

УДК 532.5

DOI: 10.15372/PMTF202315260

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ В ПЛАСТЕ С МАГИСТРАЛЬНОЙ ТРЕЩИНОЙ, ПЕРЕСЕКАЮЩЕЙ НАГНЕТАТЕЛЬНУЮ ИЛИ ДОБЫВАЮЩУЮ СКВАЖИНУ

А. М. Ильясов, В. Н. Киреев

Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия

E-mails: amilyasov67@gmail.com, kireev@anrb.ru

Рассматривается задача о мгновенной закачке или отборе ньютоновской жидкости через нагнетательную или добывающую скважину в бесконечный пласт с вертикальной магистральной трещиной постоянной ширины при заданных постоянных забойном давлении на скважине и пластовом давлении. Найдены аналитические решения для полей давления в трещине и пласте при закачке или отборе жидкости, а также для скорости течения в трещине. Получены явное выражение для утечки (притока) жидкости из трещины в пласт (из пласта в трещину) и уравнения траекторий частиц в трещине и пласте. Для полученных решений построены поля давления, распределения скорости жидкости в трещине и утечек жидкости из конечной трещины в ограниченный пласт при различных значениях проницаемости пласта.

Ключевые слова: нестационарное течение, билинейный поток, магистральная трещина, аналитическое решение

Введение. Вследствие увеличения интенсивности нефтедобычи на поздних стадиях разработки месторождений в пластах образуются техногенные трещины. Со стороны добывающих скважин инициируются трещины гидравлического разрыва пласта (ГРП) [1], а со стороны нагнетательных скважин — трещины автоГРП, образующиеся самопроизвольно при превышении давления закачки на скважине прочности и трещиностойкости породы [2]. Эти трещины могут соединяться, образуя высокопроводящие каналы, соединяющие нагнетательные и добывающие скважины. При этом на большей части длины трещины не закреплены проппантом и находятся в сомкнутом состоянии (имеется разрыв сплошности породы). Более того, трещины автоГРП могут достигать добывающих скважин [2]. Со временем такие трещины вследствие эрозии породы промываются нагнетаемыми и отбираемыми фильтрационными потоками, распространяющимися со стороны скважин систем разработки, и трансформируются в незакрепленные трещины с некоторой характерной величиной раскрытия. Эти высокопроницаемые каналы существенно изменяют распределение пластового давления при заводнении на поздних стадиях разработки и, следовательно, влияют на эффективность извлечения нефти. В связи с этим актуальна задача определения давления в пласте при наличии магистральных трещин в режиме нестационарной фильтрации.

В окрестности трещины в системе трещина — пласт возникает билинейный поток, представляющий собой прямолинейное течение в трещине и перпендикулярное трещине

фильтрационное течение в пласте с прямолинейными траекториями частиц. По-видимому, впервые билинейный поток в окрестности закрепленной проппантом вертикальной трещины ГРП конечной проводимости изучен в работе [3], в которой с помощью операционного метода получена зависимость от времени забойного давления добывающей скважины при больших временах и постоянном дебите скважины. Получена функция, описывающая асимптотику падения забойного давления как зависимость от времени в степени $1/4$. Распределение давления в пласте в настоящей работе не изучается.

В последнее время появился ряд работ, посвященных моделированию билинейного потока. В работе [4] рассмотрено течение в бесконечной трещине, закрепленной проппантом. Описание фильтрационного течения в трещине сведено к интегральному уравнению типа свертки. С использованием метода преобразования Лапласа получены решения для давления в трещине при постоянных давлении и расходе на забое добывающей скважины. В случае работы скважины с постоянным дебитом, как и в [3], получено, что давление в трещине пропорционально времени в степени $1/4$ ($p \sim t^{1/4}$), однако эволюция давления в пласте также не рассматривается. В работе [5] пласт и трещина также полагаются бесконечными. В случае билинейного течения с помощью метода преобразования Лапласа получено решение для давления как в закрепленной трещине, так и в пласте при постоянном давлении на забое скважины. В работе [6] аналогичная задача решена для случая, когда задан постоянный дебит на скважине. При больших значениях времени получена функция, описывающая асимптотику давления на скважине как зависимость от времени в степени $1/4$. Полученные в работах [5, 6] решения применимы как для добывающих, так и для нагнетательных скважин с точностью до знака депрессии (репрессии) или расхода. В работе [7] на основе решений, полученных в [4], построены решения для давления (расхода) при ступенчатых изменениях расхода (давления), применяемых в полевых испытаниях для определения параметров трещины ГРП. В работе [8] с помощью операционного метода найдены аналитические решения для закрепленной трещины конечной длины при заданном забойном давлении или заданном расходе на скважине. В случае конечной трещины решения представляются в виде интегралов от рядов.

В ряде работ проведено численное моделирование установившихся [1] и неустановившихся течений [9] в пластовых системах с вертикальными трещинами ГРП. В работе [9] представлены результаты численного моделирования для элемента линейной системы разработки, который состоит из двух добывающих скважин и одной нагнетательной с магистральными техногенными трещинами ГРП. Изучено влияние проницаемости коллектора, а также объемной доли глинистых пропластков на распределение давления между скважинами. Предпринята попытка обоснования существенного различия промысловых пластовых давлений между соседними нагнетательными и добывающими скважинами.

В указанных выше работах как в пласте, так и в трещине изучаются линейно-упругие пористые среды, для которых характерное время фильтрации в трещине много меньше характерного времени фильтрации в пласте. В настоящей работе рассматривается задача о билинейном течении в системе трещина постоянной ширины — пласт, в которой, как показано ниже, эффективная проницаемость в “промытых” эрозией трещинах шириной 10^{-4} м и более на порядки выше проницаемости в закрепленной проппантом линейно-упругой трещине. Это отличает постановку задач в работах по моделированию билинейного потока, которые обсуждались выше, от рассматриваемой постановки задачи. Кроме того, в настоящей работе флюид в трещине полагается несжимаемым.

1. Математическая модель и постановка задачи. Рассматривается задача о билинейном потоке в сопряженной системе трещина — пласт в бесконечном пласте. На рис. 1 показана $1/4$ этой системы для нагнетательной скважины (скважина может быть как нагнетательной, так и добывающей). Трещина имеет постоянную ширину. Для простоты

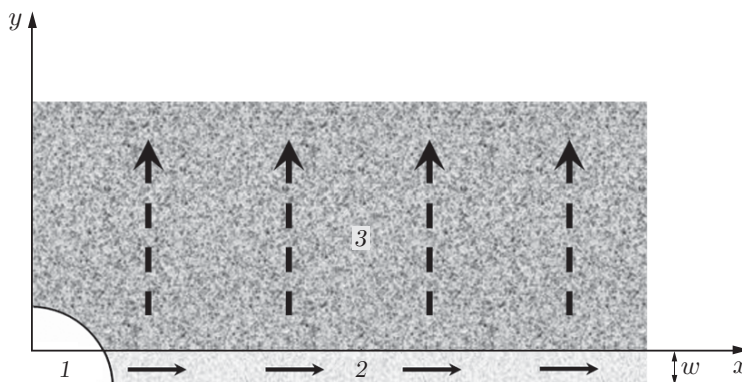


Рис. 1. Схема задачи:

1 — скважина, 2 — трещина, 3 — пласт

полагается, что трещина заполнена такой же ньютоновской жидкостью, что и пласт. Выведем систему уравнений, описывающую билинейное течение в рассматриваемой конфигурации трещина — пласт.

Консервативная форма системы уравнений в гидравлическом приближении, описывающей нестационарное течение несжимаемой жидкости в трещине постоянной ширины с проницаемыми стенками, имеет вид [10]

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -2 \frac{u_L}{w}; \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (1 + \beta) \frac{\partial v^2}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{(1 - m)C_w v^2}{w}; \quad (1.2)$$

$$C_w = \frac{24}{\text{Re}}, \quad \text{Re} = \frac{2\rho v w}{\mu}, \quad (1.3)$$

где v — скорость течения жидкости в трещине ГРП; u_L — скорость фильтрационной утечки по нормали к стенкам трещины; w — величина раскрытия трещины; β — поправка Кориолиса на неравномерность скорости по сечению трещины; p — давление в трещине; ρ — постоянная плотность жидкости в трещине; m — коэффициент пористости породы; C_w — коэффициент гидравлического трения; μ — динамическая вязкость жидкости.

Математическое моделирование трассерных исследований нестационарных и установившихся ламинарных течений меченых частиц в трещинах, соединяющих нагнетательные и добывающие скважины в пластах [10, 11], показывает, что минимальное время течения в трещинах шириной $0,7 \div 1,0$ мм для проницаемостей пород $0,1 \div 10,0$ Д составляет $1 \div 60$ мин. Учитывая, что скорость звука в воде равна $c \approx 1500$ м/с, а длины трещин составляют порядка $L = 100$ м, проверим выполнение критерия несжимаемости жидкости [12]

$$v_* \ll c, \quad L \ll cT. \quad (1.4)$$

Если принять характерное время течения в трещине равным T , то единственным критерием несжимаемости жидкости в трещине является первое неравенство (1.4). Имеем

$$v_* = \frac{L}{T} = \frac{100}{60} \text{ м/с} \approx 1,66 \text{ м/с} \ll 1500 \text{ м/с},$$

где минимальное время течения равно 1 мин. Для больших значений времени характерная скорость еще меньше. Таким образом, жидкость в трещине можно считать несжимаемой.

Кроме того, оценки показывают, что вследствие утечки жидкости через стенки трещины турбулентные течения в трещине могут реализовываться только в непосредственной близости от нагнетательных (при высоких расходах закачки или давления на скважине) и добывающих (при низких забойных давлениях или высоких дебитах) скважин. В большинстве случаев по всей длине трещины реализуются ламинарные режимы течения.

Далее, поскольку поправка Кориолиса $\beta \sim 1$, конвективным слагаемым в (1.2) можно пренебречь при выполнении неравенства

$$v_*^2 \ll p_*/\rho. \quad (1.5)$$

Полагая характерное давление равным характерному перепаду давлений между нагнетательной и добывающей скважинами $p_* = \Delta p = 10^7$ Па, а плотность равной плотности воды $\rho = 10^3$ кг/м³, получаем оценку

$$9 \cdot 10^{-4} \text{ (м/с)}^2 \ll 10^4 \text{ (м/с)}^2. \quad (1.6)$$

С учетом (1.5), (1.6) система уравнений (1.1)–(1.3) линеаризуется:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -2 \frac{u_L}{w}; \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{12(1-m)\mu v}{\rho w^2}. \quad (1.8)$$

Для моделирования течения в линейно-упругом пласте с прямолинейными траекториями частиц жидкости используем уравнение пьезопроводности для порового давления $p_r(x, y, t)$ [13]:

$$\frac{\partial p_r}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 p_r}{\partial y^2}, \quad \chi = \frac{k}{\mu(m\beta_l + \beta_s)}, \quad (1.9)$$

где k — проницаемость пласта; β_l — коэффициент сжимаемости жидкости в пласте; β_s — коэффициент сжимаемости скелета породы. Заметим, что в отличие от давления в трещине давление в пласте является двумерным.

Для замыкания системы уравнений (1.7)–(1.9) используем закон Дарси

$$u_L = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p_r}{\partial y} \Big|_{y=0}. \quad (1.10)$$

На стенке трещины должно выполняться динамическое условие непрерывности давления

$$p_r(x, 0, t) = p(x, t). \quad (1.11)$$

В начальный момент времени жидкость в трещине и пласте покоится, а давление в трещине равно пластовому давлению. Таким образом, начальные условия имеют вид

$$v(x, 0) = 0, \quad p(x, 0) = p_k, \quad p_r(x, y, 0) = p_k \quad (1.12)$$

(p_k — пластовое давление).

Граничное условие на скважине задается в виде постоянного давления p_{wn} закачки (отбора) жидкости

$$p(0, t) = p_{wn}. \quad (1.13)$$

На бесконечности потребуем выполнения условия равенства давлений в трещине и пласте пластовому давлению:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p(x, t) = p_k, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} p_r(x, y, t) = p_k. \quad (1.14)$$

В силу условия непрерывности давления (1.11) условие ограниченности пластового давления по координате x на бесконечности автоматически следует из первого условия (1.14). Уравнения (1.7)–(1.14) завершают постановку задачи.

Характерные значения времени течения в реальной трещине конечных размеров много меньше характерных значений времени фильтрации в пласте при выполнении неравенства

$$t_* = L^2/\chi \gg T. \quad (1.15)$$

В настоящее время осваиваются трудноизвлекаемые запасы нефти с проницаемостями пластов $k \leq 10^{-15}$ Д. Для таких проницаемостей и коэффициентов сжимаемости воды и скелета породы равны $\beta_l \approx 10^{-10}$ Па $^{-1}$ и $\beta_l \approx 10^{-11}$ Па $^{-1}$. Для коэффициента пористости $m = 0,1$ величина коэффициента упругоэластичности пласта равна $\beta^* \approx 2 \cdot 10^{-11}$ Па $^{-1}$. Для воды с вязкостью $\mu = 10^{-3}$ Па $\cdot$ с имеем $\chi \leq 5 \cdot 10^{-2}$ м 2 /с. Для характерного времени течения в трещине $T = 3600$ с из (1.15) получаем

$$t_* \geq 2 \cdot 10^5 \text{ с} \gg 3,6 \cdot 10^3 \text{ с}.$$

Таким образом, для характерных проницаемостей пластов $k \leq 10^{-15}$ Д, для которых в основном проводится операция ГРП, различие характерных времен составляет два и более порядков. Таким образом, лимитирующим течением в рассматриваемой задаче является фильтрационное течение в пласте.

Эффективная проницаемость трещин шириной $w \geq 10^{-4}$ м равна

$$k_f = \frac{w^2}{12} \geq \frac{0,0001^2}{12} \approx 10^{-9} \text{ Д},$$

что на порядок (и более) больше проницаемости закрепленных пропантом трещин $k_f \approx 1 \div 100$ Д. Поскольку проницаемость трещины на много порядков превышает проницаемость пласта, будем полагать, что при закачке (отборе) вся жидкость из скважины поступает в трещину (из трещины в скважину), а из трещины в пласт (из пласта в трещину).

Введем безразмерные переменные

$$\bar{p}_r = \frac{p_r - p_k}{p_*}, \quad \bar{p}(x, t) = \frac{p - p_k}{p_*}, \quad \bar{v} = \frac{v}{v_*}, \quad \bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{y} = \frac{y}{L}, \quad \bar{t} = \frac{t}{t_*}, \quad (1.16)$$

при этом характерные переменные, безразмерные параметры и размерный параметр C равны

$$t_* = \frac{L^2}{\chi}, \quad p_* = p_{wn} - p_k, \quad v_* = \frac{t_* p_*}{\rho L}, \quad (1.17)$$

$$A = \frac{2k p_*}{\mu w v_*} > 0, \quad B = \frac{12\mu(1-m)t_*}{\rho w^2} > 0, \quad C = \frac{k p_*}{\mu L},$$

L — большая величина, имеющая размерность длины. Заметим, что в рассматриваемой постановке задачи характерной длины не существует. В случае закачки жидкости в пласт давления подчиняются неравенству $p_{wn} > p_k$, а при отборе жидкости из пласта — неравенству $p_{wn} < p_k$.

Безразмерные уравнения принимают вид

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} = A \frac{\partial \bar{p}_r}{\partial \bar{y}} \Big|_{\bar{y}=0}; \quad (1.18)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} - B \bar{v}; \quad (1.19)$$

$$\frac{\partial \bar{p}_r}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial^2 \bar{p}_r}{\partial \bar{y}^2}, \quad (1.20)$$

безразмерное условие непрерывности давления (1.11) —

$$\bar{p}_r(\bar{x}, 0, \bar{t}) = \bar{p}(\bar{x}, \bar{t}). \quad (1.21)$$

Начальные условия (1.12) в безразмерных переменных —

$$\bar{v}(\bar{x}, 0) = 0, \quad \bar{p}(\bar{x}, 0) = 0, \quad \bar{p}_r(\bar{x}, \bar{y}, 0) = 0, \quad (1.22)$$

граничное условие (1.13) для безразмерного давления —

$$\bar{p}(0, \bar{t}) = 1, \quad (1.23)$$

условия на бесконечности для давлений (1.14) —

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \infty} \bar{p}(\bar{x}, \bar{t}) = 0, \quad \lim_{\bar{y} \rightarrow \infty} \bar{p}_r(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = 0. \quad (1.24)$$

2. Решение с помощью метода преобразования Лапласа. Применим преобразование Лапласа [14] по безразмерному времени

$$F(\bar{x}, \omega) = \int_0^\infty \bar{f}(\bar{x}, \bar{t}) e^{-\omega \bar{t}} d\bar{t} = L\{\bar{f}(\bar{x}, \bar{t})\},$$

$$F(\bar{x}, \bar{y}, \omega) = \int_0^\infty \bar{f}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) e^{-\omega \bar{t}} d\bar{t} = L\{\bar{f}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})\}$$

к системе уравнений (1.18)–(1.24). Изображения искомых функций обозначим следующим образом:

$$V(\bar{x}, \omega) = L\{\bar{v}(\bar{x}, \bar{t})\}, \quad P(\bar{x}, \omega) = L\{\bar{p}(\bar{x}, \bar{t})\}, \quad P_r(\bar{x}, \bar{y}, \omega) = L\{\bar{p}_r(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})\}.$$

С учетом начальных условий (1.22) для изображений и дополнительных условий получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$\frac{\partial V}{\partial \bar{x}} = A \frac{\partial P_r}{\partial \bar{y}} \Big|_{\bar{y}=0}; \quad (2.1)$$

$$\omega V = -\frac{\partial P}{\partial \bar{x}} - BV; \quad (2.2)$$

$$\omega P_r = \frac{d^2 P_r}{d\bar{y}^2}. \quad (2.3)$$

Безразмерное условие непрерывности давления (1.21) в изображениях принимает вид

$$P_r(\bar{x}, 0, \omega) = P(\bar{x}, \omega), \quad (2.4)$$

граничное условие (1.23) для изображения —

$$V(0, \omega) = \bar{v}_0/\omega, \quad (2.5)$$

условия на бесконечности (1.24) — безразмерный вид

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \infty} p(\bar{x}, \omega) = 0, \quad \lim_{\bar{y} \rightarrow \infty} p_r(\bar{x}, \bar{y}, \omega) = 0. \quad (2.6)$$

Решение системы ОДУ (2.1)–(2.3) с дополнительными условиями (2.4)–(2.6) имеет вид

$$V(\bar{x}, \omega) = \frac{\sqrt{\omega^{1/2}(\omega + B)A}}{(\omega + B)\omega} e^{-\bar{x}\sqrt{\omega^{1/2}(\omega + B)A}}, \quad P(\bar{x}, \omega) = \frac{1}{\omega} e^{-\bar{x}\sqrt{\omega^{1/2}(\omega + B)A}},$$

$$P_r(\bar{x}, \bar{y}, \omega) = \frac{1}{\omega} e^{-\bar{x}\sqrt{\omega^{1/2}(\omega + B)A} - \bar{y}\sqrt{\omega}}. \quad (2.7)$$

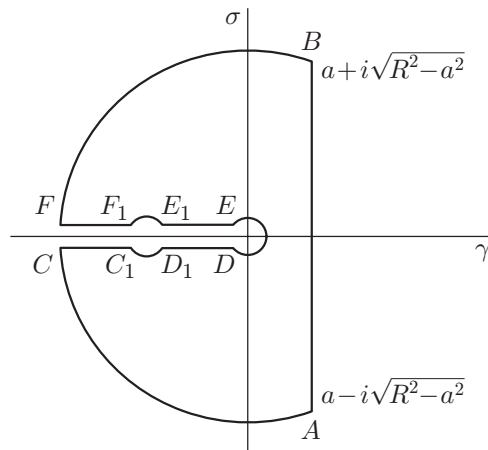


Рис. 2. Контур интегрирования

Для поиска оригиналов изображений (2.7) используем теорему обращения Мелли-на [14]

$$\begin{aligned}\bar{f}(\bar{x}, \bar{t}) &= L^{-1}\{F(\bar{x}, \omega)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(\bar{x}, \omega) e^{\omega \bar{t}} d\omega, \\ \bar{f}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) &= L^{-1}\{F(\bar{x}, \bar{y}, \omega)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(\bar{x}, \bar{y}, \omega) e^{\omega \bar{t}} d\omega.\end{aligned}\quad (2.8)$$

Изображения давления в (2.7) на комплексной плоскости имеют единственную особую точку — полюс в начале координат. Эта точка является также точкой ветвления. Еще одна точка ветвления $\omega = -B$ лежит на отрицательной действительной полуоси. Для изображения скорости эта точка является также полюсом. Для интегрирования изображений рассмотрим замкнутый контур на комплексной плоскости с разрезом вдоль отрицательной действительной полуоси (рис. 2). Внутри выбранного контура и на контуре функции (2.7) являются однозначными аналитическими функциями.

Обход от точки A до точки C происходит по часовой стрелке. Далее обходится контур $CC_1D_1DEE_1F_1FBA$. Обозначим дуги AC и FB соответственно через C_R^1 и C_R^2 , окружность DE — через C_r , а координаты точек $F(C)$ и $E(D)$ — через $(-R, 0)$ и $(-r, 0)$ соответственно. Координаты точек A и B равны $(a, \pm\sqrt{R^2 - a^2})$ соответственно. Полуокружности C_1D_1 и E_1F_1 обозначим C_r^1 и C_r^2 соответственно. Найдем оригинал изображения пластического давления в (2.7):

$$\bar{p}_r(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} P_r(\bar{x}, \bar{y}, \omega) e^{\omega \bar{t}} d\omega = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \int_{a-i\sqrt{R^2-a^2}}^{a+i\sqrt{R^2-a^2}} P_r(\bar{x}, \bar{y}, \omega) e^{\omega \bar{t}} d\omega. \quad (2.9)$$

Поскольку подынтегральная функция на выбранном контуре является регулярной, согласно теореме Коши [14] имеем

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \int_{a-i\sqrt{R^2-a^2}}^{a+i\sqrt{R^2-a^2}} P_r(\bar{x}, \bar{y}, \omega) e^{\omega \bar{t}} d\omega = \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \left[\int_{C_R^1} P_r(\bar{x}, \bar{y}, \omega) e^{\omega \bar{t}} d\omega + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{C_R^2} P_r(\bar{x}, \bar{y}, \omega) e^{\omega \bar{t}} d\omega + \int_{C_r} P_r(\bar{x}, \bar{y}, \omega) e^{\omega \bar{t}} d\omega + \int_{C_r^1} P_r(\bar{x}, \bar{y}, \omega) e^{\omega \bar{t}} d\omega + \\
& + \int_{C_r^2} P_r(\bar{x}, \bar{y}, \omega) e^{\omega \bar{t}} d\omega + \int_{-R}^{-r} P_r(\bar{x}, \bar{y}, \omega) e^{\omega \bar{t}} d\omega + \int_{-r}^{-R} P_r(\bar{x}, \bar{y}, \omega) e^{\omega \bar{t}} d\omega \Big]. \quad (2.10)
\end{aligned}$$

Изображения (2.7) стремятся к нулю при $\omega \rightarrow \infty$. Следовательно, в соответствии с леммой Жордана [14] интегралы по C_R^1 и C_R^2 в (2.9) стремятся к нулю при $R \rightarrow \infty$.

Далее рассмотрим интеграл по контуру C_r при $r \rightarrow 0$. На контуре C_r имеем

$$\omega = r e^{i\varphi}, \quad \omega^{1/2} = r^{1/2} e^{i\varphi/2}, \quad \omega^{1/4} = r^{1/4} e^{i\varphi/4}. \quad (2.11)$$

Подставляя выражения (2.11) в интеграл по этому контуру, получаем

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} P_r(\bar{x}, \bar{y}, \omega) e^{\omega \bar{t}} d\omega = \lim_{r \rightarrow 0} i \int_{C_r} e^{-\sqrt{Ar^{1/2} e^{i\varphi/2}(r e^{i\varphi} + B)} \bar{x} - \sqrt{r} e^{i\varphi/2} \bar{y} + r e^{i\varphi} \bar{t}} d\varphi = 2\pi i. \quad (2.12)$$

Аналогичным образом рассмотрим при $r \rightarrow 0$ интегралы по контурам C_r^1 и C_r^2 , окружающим точку ветвления $\omega = -B$ ($\omega = -B + r e^{i\varphi}$). Получаем

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r^1} P_r(\bar{x}, \bar{y}, \omega) e^{\omega \bar{t}} d\omega = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r^2} P_r(\bar{x}, \bar{y}, \omega) e^{\omega \bar{t}} d\omega = 0. \quad (2.13)$$

Наконец, рассмотрим интегралы на нижнем и верхнем берегах разреза вдоль действительной оси. Заметим, что вдоль нижнего разреза $\omega = \rho e^{-i\pi}$, $\sqrt{\omega} = -i\sqrt{\rho}$, $\omega^{1/4} = \rho^{1/4} e^{-i\pi/4}$, вдоль верхнего разреза $\omega = \rho e^{i\pi}$, $\sqrt{\omega} = i\sqrt{\rho}$, $\omega^{1/4} = \rho^{1/4} e^{i\pi/4}$. Вычислим соответствующие интегралы

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \int_{-R}^{-r} P_r(\bar{x}, \bar{y}, \omega) e^{\omega \bar{t}} d\omega &= - \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \int_r^R \frac{1}{\rho} e^{-\rho \bar{t} - \sqrt[4]{\rho} (1/\sqrt{2} - i/\sqrt{2}) \sqrt{A(B-\rho)} \bar{x} + i\sqrt{\rho} \bar{y}} d\rho = \\
&= - \int_0^\infty \frac{1}{\rho} e^{-(\sqrt[4]{\rho/4} \sqrt{A(B-\rho)} \bar{x} + \rho \bar{t})} e^{i(\sqrt[4]{\rho/4} \sqrt{A(B-\rho)} \bar{x} + \sqrt{\rho} \bar{y})} d\rho; \quad (2.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \int_{-r}^{-R} P_r(\bar{x}, \bar{y}, \omega) e^{\omega \bar{t}} d\omega &= \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \int_r^R \frac{1}{\rho} e^{-\rho \bar{t} - \sqrt[4]{\rho} (1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2}) \sqrt{A(B-\rho)} \bar{x} - i\sqrt{\rho} \bar{y}} d\rho = \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{\rho} e^{-(\sqrt[4]{\rho/4} \sqrt{A(B-\rho)} \bar{x} + \rho \bar{t})} e^{-i(\sqrt[4]{\rho/4} \sqrt{A(B-\rho)} \bar{x} + \sqrt{\rho} \bar{y})} d\rho. \quad (2.15)
\end{aligned}$$

Из (2.9), (2.10), (2.12)–(2.15) следует

$$\bar{p}_r(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\rho} e^{-(\sqrt[4]{\rho/4} \sqrt{A(B-\rho)} \bar{x} + \rho \bar{t})} \sin(\sqrt[4]{\rho/4} \sqrt{A(B-\rho)} \bar{x} + \sqrt{\rho} \bar{y}) d\rho. \quad (2.16)$$

Выполнив в (2.16) замену координат $\rho^{1/4}/\sqrt{2} = u$, получаем

$$\bar{p}_r(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = 1 - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{u} e^{-(u\sqrt{A(B-4u^4)}\bar{x} + 4u^4\bar{t})} \sin(u\sqrt{A(B-4u^4)}\bar{x} + 2u^2\bar{y}) du,$$

$$B - 4u^4 > 0,$$

или

$$\bar{p}_r(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = 1 - \frac{4}{\pi} \int_0^{\sqrt[4]{B/4}} \frac{1}{u} e^{-(u\sqrt{A(B-4u^4)}\bar{x} + 4u^4\bar{t})} \sin(u\sqrt{A(B-4u^4)}\bar{x} + 2u^2\bar{y}) du. \quad (2.17)$$

Полагая в (2.17) согласно (1.21) $\bar{y} = 0$, получаем решение для безразмерного давления в трещине

$$\bar{p}(\bar{x}, \bar{t}) = 1 - \frac{4}{\pi} \int_0^{\sqrt[4]{B/4}} \frac{1}{u} e^{-(u\sqrt{A(B-4u^4)}\bar{x} + 4u^4\bar{t})} \sin(u\sqrt{A(B-4u^4)}\bar{x}) du. \quad (2.18)$$

Проводя аналогичные вычисления по контуру, представленному на рис. 2, для изображения скорости (первая формула (2.7)) и учитывая, что интегралы по дугам C_1D_1 и E_1F_1 стремятся к нулю при $r \rightarrow 0$, из первого равенства (2.8) получаем выражение для распределения скорости в трещине

$$\begin{aligned} \bar{v}(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{4\sqrt{A}}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{B-4u^4}} e^{-(u\sqrt{A(B-4u^4)}\bar{x} + 4u^4\bar{t})} & \left[\cos(u\sqrt{A(B-4u^4)}\bar{x}) - \right. \\ & \left. - \sin(u\sqrt{A(B-4u^4)}\bar{x}) \right] du, \quad B - 4u^4 > 0, \end{aligned}$$

или

$$\bar{v}(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{4\sqrt{2A}}{\pi} \int_0^{\sqrt[4]{B/4}} \frac{1}{\sqrt{B-4u^4}} e^{-(u\sqrt{A(B-4u^4)}\bar{x} + 4u^4\bar{t})} \cos\left(u\sqrt{A(B-4u^4)}\bar{x} + \frac{\pi}{4}\right) du. \quad (2.19)$$

Непосредственная проверка показывает, что выражения (2.17)–(2.19) являются точными решениями системы уравнений (1.19)–(1.21). Проверка граничных условий для полученных решений выполняется элементарно. Выполнение начальных условий для (2.17)–(2.19) следует из теоремы обращения Меллина при $t < 0$ [14].

Знаки размерных давлений (2.17), (2.18) и выражения для скорости (2.19) автоматически определяются разностью величин забойного и пластового давлений. Таким образом, полученные решения применимы как при закачке жидкости в пласт, так и при отборе жидкости из пласта в соответствии с (1.16), (1.17).

Из (2.17) получаем точное решение для размерной утечки жидкости в пласт от стенок трещины (притока из пласта в трещину)

$$u_L(x, t) = C \frac{\partial \bar{p}_r}{\partial \bar{y}} \Big|_{\bar{y}=0} = \frac{8C}{\pi} \int_0^{\sqrt[4]{B/4}} u e^{-(u\sqrt{A(B-4u^4)}\bar{x} + 4u^4\bar{t})} \cos(u\sqrt{A(B-4u^4)}\bar{x}) du. \quad (2.20)$$

Знак выражения (2.20) автоматически определяется знаком градиента давления и знаком константы C согласно (1.16), (1.17).

Решение (2.20) можно, например, использовать при численном моделировании утечек в трассерных исследованиях пласта, содержащего “промытые” эрозией вертикальные трещины автоГРП, с применением сложных пространственных моделей.

Решение для давления в пласте (2.17) позволяет записать размерные уравнения прямолинейных траекторий частиц жидкости в пласте в виде

$$\frac{dy_r(x, t)}{dt} = \frac{C}{m} \frac{\partial \bar{p}_r}{\partial \bar{y}} = \frac{8C}{\pi m} \int_0^{\sqrt[4]{B/4}} u e^{-(u\sqrt{A(B-4u^4)}\bar{x}+4u^4\bar{t})} \cos(u\sqrt{A(B-4u^4)}\bar{x} + 2u^2\bar{y}) du, \quad (2.21)$$

$$y_r(x, 0) = 0.$$

Знак выражения (2.21) также автоматически определяется для закачки и отбора жидкости.

Решение (2.19) определяет закон движения жидкости в трещине:

$$\frac{dx_f}{dt} = \frac{4v_*\sqrt{2A}}{\pi} \int_0^{\sqrt[4]{B/4}} \frac{1}{\sqrt{B-4u^4}} e^{-(u\sqrt{A(B-4u^4)}\bar{x}+4u^4\bar{t})} \cos\left(u\sqrt{A(B-4u^4)}\bar{x} + \frac{\pi}{4}\right) du, \quad (2.22)$$

$$x_f(0) = 0.$$

Уравнения траекторий (2.21), (2.22) можно использовать для определения момента времени, до которого полученные решения справедливы для трещины и пласта конечных размеров, и будут использованы при построении графиков решений.

Из решения для скорости (2.19) непосредственно получить зависимость расхода от времени на скважине затруднительно. Можно найти асимптотику расхода жидкости на скважине при больших временах ($t \rightarrow \infty$), используя разложение первого равенства (2.7) при малых значениях параметра ω [13]. Однако в настоящей работе проведем следующие преобразования.

Поскольку изображение скорости (2.7) можно представить в виде

$$V(\bar{x}, \omega) = \frac{\sqrt{\omega^{1/2}(\omega+B)A}}{(\omega+B)\omega} e^{-\bar{x}\sqrt{\omega^{1/2}(\omega+B)A}} = \omega^{1/4} \frac{\sqrt{A}}{\omega\sqrt{\omega+B}} e^{-\bar{x}\sqrt{\omega^{1/2}(\omega+B)A} + \omega\bar{t}},$$

с учетом соотношения

$$L^{-1}(\omega^{1/4}) = \bar{t}^{-5/4}/\Gamma(-1/4)$$

из теоремы умножения изображений следует

$$\bar{v}(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{\sqrt{A}}{\Gamma(-1/4)} \int_0^{\bar{t}} \tau^{-5/4} f(\bar{x}, \bar{t} - \tau) d\tau. \quad (2.23)$$

С использованием рассмотренного выше способа находим оригинал входящей в (2.23) неизвестной функции

$$\begin{aligned} f(\bar{x}, \bar{t}) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{1}{\omega\sqrt{\omega+B}} e^{-\bar{x}\sqrt{\omega^{1/2}(\omega+B)A} + \omega\bar{t}} d\omega = \\ &= \frac{1}{\sqrt{B}} - \frac{4}{\pi} \int_0^{\sqrt[4]{B/4}} \frac{1}{u\sqrt{B-4u^4}} e^{-(u\sqrt{A(B-4u^4)}\bar{x}+4u^4\bar{t})} \sin(u\sqrt{A(B-4u^4)}\bar{x}) du \end{aligned}$$

и из (2.23) получаем закон изменения расхода во времени:

$$\bar{v}(0, \bar{t}) = \frac{\sqrt{A}}{\Gamma(-1/4)} \int_0^{\bar{t}} \tau^{-5/4} f(0, \bar{t} - \tau) d\tau = 0,816 \sqrt{\frac{A}{B}} \frac{1}{\bar{t}^{1/4}}. \quad (2.24)$$

Из решения (2.24) для расхода на скважине в размерных переменных следует выражение

$$Q_0(t) = whv_* \bar{v}(0, \bar{t}) = 1,1539 \frac{hw^{1/2} k^{1/4} k_f^{1/2} \beta_*^{1/4} (p_w - p_k)}{(1 - m)^{1/2} \mu^{3/4}} t^{-1/4}, \quad (2.25)$$

где $k_f = w^2/12$ — эффективная проницаемость незакрепленной трещины. Решение (2.25) с точностью до множителя $(1 - m)^{-1/2}$ (отличие числового множителя составляет менее 0,2 %) совпадает с асимптотическим решением для больших времен в случае закрепленной проппантом трещины [4]:

$$Q_0(t) = 1,156 \frac{hw^{1/2} k^{1/4} k_f^{1/2} m_f^{1/4} \beta_*^{1/4} (p_w - p_k)}{\mu^{3/4}} t^{-1/4}, \quad (2.26)$$

если в последнем устремить коэффициент пористости линейно-упругой среды в трещине к единице ($m_f \rightarrow 1$). Поскольку характерная длина в рассматриваемой постановке задачи отсутствует, она, как и следовало ожидать, не входит в уравнения (2.25), (2.26).

Таким образом, при заданном перепаде давления расход не зависит (с точностью до множителя) от того, закреплена трещина проппантом или рассматривается трещина фиксированной ширины. Очевидно, что в случае трещины, подвергшейся эрозии, расход на скважине значительно больше, поскольку в этом случае выше эффективная проницаемость трещины, а пористость равна единице.

3. Результаты численных расчетов. По полученным аналитическим решениям построим зависимости двумерного давления в пласте, давления и скорости в трещине, а также утечек в пласт в некоторые моменты времени. При этом используем следующие параметры. В качестве жидкости использовалась вода с плотностью $\rho = 1000$ кг/м³, вязкостью $\mu = 0,001$ Па·с, коэффициентом упругоэластичности $\beta_l = 10^{-10}$ Па⁻¹. Коэффициент упругоэластичности скелета породы равен $\beta_s = 10^{-11}$ Па⁻¹, пористость пласта $m = 0,1$, проницаемости пород варьировались в диапазоне от 1 до 100 мД, длина трещины и размеры пласта совпадают и равны $L = 500$ м, ширина трещины $w = 0,0001$ м, пластовое давление равно $p_k = 100$ атм, давление закачки жидкости $p_{wn} = 150$ атм.

Полученные аналитические решения справедливы для трещины и пласта бесконечных протяженностей, поэтому, применяя полученное решение к пласту и трещине конечной протяженности, необходимо контролировать координаты фронта жидкости в трещине и пласте при закачке жидкости через добывающую скважину. Полученные решения для давления и скорости течения в трещине, а также для давления в пласте справедливы для значений времени, когда координата фронта жидкости в пласте и координата фронта жидкости в трещине, рассчитанные по уравнениям траекторий (2.21), (2.22), еще не достигли соответствующих границ. Эти условия соблюдаются при построении графиков решений.

На рис. 3 показано изменение давления по длине трещины для двух моментов времени при различных значениях проницаемости пласта. Видно, что чем выше проницаемость пласта, тем быстрее уменьшается давление в трещине вследствие большей утечки в пласт. Со временем волна давления продвигается по трещине.

На рис. 4 показано изменение скорости течения по длине трещины для тех же моментов времени, что и на рис. 3, при различных значениях проницаемости пласта. Видно, что

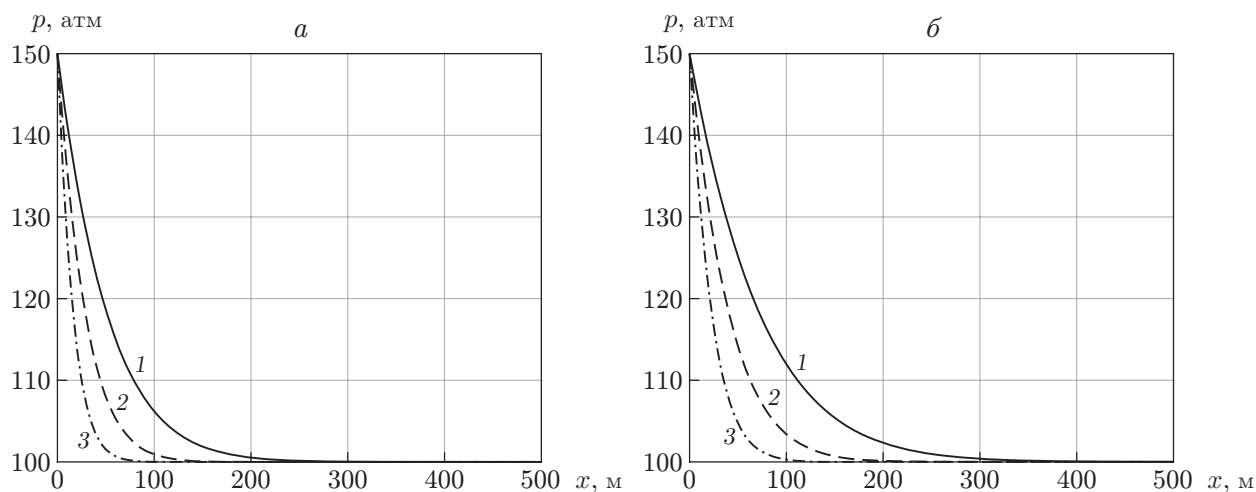


Рис. 3. Распределение давления в трещине при $t = 12$ ч (а) и $t = 48$ ч (б) и различных значениях проницаемости пласта:
1 — $k = 1$ мД, 2 — $k = 10$ мД, 3 — $k = 100$ мД

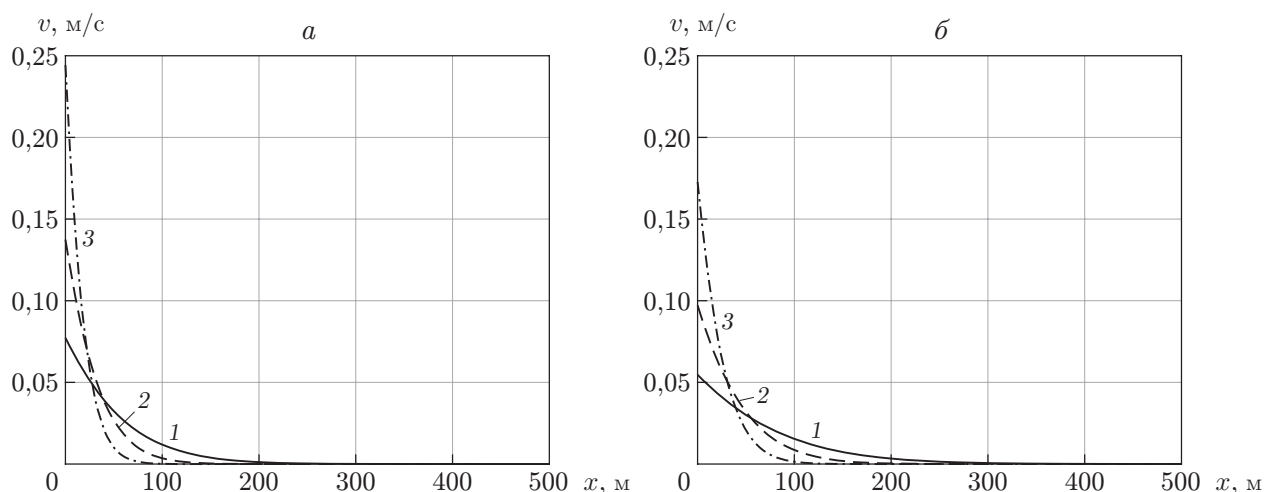


Рис. 4. Распределение скорости течения в трещине при $t = 12$ ч (а) и $t = 48$ ч (б) и различных значениях проницаемости пласта:
1 — $k = 1$ мД, 2 — $k = 10$ мД, 3 — $k = 100$ мД

чем выше проницаемость пласта, тем быстрее уменьшается скорость течения вследствие падения давления (см. рис. 3) в трещине и большей утечки в пласт.

На рис. 5 показаны изолинии нестационарного двумерного поля давления в пласте для двух моментов времени при проницаемости пласта $k = 1$ мД. Видно, что со временем в пласте при билинейном течении в системе эрозированная трещина — водонасыщенный пласт происходит нагнетание давления. Изолинии расположены под углом к оси y . С течением времени фронт давления продвигается вдоль оси x , а угол наклона изолиний к оси ординат уменьшается, стремясь к нулю.

На рис. 6 показано изменение скорости утечек из трещины в пласт по длине трещины в те же моменты времени, что и на рис. 3, 4, и при тех же значениях проницаемости пласта. Скорость утечек уменьшается с течением времени и по длине трещины, а передний фронт перемещается вдоль трещины. В случае высокопроницаемых пластов фронт утечек

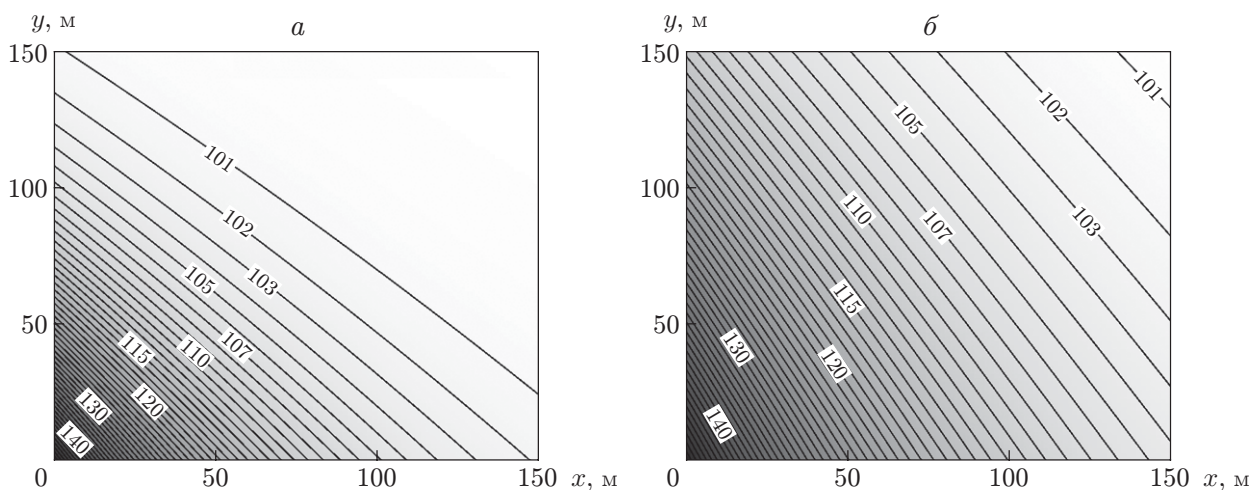


Рис. 5. Распределение давления (в атмосферах) в пласте при $t = 12$ ч (а) и $t = 48$ ч (б)

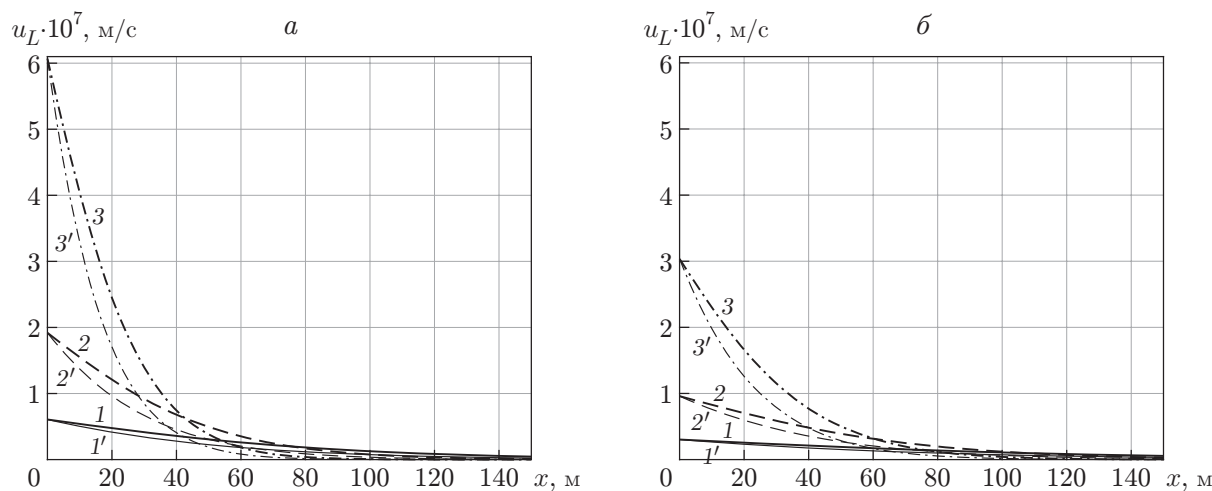


Рис. 6. Распределения скорости утечки жидкости в пласт по длине трещины при $t = 12$ ч (а) и $t = 48$ ч (б) и различных значениях проницаемости пласта: 1–3 — утечка, вычисленная по формуле (2.20), 1'–3' — утечка Картера, вычисленная по формуле (3.1); 1, 1' — $k = 1$ мД, 2, 2' — $k = 10$ мД, 3, 3' — $k = 100$ мД

движется по трещине медленнее, чем в случае низкопроницаемых пластов, вследствие более существенного уменьшения скорости течения в трещине. Для трещин любой ширины и пластов любой проницаемости существуют определенный момент времени (до момента прихода фронта жидкости к концу трещины) и определенное сечение трещины, за которым утечки жидкости из трещины в пласт еще не происходит. Данное сечение определяется границей невозмущенного пластового давления (см. рис. 3, 4). За этим сечением давление в пласте является постоянным и равно начальному пластовому давлению. На рис. 6 также показано автомодельное решение [13] для нагнетательной галереи при постоянном давлении закачки:

$$u_L(x, t) = \frac{k}{\mu} \frac{p - p_k}{\sqrt{\pi \chi t}} = \frac{C_L}{\sqrt{t}} \quad (3.1)$$

так называемая утечка Картера [15], зависящая от общей сжимаемости пласта и пластового флюида [16]. Формула (3.1) используется в симуляторах ГРП [17] для вычисления об-

щей динамической утечки [16]. На рис. 6 видно, что утечки, описываемые формулой (3.1), совпадают с утечками в билинейном потоке лишь в начале и в конце трещины во все рассматриваемые моменты времени. На большей части длины трещины различие утечек сначала увеличивается, затем уменьшается, т. е. имеет место немонотонное распределение погрешности решений по длине трещины. Во всех расчетах максимальная погрешность определения утечек равна 60 %. При этом в билинейном потоке утечки всегда превышают утечки Картера.

Полученные аналитические решения могут использоваться при тестировании численных схем симуляторов, моделирующих процессы фильтрации в линейно-упругих пластах с вертикальными трещинами автоГРП или естественными магистральными трещинами, промытыми фильтрационными потоками в результате эрозии.

Заключение. В работе представлена модель билинейного нестационарного течения в системе эрозированная трещина — водонасыщенный линейно-упругий пласт бесконечной протяженности. Получены аналитическое решение задачи для нестационарных полей давления в пласте и трещине и скорости течения в трещине при постоянном давлении на нагнетательной скважине, а также при постоянном пластовом давлении в случае мгновенного включения нагнетательного насоса в изначально не возмущенной системе трещина — пласт. Получено аналитическое решение для фильтрационных утечек из трещины в пласт, а также уравнения траекторий течения жидкости в трещине и пласте, позволяющие определить значения времени, при которых полученные решения справедливы для конечных размеров трещин и пластов. Построены поля давления, распределения скорости течения в трещине, а также утечек жидкости из трещины ограниченной длины в конечный пласт. Полученные решения также описывают течение флюида в трещине и пласте при отборе жидкости в добывающую скважину.

ЛИТЕРАТУРА

1. Каневская Р. Д. Математическое моделирование разработки месторождений нефти и газа с применением гидравлического разрыва пласта. М.: Недра-Бизнесцентр, 1999.
2. Давлетбаев А. Я., Асалхузина Г. Ф., Иващенко Д. С. и др. Гидродинамические методы контроля за развитием трещин автоГРП при заводнении в низкопроницаемых коллекторах // Russian petroleum technology: Materials of SPE conf. М.: S. n., 2015. SPE-176562. DOI: 10.2118/176562-MS.
3. Cinco-Ley H., Samaniego V. F. Transient pressure analysis for fractured wells // J. Petrol. Technol. 1981. V. 33, N 9. P. 1749–1766.
4. Нагаева З. М., Шагапов В. Ш. Об упругом режиме фильтрации в трещине, расположенной в нефтяном или газовом пласте // Прикл. математика и механика. 2017. Т. 81, № 3. С. 319–329.
5. Хабибуллин И. Л., Хисамов А. А. К теории билинейного режима фильтрации в пластах с трещинами гидроразрыва // Вестн. Башкир. ун-та. 2018. Т. 23, № 4. С. 958–963.
6. Хабибуллин И. Л., Хисамов А. А. Нестационарная фильтрация в пласте с трещиной гидроразрыва // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2019. № 5. С. 6–14.
7. Шагапов В. Ш., Башмаков Р. А., Фокеева Н. О. Особенности фильтрации флюидов в коллекторах, подверженных гидроразрыву пласта, при переходных режимах работы скважины // ПМТФ. 2022. Т. 63, № 3. С. 117–127.
8. Хабибуллин И. Л., Хисамов А. А. Моделирование неустановившейся фильтрации жидкости в пласте с трещиной гидроразрыва // ПМТФ. 2022. Т. 63, № 4. С. 116–125.

9. **Асалхузина Г. Ф., Давлетбаев А. Я., Хабибуллин И. Л.** Моделирование дифференциации пластового давления между нагнетательными и добывающими скважинами на месторождениях с низкопроницаемыми коллекторами // Вестн. Башкир. ун-та. 2016. Т. 21, № 3. С. 537–542.
10. **Ильясов А. М., Булгакова Г. Т.** Моделирование течения вязкой жидкости в магистральной вертикальной трещине с проницаемыми стенками // Мат. моделирование. 2016. Т. 28, № 7. С. 60–85.
11. **Ильясов А. М., Исмагилов Т. А., Ганиев И. М., Магзянов И. Р.** Математическая модель течения трассерной жидкости в магистральной трещине // Автоматизация, телемеханизация и связь в нефт. пром-сти. 2017. № 11. С. 11–15.
12. **Ландау Л. Д.** Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Физматлит, 2003.
13. **Баренблатт Г. И.** Движение жидкости и газов в природных пластах / Г. И. Баренблатт, В. И. Ентов, В. М. Рыжик. М.: Недра, 1984.
14. **Лаврентьев М. А.** Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. СПб.: Лань, 2002.
15. **Carter R. D.** Derivation of the general equation for estimating the extent of fractured area // Drilling and production practice. S. l.: Amer. Petrol. Inst., 1957. P. 261–269.
16. **Settari A.** A new general model of fluid loss in hydraulic fracturing // SPE J. 1985. V. 25, N 4. P. 491–501.
17. **Economides M. J.** Reservoir simulation / M. J. Economides, K. G. Nolte. N. Y.; Chichester: Wiley, 2000.

*Поступила в редакцию 13/II 2023 г.,
после доработки — 13/II 2023 г.
Принята к публикации 24/IV 2023 г.*
