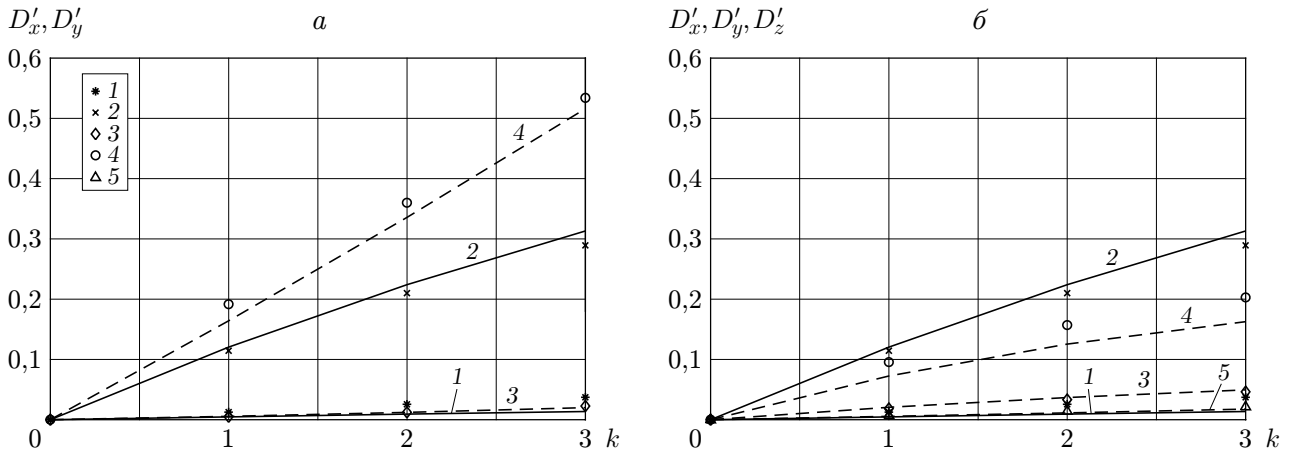


Рис. 6. Зависимости компонент дисперсии поля v от количества масштабов (основной поток направлен вдоль оси y):
 а — $\alpha_1/\alpha_2 = 0,25$; б — $\alpha_1/\alpha_2 = 4$; линии — теоретические оценки, точки — результаты численного расчета; 1, 2 — изотропная среда (1 — D'_x ; 2 — D'_y); 3–5 — анизотропная среда (3 — D'_x ; 4 — D'_y ; 5 — D'_z)

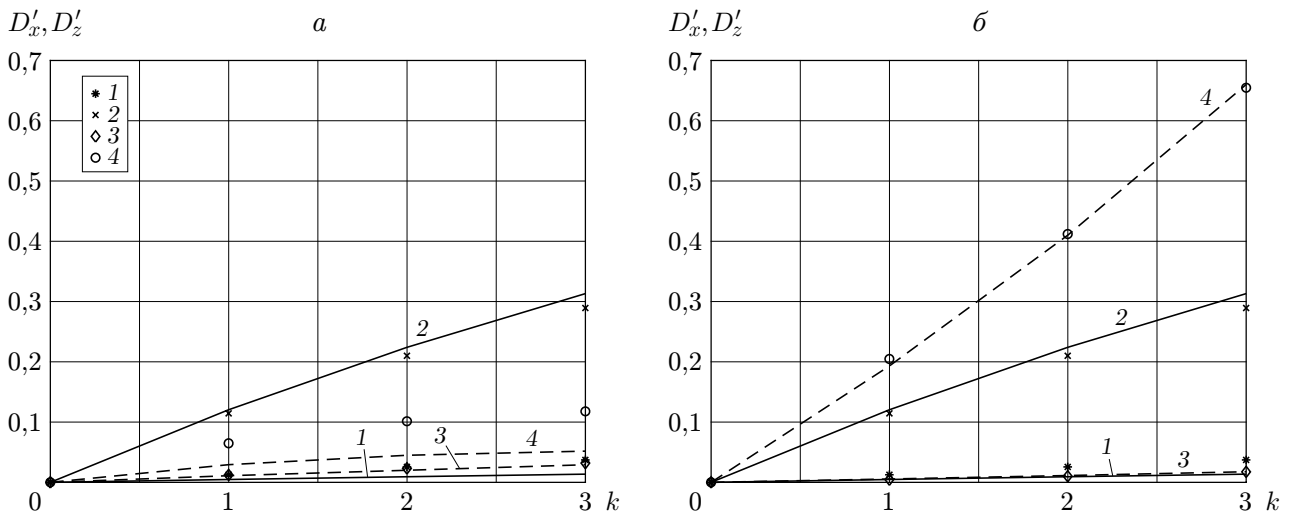


Рис. 7. Зависимости компонент дисперсии поля v от количества масштабов (основной поток направлен вдоль оси z):
 а — $\alpha_1/\alpha_2 = 0,25$; б — $\alpha_1/\alpha_2 = 4$; линии — теоретические оценки, точки — результаты численного расчета; 1, 2 — изотропная среда (1 — D'_x ; 2 — D'_z); 3, 4 — анизотропная среда (3 — D'_x ; 4 — D'_z)

мента следует, что оценка среднего локального потока является достаточно точной даже при больших значениях дисперсии поля. В численных экспериментах дисперсия поля $\sum_{i=-6}^{-4} \varphi(\mathbf{x}, \tau_i) \Delta \tau$ равна 0,9. Согласно экспериментальным данным, приведенным в работах [2, 9], для гидравлической проницаемости осадочных пород значения этой дисперсии находятся в диапазоне $0,20 \div 0,45$. Наибольшая погрешность оценки среднего локального потока (плоскопараллельный поток направлен перпендикулярно пласту с тонкими слоями (см. рис. 3,а)) составляет 8,8 %. Менее точными являются оценки вторых статистических

моментов. Наибольшую погрешность имеют оценки дисперсии h — 60 % (см. рис. 5, *a*). Погрешность оценки дисперсии локального потока составляет 50 % (см. рис. 7, *a*). В остальных случаях погрешность оценок приблизительно равна 20 %.

Гипотеза подобия Колмогорова не предполагает логарифмической нормальности и некоррелированности по логарифму от масштаба. Поэтому другая очевидная возможность развития изложенного выше подхода — изучить устойчивые распределения [12, 13], а также рассмотреть случай конформной симметрии проводимости. Предложенная в настоящей работе методика позволяет оценить влияние мелкомасштабных пульсаций на крупномасштабную компоненту различных полей, что особенно важно, в случае если масштабы неоднородности находятся в широком диапазоне.

Одним из практических применений результатов исследования является интерпретация электромагнитных зондирований в нефтегазовых скважинах, когда характерный линейный размер измерительной установки, например разнос или длина волны, в процессе измерений меняется.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Швидлер М. И.** Статистическая гидродинамика пористых сред. М.: Недра, 1985.
2. **Sahimi M.** Flow phenomena in rocks: from continuum models, to fractals, percolation, cellular automata, and simulated annealing // *Rev. Modern Phys.* 1993. V. 65. P. 1393–1534.
3. **Jackel U., Vereecken H.** Renormalization group analysis of macrodispersion in directed random flow // *Water Resources Res.* 1997. V. 33, N 10. P. 2287–2299.
4. **Hristopulos D. T., Christakos G.** Renormalization group analysis of permeability upscaling // *Stochastic Environmental Res. Risk Assessment.* 1999. V. 13, N 1/2. P. 131–160.
5. **Кузьмин Г. А., Соболева О. Н.** Подсеточное моделирование фильтрации в пористых автомодельных средах // *ПМТФ.* 2002. Т. 43, № 4. С. 115–126.
6. **Kolmogorov A. N.** A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number // *J. Fluid Mech.* 1962. V. 13. P. 82–85.
7. **Монин А. С.** Статистическая гидромеханика / А. С. Монин, А. М. Яглом. М.: Наука, 1967. Т. 2.
8. **Гнеденко Б. В.** Предельные распределения для сумм независимых случайных величин / Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров. М.: Гостехтеоретиздат, 1949.
9. **Sudicky E. A.** A natural experiment on solute transport in a sand aquifer: Spatial variability of hydraulic conductivity and its role in the dispersion process // *Water Resources Res.* 1986. V. 22, N 13. P. 2069–2082.
10. **Freeze R. A.** A stochastic-conceptual analysis of one-dimensional ground water // *Water Resources Res.* 1975. V. 11, N 4. P. 725–741.
11. **Ogorodnikov V. A.** Numerical modeling of random processes and fields: Algorithms and applications / V. A. Ogorodnikov, S. M. Prigarin. Utrecht: Kluwer, 1996.
12. **Schertzer D., Lovejoy S.** Physical modeling and analysis of rain and clouds by anisotropic scaling multiplicative processes // *J. Geophys. Res.* 1987. V. 92. P. 9693–9714.
13. **Соболева О. Н.** Эффективные коэффициенты проводимости в пористой среде с логарифмически устойчивой статистикой // *ПМТФ.* 2005. Т. 46, № 6. С. 146–158.

*Поступила в редакцию 11/1 2008 г.,
в окончательном варианте — 4/IX 2008 г.*