

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЕРТИКАЛЬНОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ОБМЕНА В ПРИСТЕННОМ СТРАТИФИЦИРОВАННОМ ТЕЧЕНИИ

А. Т. Зиновьев, С. Н. Яковенко*

Институт водных и экологических проблем СО РАН, 656099 Барнаул

* Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, 630090 Новосибирск

Для описания процессов вертикального переноса в неоднородных турбулентных течениях предлагается модифицированная модель турбулентности, которая включает алгебраические соотношения для напряжений Рейнольдса и коэффициентов турбулентного обмена. С использованием предложенной модели выполнены расчеты заглупления перемешанного слоя под действием ветровой нагрузки в нейтральном и устойчиво стратифицированном пристенных течениях. Проведено сравнение результатов расчета устойчиво стратифицированного течения по модифицированной и стандартной двухпараметрическим моделям турбулентности с экспериментальными данными.

Математическое моделирование температурного режима в стратифицированных озерах и водохранилищах требует привлечения адекватных аппроксимаций вертикального турбулентного обмена. В настоящее время для задания коэффициентов эффективного переноса в уравнениях переноса для скорости, температуры (концентрации) довольно часто используется $(E - \epsilon)$ -модель турбулентности. Однако в большинстве ее вариантов не учитывается демпфирование вертикальных пульсаций скорости вблизи дна и свободной поверхности, что делает проблематичным получение достоверных характеристик турбулентности в соответствующих областях. Корректное моделирование параметров турбулентного обмена в зоне термоклина по-прежнему остается актуальной задачей, от решения которой зависит возможность адекватного описания процессов переноса тепла и вещества между поверхностными и придонными областями в стратифицированных водоемах. В работе рассматривается расширенный вариант $(E - \epsilon)$ -модели турбулентности, использующий алгебраические соотношения для определения напряжений Рейнольдса.

Усовершенствованная модель турбулентности апробирована при решении задачи о заглуплении перемешанного слоя в жидкости постоянной плотности и стратифицированной жидкости под действием ветровых напряжений.

Математическая модель. При моделировании гидрофизических процессов в пристенном устойчиво стратифицированном течении использованы гидростатическое приближение и предположение горизонтальной однородности (осреднение гидродинамических величин в горизонтальной плоскости). Тогда в случае отсутствия вертикальной компоненты W вектора средней скорости процессы турбулентного переноса тепла (солености) и импульса описываются уравнениями

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda \frac{\partial T}{\partial z} - \langle w\theta \rangle \right]; \quad (1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\nu \frac{\partial U}{\partial z} - \langle uw \rangle \right], \quad \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\nu \frac{\partial V}{\partial z} - \langle vw \rangle \right]. \quad (2)$$

Здесь T и θ — средняя и пульсационная составляющие температуры (солености) воды; $\mathbf{U} = (U, V)$ и $\mathbf{u} = (u, v)$ — векторы средней и пульсационной составляющих скорости потока в горизонтальной плоскости; w — вертикальная компонента пульсации скорости; $\langle \dots \rangle$ — осреднение по ансамблю реализаций; λ, ν — коэффициенты молекулярного переноса; t — время; вертикальная координата z направлена вверх и отсчитывается от дна.

Градиентные выражения $\langle w\theta \rangle = -\lambda_t(\partial T/\partial z)$, $\langle uw \rangle = -\nu_t(\partial U/\partial z)$, $\langle vw \rangle = -\nu_t(\partial V/\partial z)$ в сочетании со стандартной $(E - \varepsilon)$ -моделью турбулентности приводят к замыканию уравнений (1), (2) [1–3]. Здесь λ_t и ν_t — коэффициенты турбулентной теплопроводности (диффузии) и вязкости. Уточнение модели турбулентного переноса возможно путем привлечения дифференциальных уравнений переноса для турбулентных потоков импульса и тепла (корреляций второго порядка термогидродинамических полей) [4–6]:

$$L(\langle u_i u_j \rangle) = -\langle u_i u_k \rangle \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \langle u_j u_k \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{g_i}{\rho^*} \langle \rho' u_j \rangle + \frac{g_j}{\rho^*} \langle \rho' u_i \rangle + \pi_{ij} - \varepsilon_{ij}; \quad (3)$$

$$L(\langle u_i \theta \rangle) = -\langle u_k \theta \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \langle u_i u_k \rangle \frac{\partial T}{\partial x_k} + \frac{g_i}{\rho^*} \langle \rho' \theta \rangle + \pi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta}, \quad (4)$$

где $g_i = (0, 0, -g)$ — вектор ускорения силы тяжести; ρ^* — средняя по всему течению плотность воды; ρ и ρ' — средняя (по ансамблю реализаций) и пульсационная составляющие плотности; плотность находится из уравнения состояния $\rho = \rho(T)$. Источники плавучести в приближении Буссинеска ($|\rho(x_i, t) - \rho^*| \ll \rho^*$, $\partial \rho_0 / \partial x_i = \rho^* g_i$, где p_0 — гидростатическое давление) содержат корреляции $\langle \rho' u_i \rangle$ и $\langle \rho' \theta \rangle$, которые определяются из уравнений переноса:

$$L(\langle \rho' u_i \rangle) = -\langle \rho' u_k \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \langle \rho' u_i \rangle \frac{\partial \rho}{\partial x_k} + \frac{g_i}{\rho^*} \langle \rho'^2 \rangle + \pi_{i\rho} - \varepsilon_{i\rho}, \quad (5)$$

$$L(\langle \rho'^2 \rangle) = -2\langle \rho' u_k \rangle \frac{\partial \rho}{\partial x_k} - \varepsilon_\rho, \quad L(\langle \rho' \theta \rangle) = -\langle \rho' u_k \rangle \frac{\partial T}{\partial x_k} - \langle u_k \theta \rangle \frac{\partial \rho}{\partial x_k} - \varepsilon_{\rho\theta}.$$

В уравнениях (3)–(5) конвективно-диффузионный оператор имеет вид

$$L(\Phi) = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \bar{U}_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} - D(\Phi),$$

где слагаемые $D(\Phi)$ описывают процессы молекулярной и турбулентной диффузии (содержат тройные корреляции). Диссипативные члены моделируются в виде [4–6]

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij}, \quad \varepsilon_{i\theta} = \varepsilon_{i\rho} = 0, \quad \varepsilon_\rho = \frac{1}{R} \frac{\varepsilon}{E} \langle \rho'^2 \rangle, \quad \varepsilon_{\rho\theta} = \frac{1}{R} \frac{\varepsilon}{E} \langle \rho' \theta \rangle.$$

Выражения для корреляций с пульсациями давления π_{ij} , $\pi_{i\theta}$, $\pi_{i\rho}$, учитывающие влияние сдвига средней скорости, архимедовых сил плавучести и свободной поверхности, взяты из [5–7].

Дифференциальная модель (3)–(5) упрощается до алгебраической, если в уравнениях для касательных напряжений Рейнольдса $\langle u_i u_j \rangle$ ($i \neq j$) и корреляций $\langle u_i \theta \rangle$, $\langle \rho' u_i \rangle$, $\langle \rho' \theta \rangle$, $\langle \rho'^2 \rangle$ пренебрегается членами $L(\Phi)$ [5], а в уравнениях для нормальных напряжений Рейнольдса (в частности, для $\langle w^2 \rangle$) члены адвекции и диффузии полагаются пропорциональными соответствующим слагаемым уравнения для энергии турбулентности $E = \langle u_i u_i \rangle / 2$, как в [6, 7]. В предположении горизонтальной однородности и при $W = 0$ результирующие соотношения для корреляций второго порядка имеют вид

$$\langle w\theta \rangle = E \frac{-\langle w^2 \rangle (\partial T / \partial z) + [1 - C_{2\theta}(1 - C'_{2\theta} f)] (-g / \rho^*) \langle \rho' \theta \rangle}{(C_{1\theta} + C'_{1\theta} f) \varepsilon}, \quad (6)$$

$$\langle uw \rangle = E \frac{[1 - C_2(1 - (3/2)C'_2 f)](-\langle w^2 \rangle)(\partial U / \partial z) - (g/\rho^*)\langle \rho' u \rangle}{(C_1 + (3/2)C'_1 f)\epsilon}; \quad (7)$$

$$\langle vw \rangle = E \frac{[1 - C_2(1 - (3/2)C'_2 f)](-\langle w^2 \rangle)(\partial V / \partial z) - (g/\rho^*)\langle \rho' v \rangle}{(C_1 + (3/2)C'_1 f)\epsilon}; \quad (8)$$

$$\langle w^2 \rangle = \frac{2}{3} E \left(1 - \frac{2C'_1 f \epsilon + [1 - C_2(1 - 2C'_2 f)](P - 3G)}{(C_1 + 2C'_1 f)\epsilon + P - \epsilon} \right); \quad (9)$$

$$\langle \rho' \theta \rangle = R(E/\epsilon) \left[-\langle w \theta \rangle \frac{\partial \rho}{\partial z} - \langle \rho' w \rangle \frac{\partial T}{\partial z} \right]; \quad (10)$$

$$\langle \rho' u \rangle = C_{1\theta}^{-1}(E/\epsilon) \left[-\langle uw \rangle \frac{\partial \rho}{\partial z} - (1 - C_{2\theta})\langle \rho' w \rangle \frac{\partial U}{\partial z} \right]; \quad (11)$$

$$\langle \rho' v \rangle = C_{1\theta}^{-1}(E/\epsilon) \left[-\langle vw \rangle \frac{\partial \rho}{\partial z} - (1 - C_{2\theta})\langle \rho' w \rangle \frac{\partial V}{\partial z} \right]; \quad (12)$$

$$\langle \rho' w \rangle = E \frac{-\langle w^2 \rangle(\partial \rho / \partial z) + [1 - C_{2\theta}(1 - C'_{2\theta} f)](-g/\rho^*)\langle \rho'^2 \rangle}{(C_{1\theta} + C'_{1\theta} f)\epsilon}; \quad (13)$$

$$\langle \rho'^2 \rangle = -2R(E/\epsilon)\langle \rho' w \rangle \frac{\partial \rho}{\partial z} \quad (14)$$

$$\left(P = -\langle uw \rangle \frac{\partial U}{\partial z} - \langle vw \rangle \frac{\partial V}{\partial z} + G, \quad G = -\frac{g}{\rho^*} \langle \rho' w \rangle \right).$$

Здесь P и ϵ — скорости порождения и диссипации энергии турбулентности; G — источник член, обусловленный действием архимедовых сил; константы $C_1 = 1,8$, $C_2 = 0,6$, $C'_1 = 0,5$, $C'_2 = 0,3$, $C_{1\theta} = 3,0$, $C_{2\theta} = 0,5$, $C'_{1\theta} = 0,5$, $C'_{2\theta} = 0,3$, $R = 0,8$. Демпфирование вертикальных пульсаций скорости вблизи свободной поверхности ($z = H$) учитывается введением в алгебраические соотношения (6)–(9), (13) эмпирической функции $f(z)$ вида [7]

$$f = C_f \frac{E_s^{3/2}}{\epsilon} \left[H - z + 0,04 \frac{E_s^{3/2}}{\epsilon_s} \right]^{-1},$$

где $E_s = E|_{z=H}$; $\epsilon_s = \epsilon|_{z=H}$; $C_f = 1/15$ — эмпирическая константа.

Последовательная подстановка (14) в (13), (13) в (11) и (12), (11) в (7), (12) в (8), а также (13) в (10), (10) в (6) дает градиентные выражения

$$\langle \rho' w \rangle = -d_t \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \right), \quad \langle w \theta \rangle = -\lambda_t \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right), \quad \langle uw \rangle = -\nu_t \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right), \quad \langle vw \rangle = -\nu_t \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right),$$

$$d_t = \frac{\langle w^2 \rangle E}{(C_{1\theta} + C'_{1\theta} f)\epsilon + [1 - C_{2\theta}(1 - C'_{2\theta} f)][2(g/\rho^*)R(E^2/\epsilon)(-\partial \rho / \partial z)]}, \quad (15)$$

$$\lambda_t = \frac{\langle w^2 \rangle E + [1 - C_{2\theta}(1 - C'_{2\theta} f)]R(E^2/\epsilon)G}{(C_{1\theta} + C'_{1\theta} f)\epsilon + [1 - C_{2\theta}(1 - C'_{2\theta} f)][(g/\rho^*)R(E^2/\epsilon)(-\partial \rho / \partial z)]},$$

$$\nu_t = \frac{[1 - C_2(1 - (3/2)C'_2 f)][\langle w^2 \rangle E + (1 - C_{2\theta})C_{1\theta}^{-1}(E^2/\epsilon)G]}{(C_1 + (3/2)C'_1 f)\epsilon + [1 - C_2(1 - (3/2)C'_2 f)][(g/\rho^*)C_{1\theta}^{-1}(E^2/\epsilon)(-\partial \rho / \partial z)]},$$

где d_t — коэффициент турбулентного массопереноса. Алгебраическая модель (15) отличается от использованной в [4–6] наличием двух соотношений для d_t и λ_t вместо одного для коэффициента турбулентного теплообмена (массообмена). Это обусловлено тем, что функции $\rho(T)$ и $\rho'(\theta)$ могут быть и нелинейными (например, если T — температура вблизи точки 0°C).

С учетом (9), (15) система уравнений турбулентного переноса приобретает тот же вид, что и в [1-3]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K_T \frac{\partial T}{\partial z} \right]; \quad (16)$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K_U \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z} \right]; \quad (17)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K_E \frac{\partial E}{\partial z} \right] + P - \varepsilon; \quad (18)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right] + \frac{\varepsilon}{E} (\dot{C}_1 P - \dot{C}_2 \varepsilon), \quad (19)$$

где

$$P = \nu_t \left[\left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right] + G, \quad G = \frac{\sigma}{\rho^*} d_t \frac{\partial \rho}{\partial z}.$$

Коэффициенты эффективного вертикального переноса тепла, импульса и параметров турбулентности определяются из выражений

$$K_T = \lambda + \lambda_t, \quad K_U = \nu + \nu_t, \quad K_E = \nu + C_s \frac{E}{\varepsilon} \langle w^2 \rangle, \quad K_\varepsilon = \nu + C_\varepsilon \frac{E}{\varepsilon} \langle w^2 \rangle.$$

Величины λ_t , ν_t и d_t , заданные согласно (15), являются сложными функциями от U , T , E , ε в отличие от использованных в [1-3]. Эмпирические коэффициенты и функции: $\dot{C}_1 = 1,55$, $\dot{C}_2 = 2(1 - 0,3 \exp(-\text{Re}_t^2))$ ($\text{Re}_t = E^2/(\nu\varepsilon)$ — турбулентное число Рейнольдса) [1-3], $C_s = 0,22$, $C_\varepsilon = 0,15$ [4].

Система уравнений (16)–(19) дополняется следующими граничными условиями: на дне ($z = 0$)

$$T = T_b, \quad K_U \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z} = k_b |\mathbf{U}| \mathbf{U}, \quad \frac{\partial E}{\partial z} = 0, \quad \varepsilon = C_b \frac{F^{3/2}}{l_b}; \quad (20)$$

на свободной поверхности ($z = H$)

$$K_T \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad K_U \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z} = \frac{\boldsymbol{\tau}}{\rho}, \quad \frac{\partial E}{\partial z} = k_\tau \left[\frac{|\boldsymbol{\tau}|}{\rho} \right]^{3/2}, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = 0. \quad (21)$$

Здесь $C_b = 0,314$; $k_b = 0,014$; $k_\tau = 2,5$; l_b — масштаб шероховатости при $z = 0$ [1, 2]; T_b — температура (соленость) воды на дне; $\boldsymbol{\tau}$ — ветровая нагрузка (касательное напряжение) на свободной поверхности течения. Параметры T_b и $\boldsymbol{\tau}$ могут быть различными в зависимости от конкретной постановки задачи.

При $t = 0$ считаются известными профили

$$T(0, z) = T_0(z), \quad \mathbf{U}(0, z) = \mathbf{U}_0(z), \quad E(0, z) = E_0(z), \quad \varepsilon(0, z) = \varepsilon_0(z).$$

Численная реализация и результаты расчетов. Предложенная модель турбулентности реализована при расчете развития турбулентного движения в открытом канале, инициированного ветровой нагрузкой на свободную поверхность. Нелинейная краевая задача (9), (15)–(21) решалась численно методом конечных разностей. Для получения неявных конечно-разностных схем, аппроксимирующих дифференциальную задачу, использовался метод баланса [8, 9]. Система алгебраических конечно-разностных уравнений решена методом скалярной прогонки с итерациями по нелинейности. Расчеты на последовательных равномерных сетках (каждая из которых отличается от предыдущей увеличением в 2 раза числа сеточных узлов N по координате z) показали, что при $N \sim 100$ решение

практически не зависит от дальнейшего увеличения числа узлов, поэтому взято $N = 100$. Величина шага по времени выбрана такой, что с ее уменьшением не наблюдается заметных изменений искомых функций.

Рассмотрено развитие сдвигового течения в круговом канале под действием постоянного касательного напряжения, приложенного к свободной поверхности первоначально покоящейся жидкости. Глубина канала $H = 30$ см. Значение ветровой нагрузки $\tau = |\tau|$ во всех расчетах принималось равным $0,995$ г/(см · с²), что соответствовало условиям эксперимента [10]. Рассчитывалось заглупление перемешанного слоя в жидкости постоянной плотности ($\partial\rho/\partial z = 0$) и устойчиво стратифицированной в начальный момент жидкости ($\partial\rho/\partial z = (\partial\rho/\partial z)_0 = 1,92 \cdot 10^{-3}$ г/см⁴ при $t = 0$ [10]). В качестве функции T в уравнении (16) рассматривалась соленость (концентрация соли в воде), связанная линейно с плотностью по формуле $\rho(T) = \rho_0 + \alpha T$ (ρ_0 — плотность пресной воды при температуре 13 °С [10], α — постоянный коэффициент). Коэффициенты молекулярной вязкости и диффузии (соли в воде): $\nu = 0,01$ см²/с, $\lambda = 1,2 \cdot 10^{-5}$ см²/с [10].

На рис. 1–6 представлены результаты расчетов по стандартной ($E - \varepsilon$)-модели [1–3] с коэффициентами турбулентного обмена $\nu_t = 0,09E^2/\varepsilon$, $\lambda_t = d_t = 0,8\nu_t$ (штриховые линии) и с использованием модифицированной алгебраической модели (9), (15) (сплошные линии).

На рис. 1 показан коэффициент турбулентной вязкости $\nu_t(z)$ как функция расстояния от дна канала. Меньшие значения $\nu_t(z)$ в приповерхностном слое в расчете по модифицированной модели обусловлены демпфирующим влиянием свободной поверхности на пульсации скорости. Профили средней скорости для однородной жидкости приведены на рис. 2. Анализ численных решений показывает, что представленные на рис. 2 распределения средней скорости фактически соответствуют стационарному решению задачи (9), (15)–(21). Замена модифицированной модели на стандартную приводит к незначительному различию вычисленных кривых $U(z)$.

В случае линейно-стратифицированной в начальный момент времени жидкости на всем интервале $0 \leq t \leq 250$ с решение задачи (9), (15)–(21) носит нестационарный характер. Сдвиговое турбулентное течение, возникшее сначала в приповерхностном слое, проникает в нижние слои покоящейся жидкости, вовлекая их в турбулентное движение. Процесс заглупления перемешанного слоя наглядно иллюстрируется картиной изменения плотности на рис. 3. Данный расчет выполнен с использованием модифицированной модели турбулентности, вычисления по стандартной модели дают близкие результаты.

Распределения вертикальных среднеквадратичных пульсаций скорости $\langle w^2 \rangle$, полученные по стандартной и модифицированной ($E - \varepsilon$)-моделям при $t = 180$ с, приведены на рис. 4. Здесь же нанесены кривые $\langle w^2 \rangle$ для турбулентного течения постоянной плотности. Подавление вертикальных турбулентных пульсаций скорости устойчивой стратификацией описывают обе модели, тогда как демпфирование свободной поверхностью жидкости — только модифицированная модель (линии 1 и 2 на рис. 4).

Динамика толщины перемешанного слоя $D = D(t)$ в стратифицированной жидкости, рассчитанная с использованием двух моделей турбулентности, показана на рис. 5. На этом рисунке также приведена экспериментальная зависимость $D = D(t)$ из работы [10]. В расчетах за нижнюю границу перемешанного слоя принималось значение z , при котором $\nu_t = 1$ см²/с. Полученная по модифицированной модели зависимость $D = D(t)$ находится в лучшем количественном согласии с экспериментом, чем вычисленная по стандартной модели турбулентности, хотя качественное согласие наблюдается в обоих расчетах.

На рис. 6 представлена скорость вовлечения $u_e = dD/dt$ нетурбулентной жидкости в турбулентную область (размера D) в зависимости от числа Ричардсона потока $Ri_0 = g(\partial\rho/\partial z)_0 D^2 / (2\rho^* u_*^2)$ ($u_* = \sqrt{\tau/\rho^*}$ — скорость трения). Приведены результаты вычислений по стандартной и модифицированной ($E - \varepsilon$)-моделям, моделям турбулент-

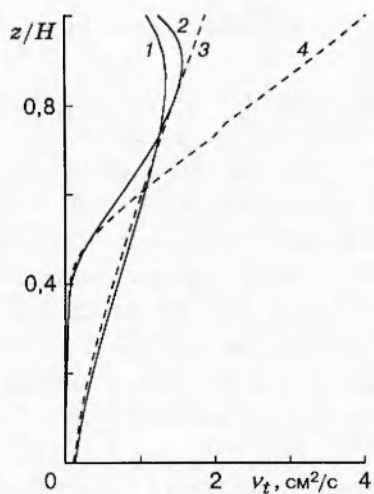


Рис. 1

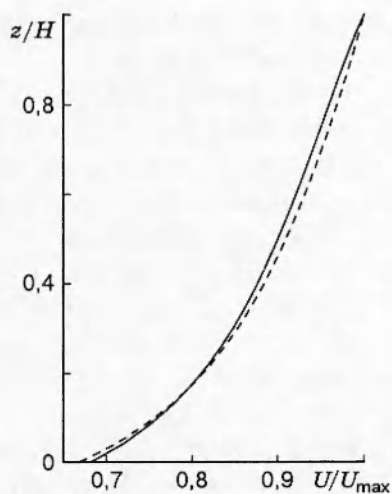


Рис. 2

Рис. 1. Распределения коэффициента турбулентной вязкости при $t = 180$ с:
1, 3 — течение постоянной плотности; 2, 4 — стратифицированное течение

Рис. 2. Профили средней скорости в однородной жидкости (штриховая линия — стандартная ($E - \varepsilon$)-модель, сплошная — модифицированная модель)

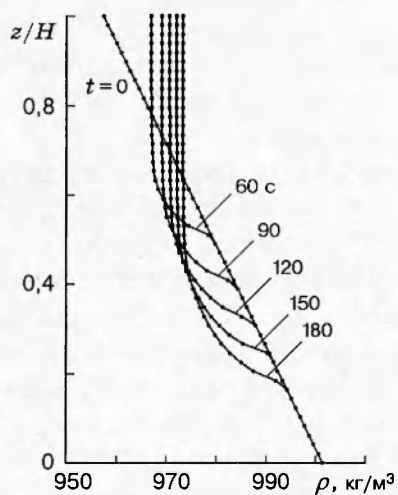


Рис. 3

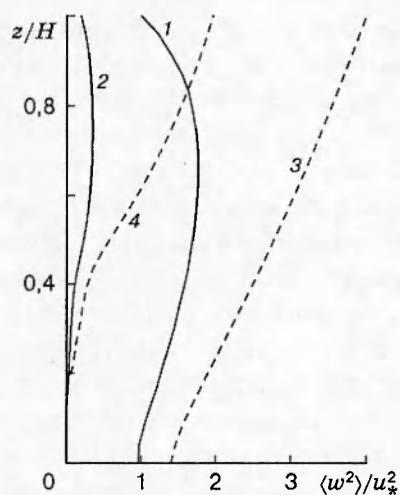


Рис. 4

Рис. 3. Вычисленная по модифицированной модели динамика изменения плотности жидкости (точки — каждый второй узел сетки)

Рис. 4. Распределения вертикальных среднеквадратичных пульсаций скорости при $t = 180$ с:
1, 3 — течение постоянной плотности; 2, 4 — стратифицированное течение

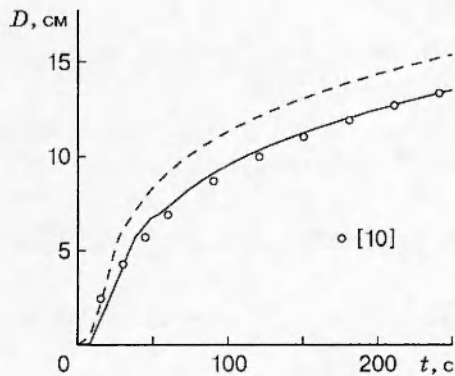


Рис. 5

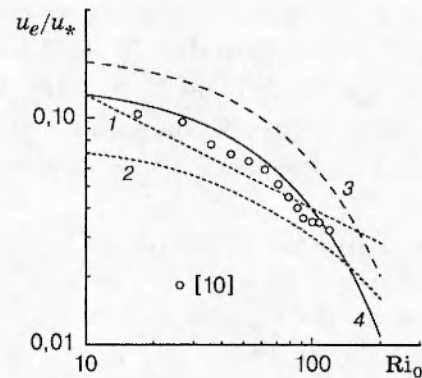


Рис. 6

Рис. 5. Динамика толщины перемешанного слоя (штриховая линия — стандартная $(E - \epsilon)$ -модель, сплошная — модифицированная модель)

Рис. 6. Зависимость скорости вовлечения u_e/u_* от числа Ричардсона Ri_0 :

1 — модель с алгебраическим выражением для масштаба длины $L \sim E^{3/2}/\epsilon \sim D$ [11], 2 — модель с уравнением переноса для L [11], 3 — стандартная $(E - \epsilon)$ -модель, 4 — модифицированная модель

ности из работы [11] (пунктирные линии), а также данные измерений [10]. Модель из [11] включала уравнения переноса для корреляций второго порядка без учета влияния среднего сдвига, сил плавучести и демпфирования стенкой в корреляциях с пульсациями давления, входящих в эти уравнения, и уравнение переноса (или алгебраическое выражение) для линейного масштаба турбулентности $L \sim E^{3/2}/\epsilon$ вместо уравнения переноса для диссипации ϵ . Из рис. 6 видно, что результаты, полученные по предложенной модели турбулентности, качественно и количественно согласуются с экспериментальными данными лучше, чем результаты расчетов по стандартной $(E - \epsilon)$ -модели из [1–3] и моделям из [11].

Результаты выполненных расчетов дают основание использовать предложенную модель вертикального турбулентного обмена для численного моделирования нестационарных гидрофизических процессов в глубоких устойчиво стратифицированных озерах и водохранилищах, особенно в случаях, когда необходимо более подробное описание турбулентных характеристик поверхностного перемешанного слоя.

Авторы выражают признательность О. Ф. Васильеву и А. Ф. Курбацкому за внимание к работе и обсуждение результатов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда и правительства России (совместный грант RM 1300) и помощи INTAS (гранты 93-2492-ext, 98-2022).

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев О. Ф., Бочаров О. Б., Зиновьев А. Т. Математическое моделирование гидротермических процессов в глубоких водоемах // Гидротехн. стр.-во. 1991. № 7. С. 3–5.
2. Бочаров О. Б., Зиновьев А. Т. Влияние селективного водозабора на годовой термический режим глубокого водоема // Вод. ресурсы. 1992. № 5. С. 52–59.
3. Игнатова Г. Ш., Квон В. И. Одномерная модель сезонного термоклина в озерах // Вод. ресурсы. 1979. № 6. С. 118–126.

4. **Методы** расчета турбулентных течений. М.: Мир, 1984.
5. **Gibson M. M., Launder B. E.** Ground effect on pressure fluctuations in the atmospheric boundary layer // J. Fluid Mech. 1978. V. 86, N 3. P. 491–511.
6. **Курбацкий А. Ф., Яковенко С. Н.** Моделирование турбулентной струи, распространяющейся по поверхности более плотной жидкости // Сиб. физ.-техн. журн. 1993. Вып. 1. С. 50–62.
7. **Celik I., Rodi W.** Simulation of free-surface effects in turbulent channel flows // Phys.-Chem. Hydrodynamics. 1984. V. 5, N 3. P. 217–227.
8. **Тихонов А. Н., Самарский А. А.** Уравнения математической физики: Учеб. пособие для вузов. М.: Наука, 1956.
9. **Патанкар С.** Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984.
10. **Kato H., Phillips O. M.** On the penetration of a turbulent layer into stratified fluid // J. Fluid Mech. 1969. V. 37, pt 4. P. 643–655.
11. **Левеллен В.** Метод инвариантного моделирования / Турбулентность: принципы и применения. М.: Мир, 1980.

*Поступила в редакцию 19/II 1996 г.,
в окончательном варианте — 25/III 1997 г.*
