

УДК 539.3

РЕШЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ КОМПЛАНАРНЫХ ТРЕЩИН В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ С ЗАЩЕМЛЕННОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ПОСРЕДСТВОМ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. З. Станкевич, Б. М. Стасюк*, О. М. Хай**

Львовский факультет Днепропетровского Национального университета
железнодорожного транспорта, 79052 Львов

*Национальный университет "Львовская политехника", 79013 Львов

**Институт прикладных проблем механики и математики НАН Украины, 79060 Львов
E-mail: stasyuk@mail.lviv.ua

Рассмотрена трехмерная динамическая задача об упругом полупространстве с защемленной поверхностью, содержащем компланарные круговые трещины. Поверхности трещин находятся под воздействием гармонических нагрузок. Задача сведена к решению системы двумерных граничных интегральных уравнений типа потенциала Гельмгольца относительно неизвестных функций разрывов смещений противоположных поверхностей трещин. Посредством последних получены и проанализированы коэффициенты интенсивности напряжений в окрестностях контуров дефектов.

Ключевые слова: упругое полупространство, защемленная поверхность, плоские трещины, установившиеся колебания, граничные интегральные уравнения.

Введение. Известно, что прочность реальных тел значительно зависит от содержащихся в них структурных дефектов типа трещин, включений, которые часто являются концентраторами напряжений. Особое внимание при исследовании напряженно-деформируемого состояния таких тел уделяется изучению инерционных эффектов, возникающих вследствие динамического характера приложенных к ним нагрузок. Так, в случае бесконечных и полубесконечных тел с трещинами, находящихся под действием гармонических и ударных нагрузок, замечено, что возникающая концентрация напряжений вблизи дефектов может значительно превосходить свои же статические аналоги [1–4]. Существенное влияние на упомянутые эффекты оказывает также наличие внешней поверхности тела [5–7]. Среди многообразных методов решения задач структурной механики следует отметить метод граничных интегральных уравнений (ГИУ) [8–13], который показал свою эффективность при решении многих динамических задач трехмерной теории упругости. В предлагаемой работе метод ГИУ использован для исследования инерционных эффектов вблизи контуров круговых трещин, находящихся под действием гармонических нагрузок в полупространстве с защемленной поверхностью.

Постановка задачи. Рассмотрим упругое изотропное полупространство с жестко защемленной поверхностью S_0 . Полупространство содержит K плоских круговых трещин радиуса a , занимающих области S_k ($k = \overline{1, K}$) и расположенных на одинаковой глубине

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Министерства образования и науки Украины (№ проекта 01.07/00133).

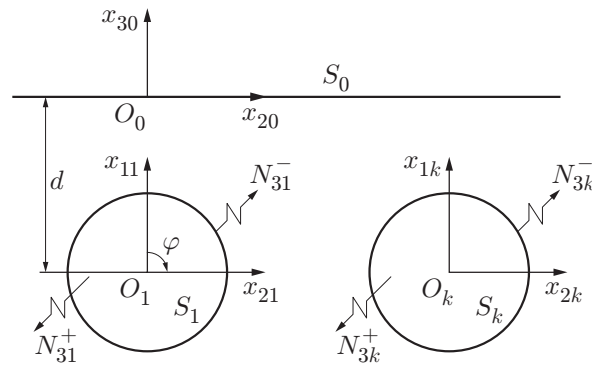


Рис. 1. Расчетная схема

залегания $d = |O_0O_1|$ в плоскости, перпендикулярной границе S_0 . Противоположные поверхности S_k^\pm трещин находятся под воздействием самоуравновешенных разрывных гармонических усилий

$$N_{3k}^+(x_k, t) = -N_{3k}^-(x_k, t) = N_{3k}(x_k) \exp(-i\omega t) \quad (k = \overline{1, K}),$$

где ω — частота приложенной нагрузки; t — время; $N_{3k}(x_k)$ — амплитудные значения усилий; $i = \sqrt{-1}$. Контакт противоположных поверхностей трещин отсутствует. Последнего условия можно достичь дополнительным приложением на бесконечности статических растягивающих усилий. Выберем локальные декартовы системы координат $O_k x_{1k} x_{2k} x_{3k}$ ($k = \overline{0, K}$) таким образом, чтобы полупространству соответствовала область $x_{30} \leq 0$, а области S_k трещин содержались в плоскостях $O_k x_{1k} x_{2k}$ (рис. 1).

Ввиду гармонической временной зависимости нагрузок все характеристики волнового поля в теле изменяются с частотой ω . Задача определения напряженно-деформируемого состояния полупространства с дефектами сводится к решению дифференциального уравнения

$$\omega_1^{-2} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \omega_2^{-2} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

с граничными условиями

$$u_j(x_0) = 0, \quad x_0 \in S_0, \quad j = \overline{1, 3},$$

$$\sum_{j=1}^3 \sigma_{j3k}(x_k) \cos(x_{3k}, x_{jk}) = N_{3k}(x_k), \quad x_k \in S_k, \quad k = \overline{1, K}, \quad (2)$$

$$N_{1k}(x_k) = N_{2k}(x_k) = 0, \quad k = \overline{1, K}.$$

Здесь $\mathbf{u}(u_1, u_2, u_3)$, σ_{j3k} — соответственно амплитудные значения вектора перемещений и компонентов тензора напряжений; $\nabla = \nabla(\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$; $\omega_j = \omega/c_j$, $j = 1, 2$; c_1, c_2 — скорости распространения в теле продольной и поперечной упругих волн, причем $c_2^2 = \gamma^2 c_1^2$, где $\gamma^2 = (1 - 2\mu)/(2(1 - \mu))$; μ — коэффициент Пуассона.

Построение решения. Обозначим через x_{1k}, x_{2k}, x_{3k} ($k = \overline{0, K}$) координаты точки x_k в k -й системе координат, а через $x_{1kn}, x_{2kn}, x_{3kn}$ ($n = \overline{0, K}$) — координаты этой же точки x_{kn} в n -й координатной системе. При этом имеют место соотношения

$$x_{1kn} = x_{1k}, \quad x_{2kn} = d_{kn} \cos(d_{kn}, x_{2k}) + x_{2k}, \quad d_{kn} = |O_k O_n|, \quad n, k = \overline{1, K}.$$

На основании принципа суперпозиции перемещения в произвольной точке тела равны сумме перемещений u_{j0} ($j = \overline{1, 3}$) от границы S_0 полупространства и перемещений u_{jk} ,

обусловленных взаимным раскрытием противоположных поверхностей S_k^\pm трещин:

$$u_j(x_0) = u_{j0}(x_0) + \sum_{k=1}^K [\delta_{j1}u_{2k}(x_{k0}) + \delta_{j2}u_{3k}(x_{k0}) + \delta_{j3}u_{1k}(x_{k0})].$$

Здесь δ_{ji} — символ Кронекера; перемещения $u_{jk}(x_k)$ выбраны в виде интегральных представлений [8]

$$u_{jk}(x_k) = -\frac{\partial P_{3k}^{(1)}}{\partial x_{jk}} + (1 - \delta_{j3}) \left[2 \frac{\partial P_{3k}^{(2)}}{\partial x_{jk}} + \frac{\partial P_{jk}^{(2)}}{\partial x_{3k}} \right] + \frac{2}{\omega_2^2} \frac{\partial}{\partial x_{jk}} \sum_{m=1}^3 \left[\delta_{m3} \Delta_k + (1 - \delta_{m3}) \frac{\partial^2}{\partial x_{3k} \partial x_{mk}} \right] \sum_{l=1}^2 (-1)^{l+1} P_{mk}^{(l)}, \quad k = \overline{0, K}, \quad (3)$$

где $\Delta_k = \frac{\partial^2}{\partial x_{1k}^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_{2k}^2}$ — двумерный оператор Лапласа; $P_{jk}^{(l)}(x_k) = \iint_{S_k} \Delta u_{jk}(\xi) \Phi_l(x_k, \xi) dS_\xi$, $j = \overline{1, 3}$, $l = 1, 2$ — потенциалы Гельмгольца; $\Phi_l(x_k, \xi) = \frac{\exp(i\omega_l|x_k - \xi|)}{|x_k - \xi|}$; $|x_k - \xi| = \left[\sum_{n=1}^2 (x_{nk} - \xi_n)^2 \right]^{1/2}$.

Неизвестные плотности Δu_{jk} ($j = \overline{1, 3}$, $k = \overline{1, K}$) потенциалов $P_{jk}^{(l)}(x_k)$ характеризуют разрывы смещений точек противоположных поверхностей трещин в направлении $O_k x_{jk}$:

$$\Delta u_{jk}(x_k) = (u_{jk}^+(x_k) - u_{jk}^-(x_k)) / (4\pi),$$

плотности Δu_{j0} характеризуют смещения точек границы полупространства. Представлением перемещений в виде (3) тождественно удовлетворяются условия излучения на бесконечности. Отметим, что при указанном выше расположении и нагружении трещин в теле отличными от нуля будут лишь разрывы Δu_{3k} ($k = \overline{1, K}$) нормальных смещений.

Определяя напряжения в месте расположения трещин законом Гука, с учетом граничных условий (2) исходную задачу динамической теории упругости сводим к решению системы K двумерных граничных интегральных уравнений типа потенциала Гельмгольца относительно неизвестных плотностей Δu_{3k} [9]

$$\iint_{S_k} \frac{\Delta u_{3k}(\xi)}{|x_k - \xi|^5} L(x_k, \xi) dS_\xi + \sum_{n=1}^K (1 - \delta_{nk}) \iint_{S_n} \frac{\Delta u_{3n}(\xi)}{|x_{nk} - \xi|^5} L(x_{nk}, \xi) dS_\xi + 2 \sum_{n=1}^K \iint_{S_n} \Delta u_{3n}(\xi) \int_0^\infty \frac{\tau R_2(\tau)}{T(\tau)} \Omega(x_{nk}, \xi, \tau) d\tau dS_\xi = \frac{\omega_2^2}{4G} N_{3k}(x_k, \omega), \quad k = \overline{1, K}, \quad (4)$$

где $|x_{nk} - \xi| = [(2d_{nk} - x_{1nk} - \xi_1)^2 + (x_{2nk} - \xi_2)^2]^{1/2}$; G — модуль сдвига материала тела. Ядра $L(x_{nk}, \xi)$ и $\Omega(x_{nk}, \xi, \tau)$ имеют вид

$$L(x_{nk}, \xi) = \sum_{m=1}^2 (-1)^{m+1} V_m(|x_{nk} - \xi|) \exp(i\omega_m|x_{nk} - \xi|),$$

$$V_m(z) = 9 - 9i\omega_m z - (5\omega_2^2 - \omega_m^2)z^2 + i\omega_m(2\omega_m^2 - \omega_2^2)z^3 + \delta_{1m}(2\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 z^4 / 4,$$

$$\Omega(x_{nk}, \xi, \tau) = \sum_{m,l=1}^2 (-1)^{m+1} \exp[-b_1 R_m(\tau) - b_2 R_l(\tau)] [\delta_{1m} \delta_{1l} \Omega_0 + (1 - \delta_{ml}) \Omega_1 + \delta_{2m} \delta_{2l} \Omega_2],$$

$$\Omega_k = [\mu \omega_2^2 / (2(1 - \mu))]^{2-k} (\tau/b_3)^k J_k(\tau b_3), \quad k = \overline{0, 2},$$

$$T(\tau) = R_1(\tau) R_2(\tau) - \tau^2, \quad R_j(\tau) = \sqrt{\tau^2 - \omega_j^2}, \quad j = 1, 2,$$

$$b_1 = |d - x_{1nk}|, \quad b_2 = |d - \xi_1|, \quad b_3 = |x_{2nk} - \xi_2|,$$

где $J_k(y)$ — функция Бесселя k -го порядка действительного аргумента. Появление полубесконечного интеграла в уравнениях обусловлено удовлетворением граничных условий задачи на бесконечной границе S_0 полупространства. Отличительной особенностью полученных уравнений является интегрирование лишь по конечным областям S_k трещин, что существенно при их численном решении.

Особенности уравнений (4) содержатся в первом слагаемом. В этом нетрудно убедиться, устремляя ω_1, ω_2 к нулю и разлагая в ряд ядро $L(x_k, \xi)$:

$$\frac{L(x_k, \xi)}{|x_k - \xi|^5} = \frac{1}{|x_k - \xi|^3} + \frac{A\omega_2^2}{|x_k - \xi|} + F(x_k, \xi).$$

Здесь $F(x_k, \xi) = L(x_k, \xi)/|x_k - \xi|^5 - 1/|x_k - \xi|^3 - A\omega_2^2/|x_k - \xi|$, $A = (1 - \mu)(3 - 4\gamma^2 + 3\gamma^4)/4$. Таким образом, ГИУ (4) содержат сильные особенности вида $|x_k - \xi|^{-3}$ и принадлежат к классу гиперсингулярных уравнений. Известно [8], что единственные решения таких уравнений существуют в классе функций, обращающихся в нуль на контурах областей S_k . Для построения регулярного аналога ГИУ (4) представим их плотности в виде [8]

$$\Delta u_{3k}(\xi) = \sqrt{a^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2} \Psi_{3k}(\xi), \quad k = \overline{1, K}, \quad (5)$$

где $\Psi_{3k}(\xi)$ — непрерывно дифференцируемые в областях S_k функции. Представления (5) удовлетворяют непрерывности перемещений при переходе через контуры трещин. С учетом вышеизложенного проведем регуляризацию первого слагаемого уравнений (4) в виде [10]

$$\iint_{S_k} \frac{\Delta u_{3k}(\xi)}{|x_k - \xi|^5} L(x_k, \xi) dS_\xi = \sum_{l=0}^2 \frac{1}{l!} \sum_{i=0}^{2-l} \frac{1}{i!} [I_{li}^3(x_k) - I_{li}^{3\varepsilon}(x_k)] \frac{\partial^{l+i} \Psi_{3k}(x_k)}{\partial x_{1k}^l \partial x_{2k}^i} +$$

$$+ A\omega_2^2 [I_{00}^1(x_k) - I_{00}^{1\varepsilon}(x_k)] \Psi_{3k}(x_k) + \iint_{S_k^\varepsilon} \frac{\sqrt{a^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2} L(x_k, \xi)}{|x_k - \xi|^5} \Psi_{3k}(\xi) dS_\xi.$$

Интегралы $I_{li}^n(x_k)$ имеют вид

$$I_{li}^n(x_k) = \iint_{S_k} \frac{(\xi_1 - x_{1k})^l (\xi_2 - x_{2k})^i}{|x_k - \xi|^n} \sqrt{a^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2} dS_\xi$$

и вычисляются аналитически [8]. Интегралы $I_{li}^{n\varepsilon}(x_k)$ отличаются от $I_{li}^n(x_k)$ лишь областью интегрирования S_k^ε , полученной из S_k путем исключения из нее круговой области сколь угодно малого радиуса ε с центром в точке $\xi = x_k$, и вычисляются численно.

После проведения регуляризации ГИУ (4) сводятся к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных дискретных значений функций $\Psi_{3k}(\xi)$. При этом проводится дискретизация круговых областей S_k трещин в полярной системе

координат $O_k r \varphi$ четырехугольными граничными элементами, в пределах которых дискретные значения $\Psi_{3k}(\xi)$ принимаются постоянными.

Численные результаты. В качестве примера рассматривался случай двух трещин, находящихся под воздействием разрывных усилий постоянной амплитуды $N_{3k}(x_k) = N_0$ ($k = 1, 2$). Дискретизация областей трещин проводилась путем выбора 11 точек разбиения по радиальной координате r и 16 точек по угловой координате φ . Коэффициент Пуассона материала тела принимали равным 0,3. При вычислении полубесконечных интегралов ГИУ (4) интервал интегрирования $(0, \infty)$ разбивали на интервалы $(0, \omega_1)$, (ω_1, ω_2) и (ω_2, ∞) с соответствующим условиям излучения выбором ветвей радикалов $R_j(\tau)$ ($j = 1, 2$). На интервале $(0, \omega_1)$ функция $T(\tau)$ содержит вещественный корень, поэтому при вычислении интеграла на указанном интервале проведена регуляризация.

Из решений $\Psi_{3k}(r, \varphi, \omega)$ на контурах трещин определяли коэффициенты интенсивности напряжений нормального отрыва

$$K_{Ik}(a, \varphi, t) = -\frac{2G\pi\sqrt{\pi a}}{1-\mu} \Psi_{3k}(a, \varphi, \omega) \exp(-i\omega t), \quad k = 1, 2.$$

На рис. 2, 3 представлены зависимости относительных амплитуд $K_I^* = |K_I|/K_I^s$ ($K_I^s = 2N_0\sqrt{a/\pi}$ — статический коэффициент интенсивности напряжений нормального отрыва для трещины в бесконечном теле под воздействием усилий N_0) от циклической частоты $\omega_2 a$. Видно, что в рассматриваемом спектре изменения параметра $\omega_2 a$ амплитуды K_I^* монотонно возрастают от своих статических значений при $\omega_2 a = 0$ до максимума и затем также монотонно убывают. Расположение точек контуров трещин, в которых амплитудные значения достигают абсолютных максимумов, существенно зависят от глубины залегания трещин и расстояния между ними. При фиксированном расстоянии d_{12} между дефектами в ближайших к поверхности полупространства точках контуров трещин с уменьшением глубины их залегания наблюдается некоторое убывание значений K_I^* (см. рис. 3, а). Последнее замечание свидетельствует о том, что жесткое закрепление границы полупространства приводит к его упрочнению по сравнению со случаем свободной поверхности полупространства [14]. В частности, при фиксированных значениях $\omega_2 a = 1,5$, $d = 1,2a$, $d_{12} = 3a$, $\varphi = 0$ амплитуда $K_I^* = 1,45$ и $1,56$ для полупространств с защемленной и свободной поверхностями соответственно. В случае единичной круговой трещины эти

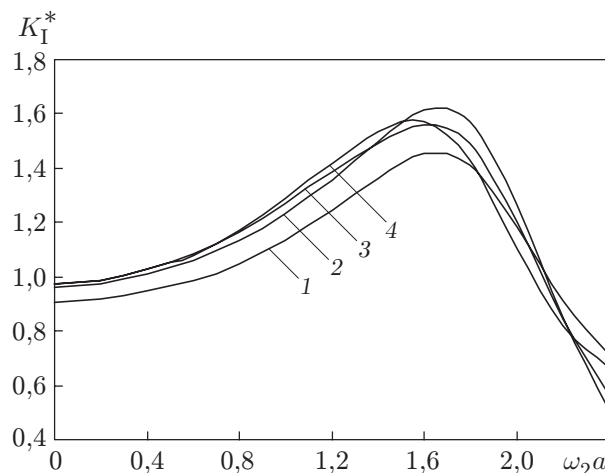


Рис. 2. Частотные зависимости K_I^* от угловой координаты точки внутри контура трещины:

$d = 1,3a$; $d_{12} = 3,0a$; 1 — $\varphi = 0$; 2 — $\varphi = 90^\circ$; 3 — $\varphi = 180^\circ$; 4 — $\varphi = 270^\circ$

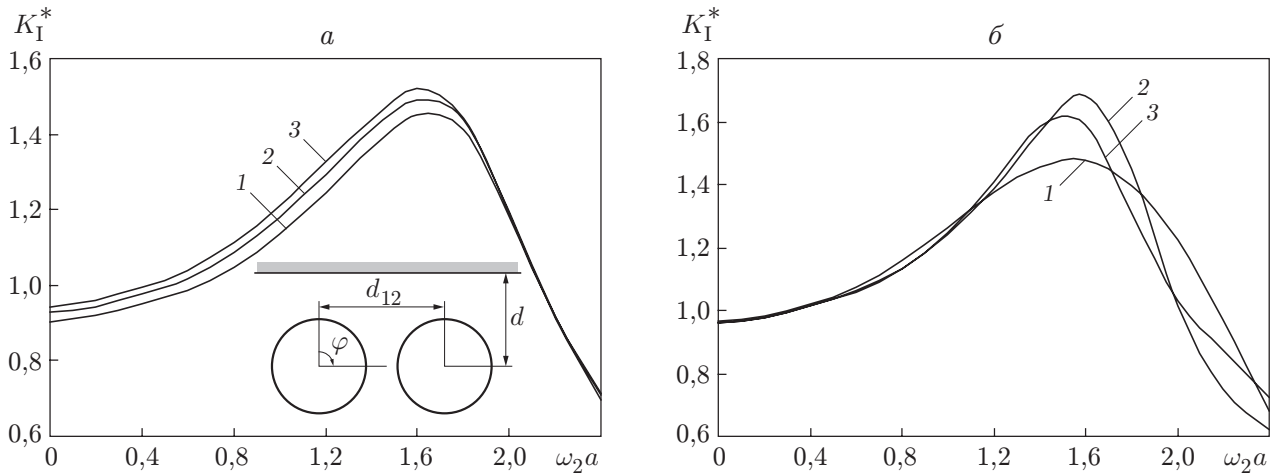


Рис. 3. Частотные зависимости K_I^* в фиксированных точках контура трещины от глубины залегания трещин и расстояния между ними:
 а — $\varphi = 0$; $d_{12} = 3,0a$; 1 — $d = 1,2a$; 2 — $d = 1,3a$; 3 — $d = 1,4a$; б — $\varphi = 90^\circ$; $d = 1,4a$;
 1 — $d_{12} = 2,4a$; 2 — $d_{12} = 4,0a$; 3 — $d_{12} = 5,0a$

значения равны соответственно 1,35 и 1,62, а в бесконечном теле — 1,51 [4]. При сближении трещин зависимость максимумов амплитуд K_I от расстояния между ними носит волнообразный характер (см. рис. 3, б). Этот эффект замечен также для бесконечного [2, 3, 10] и полубесконечного тел [14] с трещинами под действием гармонических нагрузок. С увеличением глубины залегания дефектов значения K_I^* стремятся к своим аналогам в бесконечном теле.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В. М., Сметанин Б. И., Соболев Б. В. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. М.: Физматлит, 1993.
2. Гольдштейн Р. В., Ентов В. М. Качественные методы в механике сплошных сред. М.: Наука, 1989.
3. Гузь А. Н., Зозуля В. В. Хрупкое разрушение материалов при динамических нагрузках. Т. 4: Неклассические проблемы механики разрушения. Киев: Наук. думка, 1993.
4. Партон В. З., Борисковский В. Г. Динамика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1988.
5. Ang W. T., Clements D. L., Dehgham M. Scattering and diffraction of SH-waves by multiple planar cracks in an anisotropic half-space. A hypersingular integral formulation // Intern. J. Solids Struct. 1993. V. 30. P. 1301–1312.
6. Itou S. Transient response of a finite crack in a half plane under impact load // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1981. V. 48. P. 534–538.
7. Keer L. M., Lin W., Achenbach J. D. Resonance effects for a crack near a free surface // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1984. V. 51. P. 65–70.
8. Кит Г. С., Хай М. В. Метод потенциала в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1989.
9. Станкевич В. З. Ударная нагрузка поверхностей компланарных трещин в полупространстве с заземленной поверхностью // Физ.-хим. механика материалов. 2003. № 5. С. 79–82.
10. Kit H. S., Khaj M. V., Mykhas'kiv V. V. Analysis of dynamic stress concentration in an infinite body with parallel penny-shaped cracks by BIEM // Engng Fract. Mech. 1996. V. 55. P. 191–207.

11. **Sladek J., Sladek V., Mykhas'kiv V. V., Stankevych V. Z.** Application of mapping theory to boundary integral formulation of 3D dynamic crack problems // Engng Anal. with Bound. Elements. 2003. V. 27, N 3. P. 203–213.
12. **Wen P. H., Aliabadi M. H., Young A.** Dual boundary element methods for three-dimensional dynamic crack problems // J. Strain Anal. 1999. V. 34. P. 373–394.
13. **Zhang Ch., Gross D.** On wave propagation in elastic solids with cracks. Southampton: Comp. Mechanics Publ., 1998.
14. **Станкевич В. З., Стасюк Б. М.** Трехмерная динамическая задача о взаимодействии трещин в полупространстве // Теорет. и прикл. механика. 2001. Вып. 34. С. 125–131.

Поступила в редакцию 29/III 2004 г.
