

УДК 517.392

Об одном методе построения квадратурных формул для вычисления гиперсингулярных интегралов

И.В. Бойков, А.И. Бойкова

Пензенский государственный университет, ул. Красная, 40, Пенза, 440026

E-mails: i.v.boikov@gmail.com (Бойков И.В.), allaboikova@mail.ru (Бойкова А.И.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 3, Vol. 15, 2022.

Бойков И.В., Бойкова А.И. Об одном методе построения квадратурных формул для вычисления гиперсингулярных интегралов // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2022. — Т. 25, № 3. — С. 249–267.

Статья посвящена построению квадратурных формул вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Для вычисления сингулярных интегралов с весовыми функциями $(1-t)^{\gamma_1}(1+t)^{\gamma_2}$, $\gamma_1, \gamma_2 > -1$, определенных на интервале $[-1, 1]$, построены квадратурные формулы, равномерно сходящиеся к исходному интегралу на всем интервале $[-1, 1]$ при весах $(1-t)^{\gamma_1}(1+t)^{\gamma_2}$, $\gamma_1, \gamma_2 \geq -1/2$, и сходящихся к исходному интегралу при $-1 < t < 1$ при весах $(1-t)^{\gamma_1}(1+t)^{\gamma_2}$, $\gamma_1, \gamma_2 > -1$. В последнем случае последовательность квадратурных формул сходится к вычисляемому интегралу равномерно на сегментах $[-1+\delta, 1-\delta]$, где $\delta > 0$ — как угодно малое число. Предложен метод построения и оценки погрешности квадратурных формул вычисления гиперсингулярных интегралов, основанный на преобразовании квадратурных формул вычисления сингулярных интегралов. Предложен метод оценки погрешности квадратурных формул вычисления сингулярных интегралов, основанный на методах теории приближения. Полученные результаты распространены на полигиперсингулярные интегралы.

DOI: 10.15372/SJNM20220303

Ключевые слова: сингулярные интегралы, гиперсингулярные интегралы, квадратурные формулы.

Boikov I.V., Boikova A.I. On one method of constructing quadrature formulas for computing hypersingular integrals // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2022. — Vol. 25, № 3. — P. 249–267.

This paper is devoted to constructing quadrature formulas for singular and hypersingular integrals evaluation. For evaluating the integrals with the weights $(1-t)^{\gamma_1}(1+t)^{\gamma_2}$, $\gamma_1, \gamma_2 > -1$, defined on $[-1, 1]$, we have constructed quadrature formulas uniformly converging on $[-1, 1]$ to the original integral with the weights $(1-t)^{\gamma_1}(1+t)^{\gamma_2}$, $\gamma_1, \gamma_2 \geq -1/2$, and converging to the original integral for $-1 < t < 1$ with the weights $(1-t)^{\gamma_1}(1+t)^{\gamma_2}$, $\gamma_1, \gamma_2 > -1$. In the latter case a sequence of quadrature formulas converges to evaluating integral uniformly on $[-1+\delta, 1-\delta]$, where $\delta > 0$ is arbitrarily small. We propose a method for construction and error estimate of quadrature formulas for evaluating hypersingular integrals based on transformation of quadrature formulas for evaluation of singular integrals. We also propose a method of the error estimate for quadrature formulas for singular integrals evaluation based on the approximation theory methods. The results obtained were extended to hypersingular integrals.

Keywords: singular integrals, hypersingular integrals, quadrature formulas.

1. Введение

Приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов являются активно развивающимися направлениями в вычислительной математике. Это

обусловлено двумя обстоятельствами: во-первых, методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов в аналитическом виде известны только для очень узких классов функций; во-вторых, число приложений, в которых возникает необходимость в вычислении сингулярных и гиперсингулярных интегралов, постоянно возрастает.

Первые работы по приближенным методам вычисления сингулярных интегралов были опубликованы в середине 50-х годов прошлого столетия и к настоящему времени многие разделы этого направления можно считать практически завершенными. Тем не менее имеется ряд разделов, исследования в которых далеки от завершения. К такому разделу относится, в частности, исследование методов вычисления сингулярных интегралов $\int_{-1}^1 \frac{x(\tau) d\tau}{\tau - t}$ на классах функций вида $x(t) = (1-t)^{\alpha_1+i\beta_1}(1+t)^{\alpha_2+i\beta_2}\varphi(t)$, $\alpha_l > -1$, $l = 1, 2$, где $\varphi(t)$ — гладкая функция, начатое в работах [1, 2]. Достаточно подробные обзоры по приближенным методам вычисления сингулярных интегралов содержатся в [3–6].

Приближенные методы вычисления гиперсингулярных интегралов начали развиваться значительно позже — в восьмидесятые годы прошлого столетия и в настоящее время переживают бурное развитие — ежегодно публикуются десятки статей, среди которых отметим работы [7–13]. Обзоры приближенных методов вычисления гиперсингулярных интегралов содержатся в книгах [14, 15] и в статье [16]. Несмотря на это, развитие методов вычисления сингулярных интегралов опережает развитие методов вычисления гиперсингулярных интегралов.

До последнего времени внимание исследователей привлекали гиперсингулярные интегралы и гиперсингулярные интегральные уравнения с особенностями второго порядка. В последние два-три десятилетия в механике сплошной среды появился круг задач, которые приводят к гиперсингулярным интегральным уравнениям с особенностями третьего и четвертого порядков [9].

Представляет значительный интерес построение метода, позволяющего распространить ряд результатов, полученных для сингулярных интегралов, на гиперсингулярные интегралы.

В данной работе предлагается одно из решений этой проблемы.

Статья построена следующим образом. В пункте 2 приведены необходимые сведения из теории приближения, описаны классы функций, используемые в работе, и даны определения гиперсингулярных интегралов. Пункт 3 посвящен доказательству нескольких утверждений из теории приближения. В п. 4 построен метод распространения квадратурных формул вычисления сингулярных интегралов, определенных на единичной окружности, на квадратурные формулы для гиперсингулярных интегралов. В п. 5 аналогичные результаты представлены для гиперсингулярных интегралов, определенных на сегменте $[-1, 1]$. В шестом пункте кубатурные формулы вычисления полисингулярных интегралов распространены на полигиперсингулярные интегралы.

2. Вспомогательные утверждения

В работе используются следующие классы функций.

Пусть γ — единичная окружность с центром в начале координат на плоскости комплексной переменной. Пусть $A = [a, b]$ или $A = \gamma$.

Определение 2.1. Класс функций $H_\omega(A)$ состоит из заданных на A функций $f(x)$, имеющих модуль непрерывности ω .

Частным случаем класса $H_\omega(A)$ является следующий класс функций.

Определение 2.2. Класс функций Гельдера $H_\alpha(M; A)$ ($0 < \alpha \leq 1$) состоит из заданных на A функций $f(x)$, удовлетворяющих во всех точках x' и x'' этого множества неравенству $|f(x') - f(x'')| \leq M|x' - x''|^\alpha$.

В случае, когда из текста ясно на каком множестве рассматриваются функции, вместо $H_\alpha(M; A)$ будем писать $H_\alpha(M)$. Это замечание относится и к остальным классам функций.

Определение 2.3. Класс $W^r(M; A)$ состоит из функций, заданных на A непрерывных и имеющих непрерывные производные до $(r - 1)$ -го порядка включительно и кусочно-непрерывную производную r -го порядка, удовлетворяющую на этом множестве неравенству $|f^{(r)}(x)| \leq M$.

Определение 2.4. Класс $W^r H_\omega(M; A)$ состоит из функций $f(x)$, принадлежащих классу $W^r(M; A)$, r -е производные которых имеют модуль непрерывности ω .

Частным случаем класса $W^r H_\omega(M; A)$ является следующий класс функций.

Определение 2.5. Класс $W^r H_\alpha(M; A)$ состоит из функций $f(x)$, принадлежащих классу $W^r(M; A)$ и удовлетворяющих дополнительному условию $f^{(r)}(x) \in H_\alpha(M; A)$.

Пусть $L = \gamma_1 \times \gamma_2$, γ_i — единичная окружность с центром в начале координат на плоскости комплексной переменной z_i , $i = 1, 2$. Пусть $D = [a_1, b_1; a_2, b_2]$ или $D = L$.

Определение 2.6. Через $H_{\alpha_1 \alpha_2}(M, D)$ обозначен класс определенных на D функций $f(x, y)$ таких, что для любых точек (x', y') и (x'', y'') из D выполняется условие $|f(x', y') - f(x'', y'')| \leq M_1(|x' - x''|^{\alpha_1}) + M_2(|y' - y''|^{\alpha_2})$, $M = \max(M_1, M_2)$.

Определение 2.7. Через $W^{r_1, r_2}(M, D)$, $0 < M < \infty$, обозначен класс определенных на D функций $f(x_1, x_2)$, имеющих частные производные $f^{(v_1, v_2)}(x_1, x_2) = \frac{\partial^{v_1+v_2} f(x_1, x_2)}{\partial x_1^{v_1} \partial x_2^{v_2}}$ ($0 \leq v_i \leq r_i$, $i = 1, 2$), причем $\|f^{(r_1, r_2)}(x_1, x_2)\|_{C(D)} \leq M$, $\|f^{(r_1, j)}(x_1, 0)\|_{C(D)} \leq M$, $j = 0, 1, \dots, r_2 - 1$, $\|f^{(i, r_2)}(0, x_2)\|_{C(D)} \leq M$, $i = 0, 1, \dots, r_1 - 1$.

Определение 2.8. Через $W^{r_1, r_2} H_{\alpha_1, \alpha_2}(M, A, D)$, $0 < M, A < \infty$, обозначен класс функций $f(x_1, x_2) \in W^{r_1, r_2}(M, D)$, частные производные которых $f^{(v_1, v_2)}(x_1, x_2) = \frac{\partial^{v_1+v_2} f(x_1, x_2)}{\partial x_1^{v_1} \partial x_2^{v_2}}$ ($0 \leq v_i \leq r_i$, $i = 1, 2$) удовлетворяют условию Гельдера $H_{\alpha_1, \alpha_2}(A, D)$.

Определение 2.9. Через $\widetilde{W}^r(M; [a, b])$ обозначается класс периодических функций с периодом $(b - a)$, входящих в класс $W^r(M; [a, b])$.

Аналогичным образом определяется класс функций $\widetilde{W}^{r_1, r_2} H_{\alpha_1, \alpha_2}(M, A, D)$.

В работе используются следующие определения гиперсингулярных и бигиперсингулярных интегралов.

Определение 2.10. Пусть $f(t) \in W^r H_\alpha(M; [-1, 1])$, $r = 1, 2, \dots$, $0 < \alpha \leq 1$. Гиперсингулярный интеграл с особенностью $(p + 1)$ -го порядка, $p \leq r$, определяется формулой

$$\int_{-1}^1 \frac{f(\tau)}{(\tau - t)^{p+1}} d\tau = \frac{1}{p!} \frac{\partial^p}{\partial t^p} \int_{-1}^1 \frac{f(\tau)}{\tau - t} d\tau.$$

Определение 2.11. Пусть $f(t_1, t_2) \in W^{r_1 r_2} H_{\alpha\alpha}(M; [-1, 1]^2)$, $r_i = 1, 2, \dots$, $0 < \alpha \leq 1$, $p_i \leq r_i$, $i = 1, 2$. Бигиперсингулярный интеграл с особенностью $(p_i + 1)$ -го порядка по переменной t_i , $i = 1, 2$, определяется формулой

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{f(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)^{p_1+1} (\tau_2 - t_2)^{p_2+1}} = \frac{1}{p_1! p_2!} \frac{\partial^{p_1+p_2}}{\partial t_1^{p_1} \partial t_2^{p_2}} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{f(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)(\tau_2 - t_2)}.$$

Ниже используются следующие утверждения из теории приближения.

Теорема 2.1 [17]. Если при некотором действительном s алгебраический многочлен $P_n(t)$ степени n удовлетворяет во всех точках $t \in [-1, 1]$ неравенству

$$|P_n(t)| \leq M(\rho_n(t))^s, \quad \rho_n(t) = \frac{\sqrt{1-t^2}}{n} + \frac{1}{n^2}, \quad M = \text{const},$$

то при произвольном фиксированном натуральном k его производная k -го порядка удовлетворяет неравенству $|P_n^{(k)}(t)| \leq A_1 M(\rho_n(t))^{s-k}$, где A_1 — постоянная, которая зависит только от s и k .

Теорема 2.2 [18]. Пусть $f(t) \in W^r H_\omega(M; [-1, 1])$, $t \in [-1, 1]$, $r = 1, 2, \dots$, $\omega(f, \delta)$ — модуль непрерывности функции f . Тогда для любого $r \in N$ найдется последовательность полиномов $P_n(t)$, $n \geq r - 1$, такая что

$$|f(t) - P_n(t)| \leq C(r) \left(\frac{\sqrt{1-t^2}}{n} + \frac{1}{n^2} \right)^r \omega \left(f^{(r)}, \frac{\sqrt{1-t^2}}{n} + \frac{1}{n^2} \right).$$

Константа $C(r)$ зависит только от r .

Теорема 2.3 [19]. Пусть $f(t) \in \tilde{C}[0, 2\pi]$, $P_n(t)$ — тригонометрический полином, удовлетворяющий неравенству $|f(t) - P_n(t)| \leq \eta_n$. Тогда $|f'(t) - P'_n(t)| \leq C n \eta_n$, где C — постоянная, не зависящая от n .

Следующее утверждение является обобщением теоремы 2.3 на алгебраические полиномы.

Теорема 2.4. Пусть $f(t) \in W^r(M, [-1, 1])$, $r = 2, 3, \dots$. Пусть для полинома $P_n(t)$ выполняется неравенство $|f(t) - P_n(t)| \leq C \frac{1}{n^r}$. Тогда $|f'(t) - P'_n(t)| \leq C \frac{1}{n^{r-1}}$.

Доказательство. Доказательство основано на методе, используемом в обратных теоремах конструктивной теории функций [20]. Обозначим через $T_n(t)$, $n = 1, 2, \dots$, полином наилучшего равномерного приближения функции $f(t)$ алгебраическими полиномами n -го порядка.

Рассмотрим ряд $S(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (T_{2^{k+1}n}(t) - T_{2^k n}(t)) + T_n(t) - P_n(t)$. Через $S_m(t)$ обозначим частную сумму

$$S_m(t) = \sum_{k=0}^m (T_{2^{k+1}n}(t) - T_{2^k n}(t)) + T_n(t) - P_n(t).$$

Нетрудно видеть, что

$$|T_{2^{k+1}n}(t) - T_{2^kn}(t)| \leq |T_{2^{k+1}n}(t) - f(t)| + |f(t) - T_{2^kn}(t)| \leq C \left(\frac{\sqrt{1-t^2}}{2^kn} + \frac{1}{2^{2k}n^2} \right)^r.$$

Следовательно, ряд $S(t)$ сходится равномерно и $f(t) = S(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} S_m(t)$.

Рассмотрим ряд $\sum_{k=0}^{\infty} (T_{2^{k+1}n}(t) - T_{2^kn}(t))' + (T_n(t) - P_n(t))'$. Из теоремы 2.1 следует, что $(T_{2^{k+1}n}(t) - T_{2^kn}(t))' \leq \frac{C}{(2^kn)^{r-1}}$. Так как $r \geq 2$, то ряд $\sum_{k=0}^{\infty} (T_{2^{k+1}n}(t) - T_{2^kn}(t))' + (T_n(t) - P_n(t))'$ равномерно сходится и $S'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (T_{2^{k+1}n}(t) - T_{2^kn}(t))' + (T_n(t) - P_n(t))' = f'(t) - P'_n(t)$.

Нетрудно видеть, что $\max_{-1 \leq t \leq 1} |f'(t) - P'_n(t)| \leq \frac{C}{n^{r-1}}$. $\square$

Замечание 2.1. Из доказательства теоремы следует, что если $|f(t) - P_n(t)| \leq C \left(\frac{\sqrt{1-t^2}}{2^kn} + \frac{1}{2^{2k}n^2} \right)^r$, то $|f'(t) - P'_n(t)| \leq C \left(\frac{\sqrt{1-t^2}}{2^kn} + \frac{1}{2^{2k}n^2} \right)^{r-1}$.

Распространим утверждения теорем 2.3 и 2.4 на многомерные случаи. При этом достаточно ограничиться двумерным случаем.

Теорема 2.5. Пусть $f(t_1, t_2) \in \widetilde{W}^{r_1, r_2}(M, [0, 2\pi]^2)$, $P_{n_1, n_2}(t_1, t_2)$ — тригонометрический полином, удовлетворяющий неравенству

$$\|f(t_1, t_2) - P_{n_1, n_2}(t_1, t_2)\|_{\widetilde{C}([0, 2\pi]^2)} \leq C \left(\frac{1}{n_1^{r_1}} + \frac{1}{n_2^{r_2}} \right).$$

Тогда

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t_i} (f(t_1, t_2) - P_{n_1, n_2}(t_1, t_2)) \right\|_{C([0, 2\pi]^2)} \leq C \left(\frac{1}{n_1^{r_1 - \delta_{1i}}} + \frac{1}{n_2^{r_2 - \delta_{2i}}} \right),$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

Теорема 2.6. Пусть $f(t_1, t_2) \in W^{r_1, r_2}(M, [-1, 1]^2)$, $P_{n_1, n_2}(t_1, t_2)$ — алгебраический полином, удовлетворяющий неравенству

$$|f(t_1, t_2) - P_{n_1, n_2}(t_1, t_2)| \leq C \left(\frac{1}{n_1^{r_1}} + \frac{1}{n_2^{r_2}} \right).$$

Тогда

$$\left| \frac{\partial}{\partial t_i} (f(t_1, t_2) - P_{n_1, n_2}(t_1, t_2)) \right| \leq C \left(\frac{1}{n_1^{r_1 - \delta_{1i}}} + \frac{1}{n_2^{r_2 - \delta_{2i}}} \right),$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

Доказательства теорем 2.5 и 2.6 аналогичны. Поэтому ограничимся доказательством теоремы 2.6.

Доказательство. Доказательство теоремы 2.6 подобно доказательству теоремы 2.4. Для определенности оценим модуль производной по переменной t_1 . Зафиксируем произвольное t_2 , $-1 \leq t_2 \leq 1$, и рассмотрим ряд

$$S(t_1, t_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(T_{2^{k+1}n_1, 2^{k+1}n_2}(t_1, t_2) - T_{2^k n_1, 2^k n_2}(t_1, t_2) \right) + T_{n_1, n_2}(t_1, t_2) - P_{n_1, n_2}(t_1, t_2), \quad (2.1)$$

где $T_{2^k n_1, 2^k n_2}(t_1, t_2)$ — полином наилучшего равномерного приближения функции $f(t_1, t_2)$ $2^k n_1$ -го порядка по переменной t_1 и $2^k n_2$ -го порядка по переменной t_2 . Из условия теоремы следует, что

$$|T_{2^{k+1}n_1, 2^{k+1}n_2}(t_1, t_2) - T_{2^k n_1, 2^k n_2}(t_1, t_2)| \leq C \left(\frac{1}{(2^k n_1)^{r_1}} + \frac{1}{(2^k n_2)^{r_2}} \right). \quad (2.2)$$

Применяя теорему 2.4, имеем при каждом фиксированном значении t_2

$$\begin{aligned} & |(T_{2^{k+1}n_1, 2^{k+1}n_2}(t_1, t_2) - T_{2^k n_1, 2^k n_2}(t_1, t_2))'_{t_1}| \\ & \leq C \left(\frac{1}{(2^k n_1)^{r_1-1}} + \frac{n_1}{2^{k(r_2-1)} n_2^{r_2}} \right) = C \left(\frac{1}{(2^k n_1)^{r_1-1}} + \frac{1}{(2^k n_2)^{r_2-1}} \right), \end{aligned} \quad (2.3)$$

т. к. n_1 и n_2 — фиксированные числа и отношение n_2/n_1 учитывается константой C .

Из неравенств (2.2), (2.3) следует, что ряд (2.1) и продифференцированный ряд (2.1) сходятся равномерно и, следовательно, $f(t_1, t_2) = S(t_1, t_2)$. Остальное очевидно. $\square$

3. Приближенное вычисление гиперсингулярных интегралов на замкнутых контурах

В этом пункте представим метод построения квадратурных формул вычисления интегралов вида

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{x(\tau)}{(\tau - t)^p} d\tau, \quad t \in \gamma, \quad p = 2, 3, \dots, \quad (3.1)$$

где γ — единичная окружность с центром в начале координат. Пусть $x \in W^r H_{\alpha}(M; \gamma)$. Рассмотрим интеграл

$$Kx \equiv \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{x(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad t \in \gamma.$$

Аппроксимируем функцию $x(t) = x(e^{is})$, $s \in [0, 2\pi]$, интерполяционным полиномом

$$\begin{aligned} x_n(t) &= \sum_{k=0}^{2n} x(t_k) \psi_k(s) = \sum_{k=0}^{2n} x(t_k) \frac{2}{2n+1} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n e^{il(s-s_k)} + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n e^{-il(s-s_k)} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{2n} x(t_k) \frac{1}{2n+1} \left(1 + \sum_{l=1}^n \frac{t^l}{t_k^l} + \sum_{l=1}^n \frac{t_k^l}{t^l} \right), \quad t_k = e^{is_k}, \quad s_k = \frac{2k\pi}{2n+1}, \quad k = 0, 1, \dots, 2n, \end{aligned}$$

где $\psi_k(s) = \frac{1}{2n+1} \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(s-s_k)}{\sin \frac{s-s_k}{2}} = \frac{2}{2n+1} \left(\frac{1}{2} + \cos(s-s_k) + \cos 2(s-s_k) + \dots + \cos n(s-s_k) \right)$.

Подставляя $x_n(t)$ в интеграл Kx , имеем

$$Kx \equiv Kx_n + R_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} x(t_k) \frac{1}{2n+1} \left(1 + \sum_{l=1}^n \frac{t^l}{t_k^l} - \sum_{l=1}^n \frac{t_k^l}{t^l} \right) + R_n(x). \quad (3.2)$$

Погрешность квадратурной формулы (3.2) оценивается неравенством

$$|R_n(x)| \leq Cn^{-r-\alpha} \ln n. \quad (3.3)$$

Так как x — произвольная функция класса функций $W^r H_\alpha(M; \gamma)$, то из (3.3) имеем $R_n[W^r H_\alpha(M; \gamma)] \leq Cn^{-r-\alpha} \ln n$.

Эта оценка следует из известной [19, 21] оценки погрешности вычисления сингулярных интегралов с ядром Гильберта квадратурными формулами интерполяционного типа по узлам $s_k = 2k\pi/(2n+1)$, $k = 0, 1, \dots, 2n$. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 3.1. Пусть $f(t) \in W^r H_\alpha(M; \gamma)$, $r = 1, 2, \dots$, $0 < \alpha \leq 1$. Квадратурная формула (3.2) имеет погрешность $R_n[W^r H_\alpha(M; \gamma)] \leq Cn^{-r-\alpha} \ln n$.

Рассмотрим гиперсингулярный интеграл

$$Cx \equiv \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{x(\tau)}{(\tau - t)^p} d\tau, \quad t \in \gamma, \quad p = 2, 3, \dots$$

Представим интеграл Cx в виде:

$$Cx = \frac{1}{(p-1)!} \frac{d^{p-1}}{dt^{p-1}} \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{x(\tau) d\tau}{\tau - t}.$$

Интеграл Cx будем вычислять по квадратурной формуле:

$$\begin{aligned} Cx &= \frac{1}{(p-1)!} \frac{d^{p-1}}{dt^{p-1}} \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{x_n(\tau) d\tau}{\tau - t} + R_n(x) \\ &= \frac{1}{2n+1} \frac{d^{p-1}}{dt^{p-1}} \left(\sum_{k=0}^{2n} x(t_k) \left(1 + \sum_{l=1}^n \frac{t^l}{t_k^l} - \sum_{l=1}^n \frac{t_k^l}{t^l} \right) \right) + R_n(x). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Оценим погрешность $|R_n(x)|$. Выше было показано, что

$$\left| \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{x(\tau)}{\tau - t} d\tau - \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{x_n(\tau) d\tau}{\tau - t} \right| \leq Cn^{-r-\alpha} \ln n.$$

Здесь $f(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{x(\tau) d\tau}{\tau - t}$ — 2π -периодическая функция вещественной переменной s , $t = e^{is}$, $f_n(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{x_n(\tau) d\tau}{\tau - t}$ — тригонометрический полином n -го порядка.

Из теоремы 2.3 следует, что

$$|R_n(x)| = \left| \frac{1}{(p-1)!} \frac{d^{p-1}}{dt^{p-1}} \left\{ \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{x(\tau) d\tau}{\tau - t} - \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{x_n(\tau) d\tau}{\tau - t} \right\} \right| \leq Cn^{-r-\alpha+p-1} \ln n.$$

Так как $x \in W^r H_\alpha(M; \gamma)$, то $R_n[W^r H_\alpha(M; \gamma)] \leq Cn^{-r-\alpha+p-1} \ln n$. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 3.2. На классе функций $W^r H_\alpha(M; \gamma)$ квадратурная формула (3.4) имеет погрешность $R_n(W^r H_\alpha(M; \gamma)) \leq Cn^{-r-\alpha+p-1} \ln n$.

Отметим, что оптимальные по порядку квадратурные формулы вычисления интегралов Cx имеют погрешность $R_n(W^r H_\alpha(M; \gamma)) \leq Cn^{-r-\alpha+p-1}$ [15], где n — число функционалов, используемых при построении квадратурной формулы.

Замечание 3.1. В настоящее время активно развиваются аналитические и численные методы исследования сингулярных интегралов с осциллирующими ядрами [22, 23]. В связи с этим представляет интерес распространение результатов, приведенных в данном пункте, на гиперсингулярные интегралы с осциллирующими ядрами. Очевидно их распространение на интегралы вида

$$\Gamma f \equiv \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\tau) \tau^m d\tau}{(\tau - t)^p}, \quad p = 2, 3, \dots, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (3.5)$$

$$\Xi f \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\sigma) \cos m\sigma d\sigma}{2 \sin^2 \frac{\sigma-s}{2}}, \quad m = 1, 2, \dots. \quad (3.6)$$

Следует отметить, что параметр m входит в оценки погрешности соответствующих квадратурных формул в случае интеграла (3.5) в $(p-1)$ -ой степени, а в случае интеграла (3.6) — в первой степени.

Для определенности остановимся на интеграле (3.6). Введем обозначение

$$Sf \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\sigma) \cos m\sigma \operatorname{ctg} \frac{\sigma-s}{2} d\sigma. \quad (3.7)$$

Нетрудно видеть, что $\frac{d}{ds} Sf = \Xi f$. Для вычисления интеграла Sf воспользуемся квадратурной формулой:

$$Sf = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_n[f(\sigma)] \cos m\sigma \operatorname{ctg} \frac{\sigma-s}{2} d\sigma + R_n[f],$$

где P_n — оператор проектирования на множество тригонометрических интерполяционных полиномов по узлам $s_k = \frac{2k\pi}{(2n+1)}$, $k = 0, 1, \dots, 2n$.

Пусть $f(s) \in W^r(M, \gamma)$, $r \geq 1$. Можно показать, что $R_n[f] \leq Cn^{-r} \ln n$. Тогда погрешность квадратурной формулы $\Xi f = \frac{d}{ds} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_n[f(\sigma)] \cos m\sigma \operatorname{ctg} \frac{\sigma-s}{2} d\sigma + R_n^*[f]$ оценивается неравенством $R_n^*[f] \leq C \frac{(n+m) \ln n}{n^r}$.

Таким образом, предложенную квадратурную формулу естественно применять при $m \leq n$ и $r \geq 2$.

4. Приближенное вычисление гиперсингулярных интегралов на интервале $[-1, 1]$

В этом пункте представим метод построения квадратурных формул вычисления интегралов вида

$$\int_{-1}^1 \frac{\omega(\tau)\varphi(\tau)}{(\tau-t)^p} d\tau, \quad p = 2, 3, \dots, \quad (4.1)$$

с весовыми функциями $\omega(t)$, основанный на квадратурных формулах вычисления сингулярных интегралов.

Предварительно приведем, следуя [24], интерполяционную формулу по узлам ортонормированных с весом $p(x)$ многочленов $P_n(x)$ степени n . Воспользуемся формулой Кристоффеля–Дарбу [25]:

$$\sum_{k=0}^n P_k(x)P_k(t) = \lambda_n \frac{P_{n+1}(x)P_n(t) - P_n(x)P_{n+1}(t)}{x-t},$$

где $\lambda_n = a_n/a_{n+1}$, a_n — коэффициент при старшей степени полинома $P_n(x)$.

Обозначим через μ_k , $k = 0, 1, \dots, n$, узлы полинома $P_{n+1}(x)$. Можно показать, что многочлен $\psi_k(t) = \frac{1}{\gamma_k} \sum_{i=0}^n P_i(\mu_k)P_i(t)$, где $\gamma_k = \sum_{l=0}^n P_l^2(\mu_k)$, является фундаментальным для узла μ_k . Следовательно, выражение

$$L_n(f) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\gamma_k} \sum_{i=0}^n P_i(\mu_k)P_i(t)f(\mu_k)$$

осуществляет интерполяцию функции $f(x)$ по узлам μ_k , $k = 0, 1, \dots, n$.

Пусть $f(t) \in C([-1, 1])$. Справедлива оценка погрешности $\|f(x) - L_n(f)\|_{C([-1, 1])} \leq (1 + \lambda_{n+1})E_n(f)$ [24], где λ_{n+1} — константа Лебега по узлам μ_k , $k = 0, 1, \dots, n$, $E_n(f)$ — наилучшее равномерное приближение функции $f(x)$ полиномами n -го порядка.

Рассмотрим интеграл

$$\int_{-1}^1 \frac{\omega(\tau)f(\tau)}{\tau-t} d\tau, \quad -1 < t < 1, \quad p = 2, 3, \dots, \quad (4.2)$$

где $f(t) \in W^r H_\alpha(M; [-1, 1])$, $r \geq p-1$, $0 < \alpha < 1$. Положим $\omega(t) = \sqrt{1-t^2}$. В качестве интерполяционного полинома возьмем $f_n(t) = L_n(f) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\gamma_k} \sum_{i=0}^n U_i(\mu_k)U_i(t)f(\mu_k)$, где $U_n(t)$ — ортонормированный полином Чебышева второго рода, μ_k ($k = 0, 1, \dots, n$) — узлы полинома $U_{n+1}(t)$, $\gamma_k = \sum_{l=0}^n U_l^2(\mu_k)$, $k = 0, 1, \dots, n$.

Известна формула [26]:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\tau^2}U_n(\tau)}{\tau-t} d\tau = -T_{n+1}(t), \quad n = 0, 1, \dots. \quad (4.3)$$

Здесь $T_n(t)$ — ортонормированный полином Чебышева первого рода.

Воспользовавшись формулой (4.3), приходим к квадратурной формуле

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\tau^2}f_n(\tau)}{\tau-t} d\tau = -\pi \sum_{k=0}^n \frac{1}{\gamma_k} \sum_{l=0}^n U_l(\mu_k)T_{l+1}(t)f(\mu_k) + R_n(f). \quad (4.4)$$

Оценим погрешность формулы (4.4). Введем обозначение $\psi_n(t) = f(t) - L_n(f)$. Очевидно,

$$\begin{aligned} |R_n(f)| &= \left| \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\tau^2}\psi_n(\tau)}{\tau-t} d\tau \right| \\ &\leq \left| \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\tau^2}|\psi_n(\tau) - \psi_n(t)|}{|\tau-t|} d\tau \right| + |\psi_n(t)| \left| \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau-t} d\tau \right| = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Так как $f(t) \in W^r H_\alpha(M; [-1, 1])$ и константа Лебега по узлам полиномов Чебышева второго рода оценивается неравенством $\lambda_n \leq Cn$ [27, с. 344], то $|\psi_n(t)| \leq Cn^{-r-\alpha+1}$ и $I_2 \leq Cn^{-r-\alpha+1}$.

Оценим I_1 :

$$\begin{aligned} I_1 &= \left| \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\tau^2}|\psi_n(\tau) - \psi_n(t)|^{1-\varepsilon} |\psi_n(\tau) - \psi_n(t)|^\varepsilon \operatorname{sgn}(\psi_n(\tau) - \psi_n(t))}{\tau-t} d\tau \right| \\ &\leq \left| \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\tau^2}|\psi_n(\tau) - \psi_n(t)|^{1-\varepsilon} |\psi'_n(t + \theta(\tau-t))|^\varepsilon}{|\tau-t|^{1-\varepsilon}} d\tau \right|, \end{aligned}$$

где ε — достаточно малое положительное число, величина которого будет уточнена ниже, $0 < \theta < 1$.

Из теоремы 2.5 следует, что $|\psi'_n(t + \sigma(\tau-t))|^\varepsilon \leq C(n^{-r+2-\alpha})^\varepsilon$, $|\psi_n(\tau) - \psi_n(t)|^{1-\varepsilon} \leq C(|\psi_n(\tau)|^{1-\varepsilon} + |\psi_n(t)|^{1-\varepsilon}) \leq C(n^{-r-\alpha+1})^{1-\varepsilon}$.

Продолжая оценку I_1 , имеем $I_1 \leq Cn^{-r-\alpha+1}n^\varepsilon \frac{1}{\varepsilon}$. Полагая $\varepsilon = \frac{1}{\ln n}$, приходим к оценке $I_1 \leq Cn^{-r-\alpha+1} \ln n$.

Собирая оценки I_1 и I_2 , имеем $|R_n(f)| \leq Cn^{-r-\alpha+1} \ln n$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.1. На классе функций $\Psi = W^r H_\alpha(M; [-1, 1])$ квадратурная формула (4.4) имеет погрешность $R_n[\Psi] \leq Cn^{-r-\alpha+1} \ln n$.

Замечание 4.1. Можно построить более точную квадратурную формулу за счет некоторого ее усложнения.

Рассмотрим квадратурную формулу

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\tau^2}f(\tau)}{\tau-t} d\tau = \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\tau^2}(L_n(f))(\tau)}{\tau-t} d\tau + R_n(f), \quad -1 \leq t \leq 1, \quad (4.5)$$

где $L_n(f)$ — полином, интерполирующий функцию f по n узлам полинома Чебышева первого рода. Повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве предыдущей теоремы, можно показать, что $R_n[W^r H_\alpha(M; [-1, 1])] \leq Cn^{-r-\alpha} \ln^2 n$.

Замечание 4.2. Оптимальные по порядку квадратурные формулы вычисления интегралов вида (4.2) имеют погрешность $R_n[\Psi] \asymp Cn^{-r-\alpha} \ln n$, где n — число функционалов, используемых при их построении. В этих формулах аппроксимация функции f осуществляется локальными сплайнами.

Построим квадратурную формулу вычисления интеграла

$$\tilde{f}(t) = \int_{-1}^1 \frac{f(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-t)} d\tau. \quad (4.6)$$

В работе [28] для вычисления интеграла (4.6) при $f \in H_\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, построена последовательность квадратурных формул, сходящаяся к $\tilde{f}(t)$ при $-1 < t < 1$ и для любого $\varepsilon > 0$ равномерно сходящаяся на отрезке $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$.

Ниже строится последовательность квадратурных формул, сходящихся к $f(t) \in W^r H_\alpha(M; [-1, 1])$, $r = 1, 2, \dots$, $0 \leq \alpha \leq 1$ при $t \in [-1, 1]$. Так как при $t = \pm 1$ к интегралу (4.6) не применимо формальное определение сингулярного интеграла, то в данном случае под $f(\pm 1)$ понимается предел $f(\pm 1) = \lim_{t \rightarrow \pm 1} f(t)$.

Рассмотрим интеграл (4.6). Функцию $f(t)$ аппроксимируем интерполяционным полиномом

$$f_n(t) = L_n f = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\gamma_k} \sum_{i=0}^n T_i(\mu_k) T_i(t) f(\mu_k), \quad (4.7)$$

где μ_k , $k = 0, 1, \dots, n$, — узлы полинома $T_{n+1}(t)$, $\gamma_k = \sum_{l=0}^n T_l^2(\mu_k)$, $k = 0, 1, \dots, n$.

Известна формула [26]:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_n(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-t)} = \begin{cases} U_{n-1}(t), & n = 1, 2, \dots, \\ 0, & n = 0. \end{cases} \quad (4.8)$$

Подставив $f_n(t)$ в (4.6) и воспользовавшись формулой (4.8), получаем квадратурную формулу

$$\int_{-1}^1 \frac{f(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-t)} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\gamma_k} \sum_{i=1}^n T_i(\mu_k) U_{i-1}(t) f(\mu_k) + R_n(f). \quad (4.9)$$

Оценим погрешность формулы (4.9). Пусть $\Psi_n(t) = f(t) - f_n(t)$. Тогда

$$\begin{aligned} |R_n(f)| &\leq \left| \int_{-1}^1 \frac{\Psi_n(\tau) - \Psi_n(t)}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-t)} d\tau \right| + |\Psi_n(t)| \frac{1}{\pi} \left| \int_{-1}^1 \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-t)} \right| \\ &= \frac{1}{\pi} \left| \int_{-1}^1 \frac{\Psi_n(\tau) - \Psi_n(t)}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-t)} d\tau \right| \\ &= \frac{1}{\pi} \left| \int_{-1}^1 \frac{|\Psi_n(\tau) - \Psi_n(t)|^{1/2-\varepsilon} |\Psi_n(\tau) - \Psi_n(t)|^{1/2+\varepsilon} \operatorname{sgn}(\Psi_n(\tau) - \Psi_n(t))}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-t)} d\tau \right| \\ &\leq C \max_{-1 \leq t \leq 1} |\Psi_n(t)|^{1/2-\varepsilon} \left| \int_{-1}^1 \frac{|\Psi_n'(t + \theta(\tau-t))|^{1/2+\varepsilon} d\tau}{\sqrt{1-\tau^2} |\tau-t|^{1/2-\varepsilon}} \right| \\ &\leq C(n^{-r-\alpha} \ln n) n^{1/2+\varepsilon} \int_{-1}^1 \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2} |\tau-t|^{1/2-\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Оценим последний интеграл.

Пусть $t = -1$. Тогда

$$\int_{-1}^1 \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2} |\tau - t|^{1/2-\varepsilon}} = \int_{-1}^1 \frac{d\tau}{|\tau + 1|^{1/2-\varepsilon} \sqrt{1-\tau^2}} \leq \frac{C}{\varepsilon}.$$

Пусть $t \in (-1, 1)$. Тогда

$$\int_{-1}^1 \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2} |\tau - t|^{1/2-\varepsilon}} = \sum_{i=1}^3 \int_{\Delta_i} \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2} |\tau - t|^{1/2-\varepsilon}} = \sum_{i=1}^3 J_i,$$

где $\Delta_1 = [-1, a]$, $\Delta_2 = [a, b]$, $\Delta_3 = [b, 1]$, $a = -1 + \frac{t+1}{2}$, $b = \frac{t+1}{2}$.

Для определенности положим $t \in (-1, 0)$.

Очевидно,

$$\begin{aligned} J_1 &\leq \left(\frac{2}{t+1}\right)^{1/2-\varepsilon} \int_{\Delta_1} \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} \leq 2 \left(\frac{2}{t+1}\right)^{1/2-\varepsilon} (1+a)^{1/2} \leq 2 \left(\frac{t+1}{2}\right)^{\varepsilon}; \\ J_2 &\leq \left(\frac{2}{t+1}\right)^{1/2} \int_{\Delta_2} \frac{d\tau}{|\tau - t|^{1/2-\varepsilon}} \\ &\leq \left(\frac{2}{t+1}\right)^{1/2} \left[\int_a^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1/2-\varepsilon}} + \int_t^b \frac{d\tau}{(\tau-t)^{1/2-\varepsilon}} \right] \leq 2 \left(\frac{t+1}{2}\right)^{\varepsilon}; \\ J_3 &\leq \int_b^1 \frac{d\tau}{|\tau - t|^{1-\varepsilon}} \leq \frac{2}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Собирая полученные оценки и полагая $\varepsilon = \frac{1}{\ln n}$, имеем

$$R_n(f) \leq C n^{-r-\alpha+1/2} \ln^2 n. \quad (4.10)$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 4.2. Пусть $f \in W^r H_{\alpha}(M; [-1, 1])$, $r = 1, 2, \dots$, $0 < \alpha \leq 1$. Тогда квадратурные формулы (4.9) сходятся равномерно при $-1 \leq t \leq 1$ к интегралу (4.6) с точностью $R_n[W^r H_{\alpha}(M; [-1, 1])] \leq C n^{-r-\alpha+1/2} \ln^2 n$.

Замечание 4.3. При построении квадратур вычисления интегралов вида

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left(\frac{1+\tau}{1-\tau}\right)^{\pm 1/2} \frac{f(\tau)}{\tau-t} d\tau,$$

последние преобразуются в интегралы

$$\int_{-1}^1 \frac{(1 \pm \tau) f(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2} (\tau-t)}.$$

Рассмотрим интеграл

$$Jf \equiv \int_{-1}^1 \frac{f(\tau) d\tau}{(1-\tau)^{\gamma_1}(1+\tau)^{\gamma_2}(\tau-t)}, \quad 0 < \gamma_1, \gamma_2 < 1. \quad (4.11)$$

Пусть $f(t) \in W^r H_\alpha(M; [-1, 1])$, $r = 1, 2, \dots$, $0 < \alpha \leq 1$. Обозначим через $f_n(t)$ интерполяционный полином $L_n(f) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\gamma_k} \sum_{i=0}^n T_i(\mu_k) T_i(t) f(\mu_k)$, где μ_k — нули полинома $T_{n+1}(t)$. Интеграл Jf будем вычислять по квадратурной формуле:

$$Jf = \int_{-1}^1 \frac{f_n(\tau) d\tau}{(1-\tau)^{\gamma_1}(1+\tau)^{\gamma_2}(\tau-t)} + R_n(f). \quad (4.12)$$

Оценим погрешность квадратурной формулы (4.12). Пусть $\gamma = \max(\gamma_1, \gamma_2)$, $\psi_n(t) = f(t) - f_n(t)$. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} |R_n(f)(t)| &\leq \left| \int_{-1}^1 \frac{(\psi_n(\tau) - \psi_n(t)) d\tau}{(1-\tau)^{\gamma_1}(1+\tau)^{\gamma_2}(\tau-t)} \right| + |\psi_n(t)| \left| \int_{-1}^1 \frac{d\tau}{(1-\tau)^{\gamma_1}(1+\tau)^{\gamma_2}(\tau-t)} \right| \\ &\leq C n^{-r-\alpha+1} \ln n \left| \int_{-1}^1 \frac{d\tau}{(1-\tau)^{\gamma_1}(1+\tau)^{\gamma_2}} \right| + C s(t, \gamma_1, \gamma_2) n^{-r-\alpha} \ln n, \end{aligned}$$

где $s(t, \gamma_1, \gamma_2) = \left| \int_{-1}^1 \frac{d\tau}{(1-\tau)^{\gamma_1}(1+\tau)^{\gamma_2}(\tau-t)} \right|$. Таким образом,

$$|R_n(f)(t)| \leq C s(t, \gamma_1, \gamma_2) n^{-r-\alpha} \ln n + C n^{-r-\alpha+1} \ln n. \quad (4.13)$$

Из оценки (4.13) следует, что последовательность квадратурных формул (4.12) сходится к интегралу (4.11) при всех $t \in (-1, 1)$, но сходимость неравномерная. Равномерная сходимость имеет место при $t \in [-1 + \delta, 1 - \delta]$, где δ — как угодно малое положительное число.

Построенные выше квадратурные формулы вычисления сингулярных интегралов позволяют построить эффективные методы вычисления гиперсингулярных интегралов. Проиллюстрируем это на примере гиперсингулярного интеграла

$$Hf \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-t)^p}, \quad p = 2, 3, \dots$$

Аппроксимируем функцию $f(t)$ интерполяционным полиномом $f_n(t)$, определенным формулой (4.7). Тогда квадратурная формула вычисления интеграла Hf имеет вид:

$$\begin{aligned} Hf &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f_n(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-t)^p} + R_n(f) = \frac{1}{(p-1)!} \frac{d^{p-1}}{dt^{p-1}} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f_n(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-t)} \right] + R_n(f) \\ &= \frac{1}{(p-1)!} \frac{d^{p-1}}{dt^{p-1}} \left[\sum_{k=0}^n \frac{1}{\gamma_k} \sum_{i=1}^n T_i(\mu_k) U_{i-1}(t) f(\mu_k) \right] + R_n(f) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(p-1)!} \sum_{k=0}^n \frac{1}{\gamma_k} \sum_{i=1}^n T_i(\mu_k) \left[\frac{d^{p-1}}{dt^{p-1}} U_{i-1}(t) \right] f(\mu_k) + R_n(f). \quad (4.14)$$

Оценка $|R_n(f)| \leq C n^{-r-\alpha+p-1/2} \ln^2 n$ следует из неравенства (4.10) и теоремы 2.4.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 4.3. Пусть $f(t) \in W^r H_\alpha(M; [-1, 1])$, $r \geq p$, $0 < \alpha \leq 1$. Последовательность квадратурных формул (4.14) равномерно сходится к интегралу Hf с погрешностью $R_n[W^r H_\alpha(M; [-1, 1])] \leq C n^{-r-\alpha+p-1/2} \ln^2 n$.

Замечание 4.4. При использовании описанного выше метода оценки погрешности квадратурных формул для интеграла (4.11) необходимо убедиться, что интеграл

$$\int_{-1}^1 \frac{f_n(\tau) d\tau}{(1-\tau)^{\gamma_1} (1-\tau)^{\gamma_2} (\tau-t)}$$

является полиномом. Это условие выполняется, по крайней мере, при $\gamma_i = \pm 1/2$.

5. Приближенное вычисление бигиперсингулярных интегралов

Рассмотрим бисингулярный интеграл

$$Gf \equiv \frac{1}{\pi^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{f(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{\sqrt{1-\tau_1^2} \sqrt{1-\tau_2^2} (\tau_1 - t_1)(\tau_2 - t_2)}, \quad (5.1)$$

где $f(t_1, t_2) \in W^{r,r} H_{\alpha,\alpha}$, $r \geq p$, $0 < \alpha \leq 1$. Бисингулярные интегралы с другими весами рассматриваются аналогично.

В этом пункте используются обозначения, введенные в предыдущем пункте. Функцию $f(t_1, t_2)$ аппроксимируем полиномом

$$f_{nn}(t_1, t_2) = L_{nn}(f) = \sum_{k_1=0}^n \sum_{k_2=0}^n \frac{1}{\gamma_{k_1}} \frac{1}{\gamma_{k_2}} \sum_{i_1=0}^n \sum_{i_2=0}^n T_{i_1}(\mu_{k_1}) T_{i_1}(t_1) T_{i_2}(\mu_{k_2}) T_{i_2}(t_2) f(\mu_{k_1}, \mu_{k_2}).$$

Подставляя $f_{nn}(t)$ в интеграл (5.1), приходим к кубатурной формуле

$$\begin{aligned} Gf &\equiv \frac{1}{\pi^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{f_{nn}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{\sqrt{1-\tau_1^2} \sqrt{1-\tau_2^2} (\tau_1 - t_1)(\tau_2 - t_2)} + R_{nn}(f) \\ &= \sum_{k_1=0}^n \sum_{k_2=0}^n \frac{1}{\gamma_{k_1}} \frac{1}{\gamma_{k_2}} \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n T_{i_1}(\mu_{k_1}) U_{i_1-1}(t_1) T_{i_2}(\mu_{k_2}) U_{i_2-1}(t_2) + R_{nn}(f)(t_1, t_2). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Оценим погрешность формулы (5.2). Очевидно,

$$|R_{nn}(f)(t_1, t_2)| = \left| \frac{1}{\pi^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{r_{nn}(\tau_1, \tau_2) - r_{nn}(t_1, \tau_2) - r_{nn}(\tau_1, t_2) + r_{nn}(t_1, t_2)}{\sqrt{1-\tau_1^2} \sqrt{1-\tau_2^2} (\tau_1 - t_1)(\tau_2 - t_2)} d\tau_1 d\tau_2 \right|, \quad (5.3)$$

где $r_{nn}(t_1, t_2) = f(t_1, t_2) - f_{nn}(t_1, t_2)$.

Оценим разность

$$\begin{aligned}
 |\Psi_{nn}(t_1, t_2)| &= |r_{nn}(\tau_1, \tau_2) - r_{nn}(t_1, \tau_2) - r_{nn}(\tau_1, t_2) + r_{nn}(t_1, t_2)| \\
 &= |(r_{nn}(\tau_1, \tau_2) - r_{nn}(t_1, \tau_2)) - (r_{nn}(\tau_1, t_2) - r_{nn}(t_1, t_2))| \\
 &\leq \left(\left| \frac{\partial r_{nn}}{\partial t_1}(t_1 + \theta_1(\tau_1 - t_1), \tau_2) \right| + \left| \frac{\partial r_{nn}}{\partial t_1}(t_1 + \theta_2(\tau_1 - t_1), t_2) \right| \right) |\tau_1 - t_1| \\
 &\leq 2M|\tau_1 - t_1|.
 \end{aligned}$$

Группируя иначе, имеем $|\Psi_n(t_1, t_2)| = |(r_{nn}(\tau_1, \tau_2) - r_{nn}(\tau_1, t_2)) - (r_{nn}(t_1, \tau_2) - r_{nn}(t_1, t_2))| \leq 2M|\tau_2 - t_2|$. Следовательно, $|\Psi_{nn}(t_1, t_2)| \leq 2M|\tau_1 - t_1|^{1/2}|\tau_2 - t_2|^{1/2}$. Из теоремы 2.6 следует, что $M \leq Cn^{-r-\alpha+1} \ln n$. Таким образом, $|\Psi_{nn}(t_1, t_2)| \leq Cn^{-r-\alpha+1}|\tau_1 - t_1|^{1/2}|\tau_2 - t_2|^{1/2} \ln n$. Из этой оценки и равенства (5.3) следует, что погрешность кубатурной формулы (5.2) оценивается неравенством $|R_{nn}(f(t_1, t_2))| \leq Cn^{-r-\alpha+1} \ln^2 n s(t_1, t_2)$, где $s(t_1, t_2) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{d\tau_1 d\tau_2}{\sqrt{1-\tau_1^2} \sqrt{1-\tau_2^2} |\tau_1 - t_1|^{1/2} |\tau_2 - t_2|^{1/2}}$. Из этого неравенства следует, что последовательность кубатурных формул (5.2) сходится к интегралу (5.1) при $(t_1, t_2) \in (-1, 1)^2$ и равномерно сходится в области $[-1 + \delta, 1 - \delta; -1 + \delta, 1 - \delta]$, где $\delta > 0$ — как угодно малое число.

Погрешность $|R_{nn}(f(t_1, t_2))|$ кубатурной формулы (5.2) в области $[-1 + \delta, 1 - \delta]^2$, $\delta > 0$, оценивается неравенством

$$|(R_{nn})(f)(t_1, t_2)| \leq A(\delta)n^{-r-\alpha+1} \ln^2 n, \quad (5.4)$$

где $A(\delta)$ — константа, зависящая от δ .

Кубатурная формула (5.2) используется для построения кубатурных формул вычисления бигиперсингулярных интегралов.

Рассмотрим бигиперсингулярный интеграл

$$Gf \equiv \frac{1}{\pi^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{f(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{\sqrt{1-\tau_1^2} \sqrt{1-\tau_2^2} (\tau_1 - t_1)^{p_1} (\tau_2 - t_2)^{p_2}}, \quad (5.5)$$

где $f(t_1, t_2) \in W^{r,r} H_{\alpha,\alpha}$, $r \geq p$, $p = \max(p_1, p_2)$, $0 < \alpha \leq 1$. Бигиперсингулярный интеграл (5.5) будем вычислять по кубатурной формуле

$$\begin{aligned}
 Hf &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{f_{nn}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{\sqrt{1-\tau_1^2} \sqrt{1-\tau_2^2} (\tau_1 - t_1)^{p_1} (\tau_2 - t_2)^{p_2}} + R_{nn}(f) \\
 &= \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{(p_1-1)!(p_2-1)!} \frac{\partial^{p_1-1}}{\partial t_1^{p_1-1}} \frac{\partial^{p_2-1}}{\partial t_2^{p_2-1}} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{f_{nn}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{\sqrt{1-\tau_1^2} \sqrt{1-\tau_2^2} (\tau_1 - t_1) (\tau_2 - t_2)} + R_{nn}(f) \\
 &= \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{(p_1-1)!(p_2-1)!} \frac{\partial^{p_1-1}}{\partial t_1^{p_1-1}} \frac{\partial^{p_2-1}}{\partial t_2^{p_2-1}} \sum_{k_1=0}^n \sum_{k_2=0}^n \frac{1}{\gamma_{k_1}} \frac{1}{\gamma_{k_2}} \times \\
 &\quad \sum_{i_1=0}^n \sum_{i_2=0}^n T_{i_1}(\mu_{k_1}) U_{i_1-1}(t_1) T_{i_2}(\mu_{k_2}) U_{i_2-1}(t_2) + R_{nn}(f). \quad (5.6)
 \end{aligned}$$

Из оценки (5.4) и теоремы 2.6 следует, что при $(t_1, t_2) \in [-1 + \delta, 1 - \delta]^2$

$$|R_{nn}(f)| \leq A(\delta)n^{-r-\alpha+p_1+p_2-2} \ln^2 n.$$

Так как f — произвольная функция множества $W^{r_1, r_2} H_{\alpha, \alpha}(M; [-1, 1]^2)$, то справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.1. Пусть $\Psi = W^{r_1, r_2} H_{\alpha, \alpha}(M; [-1, 1]^2)$, $r_i \geq p_i - 1$, $i = 1, 2, \dots$, $0 < \alpha \leq 1$. Тогда кубатурная формула (5.6) в области $[-1 + \delta, 1 - \delta]^2$ имеет погрешность $R_{nn}(\Psi) \leq A(\delta)n^{-r-\alpha+p_1+p_2-2} \ln^2 n$, $r = \min(r_1, r_2)$.

Выводы

Статья посвящена приближенным методам вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Следует отметить два основных результата, представленных в работе. Во-первых, методами конструктивной теории функций установлена связь между погрешностями ряда квадратурных формул для сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Этот подход к оценкам погрешности распространен на кубатурные формулы для полисингулярных и полигиперсингулярных интегралов. Во-вторых, предложен метод оценки погрешности квадратурных формул вычисления сингулярных интегралов на классах дифференцируемых функций. Этот метод может быть использован при построении квадратурных формул для вычисления других типов особых интегралов.

Литература

1. Саакян А.В. Квадратурные формулы наивысшей алгебраической точности для интеграла типа Коши, когда показатели весовой функции Якоби комплексные // Известия РАН. Механика твердого тела. — 2012. — № 6. — С. 116–121.
2. Sahakyan A.V., Amirjanyan H.A. Method of mechanical quadratures for solving singular integral equations of various types // J. Physics: Conf. Series. — 2018. — Vol. 991. — ID Number: 012070. — DOI: 10.1088/1742-6596/991/1/012070.
3. Иванов В.В. Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений. — Киев: Наукова думка, 1968.
4. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. — М.: ТОО “Янус”, 1995.
5. Бойков И.В. Приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Ч. 1: Сингулярные интегралы. — Пенза: Изд-во Пензенского гос. ун-та, 2005.
6. Хубежты Ш.С. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов и некоторые их применения // Итоги науки. Юг России. Математическая монография / Д.Г. Саникидзе. — Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2012. — Вып. 3.
7. Korsunsky A.M. Gauss–Chebyshev quadrature formulae for strongly singular integrals // Quart. Appl. Math. — 1998. — Vol. 56. — P. 461–472.
8. Boykov I.V. Numerical methods of computation of singular and hypersingular integrals // J. Math. Math. Sci. — 2001. — Vol. 28. — P. 127–179.
9. Chan Y.-S., Fannjiang A.C., Paulino G.H. Integral equations with hypersingular kernels-theory and applications to fracture mechanics // Intern. J. Engineering Science. — 2003. — Vol. 41. — P. 683–720.

10. **Boykov I.V.** Accuracy optimal methods for evaluating hypersingular integrals / I.V. Boykov, E.S. Ventsel, A.I. Boykova // *Applied Numerical*. — 2009. — Vol. 59, № 6. — P. 1366–1385.
11. **Zhang X., Wu J., Yu D.** Superconvergence of the composite Simpson's rule for a certain finite-part integral and its applications // *J. Comput. Appl. Math.* — 2009. — Vol. 223, iss. 2. — P. 598–613.
12. **Плиева Л.Ю.** Квадратурные формулы интерполяционного типа для гиперсингулярных интегралов на отрезке интегрирования // *Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отделение*. — Новосибирск, 2016. — Т. 19, № 4. — С. 419–428. Перевод: Plieva L.Y. Interpolation-type quadrature formulas for hypersingular integrals in the interval of integration // *Numerical Analysis and Applications*. — 2016. — Vol. 9, № 4. — P. 326–334. — DOI: 10.1134/S1995423916040066.
13. **De Bonis M.C., Occorsio D.** Numerical methods for hypersingular integrals on the real line // *Dolomites Research Notes on Approximation*. — 2017. — Vol. 10. — P. 97–117.
14. **Вайникко Г.М.** Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения / Г.М. Вайникко, И.К. Лифанов, Л.Н. Полтавский. — М.: Янус-К, 2001.
15. **Бойков И.В.** Приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Ч. 2: Гиперсингулярные интегралы. — Пенза: Изд-во Пензенского гос. ун-та, 2009.
16. **Бойков И.В., Айкашев П.В.** Приближенные методы вычисления гиперсингулярных интегралов // *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*. — 2021. — № 1. — С. 66–84. — DOI: 10.21685/2072-3040-2021-1-6.
17. **Дзядык В.К.** Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. — М.: Наука, 1977.
18. **Тиман А.Ф.** Теория приближения функций действительного переменного. — М.: Физматгиз, 1960.
19. **Gaier D.** *Konstruktive Methoden der Konformen Abbildung*. — Berlin–Heidelberg: Springer, 1964.
20. **Натансон И.П.** Конструктивная теория функций. — М., Л.: ГИТТЛ, 1949.
21. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды. Т. 1. — М.: Мир, 1965.
22. **Lu S., Ding Y., Yan D.** *Singular Integrals and Related Topics*. — New Jersey: World Scientific, 2007.
23. **Capobianco M.R., Criscuolo G.** On quadrature for Cauchy principal value integrals of oscillatory functions // *J. Comput. Appl. Math.* — 2003. — Vol. 156, № 2. — P. 471–486. — DOI: 10.1016/S0377-0427(03)00388-1.
24. **Бойкова А.И.** Об одном классе интерполяционных полиномов // *Оптимальные методы и их применение*. — Пенза: Изд-во ПГТУ, 1996. — С. 141–148.
25. **Суетин П.К.** Классические ортогональные многочлены. — М.: Наука, 1976.
26. **Ахиезер Н.И.** О некоторых формулах обращения сингулярных интегралов // *Изв. АН СССР. Сер. математика*. — 1945. — Т. 9, вып. 4. — С. 275–290.
27. **Сеге Г.** Ортогональные многочлены. — М.: ГИФМЛ, 1962.
28. **Саникидзе Д.Г.** Квадратурные процессы для интегралов типа Коши // *Мат. заметки*. — 1972. — Т. 11, вып. 5. — С. 517–526.

*Поступила в редакцию 19 июля 2021 г.
После исправления 20 декабря 2021 г.
Принята к печати 24 апреля 2022 г.*

Литература в транслитерации

1. **Saakyan A.V.** Kvadrurnye formuly naivyssei algebraicheskoi tochnosti dlya integrala tipa Koshi, kogda pokazateli vesovoi funktsii YAkobi kompleksnye // *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela.* — 2012. — № 6. — С. 116–121.
2. **Sahakyan A.V., Amirjanyan H.A.** Method of mechanical quadratures for solving singular integral equations of various types // *J. Physics: Conf. Series.* — 2018. — Vol. 991. — ID Number: 012070. — DOI: 10.1088/1742-6596/991/1/012070.
3. **Ivanov V.V.** Teoriya priblizhennykh metodov i ee primeneniye k chislennomu resheniyu singulyarnykh integral'nykh uravnenii. — Kiev: Naukova dumka, 1968.
4. **Lifanov I.K.** Metod singulyarnykh integral'nykh uravnenii i chislennyi eksperiment. — M.: TOO “YAnus”, 1995.
5. **Boikov I.V.** Priblizhennyye metody vychisleniya singulyarnykh i gipersingulyarnykh integralov. CH. 1: Singulyarnyye integraly. — Penza: Izd-vo Penzenskogo gos. un-ta, 2005.
6. **Hubezhty SH.S.** Kvadrurnye formuly dlya singulyarnykh integralov i nekotorye ih primeneniya // *Itogi nauki. Yug Rossii. Matematicheskaya monografiya* / D.G. Sanikidze. — Vladikavkaz: YUMI VNTS RAN i RSO-A, 2012. — Vyp. 3.
7. **Korsunsky A.M.** Gauss–Chebyshev quadrature formulae for strongly singular integrals // *Quart. Appl. Math.* — 1998. — Vol. 56. — P. 461–472.
8. **Boykov I.V.** Numerical methods of computation of singular and hypersingular integrals // *J. Math. Math. Sci.* — 2001. — Vol. 28. — P. 127–179.
9. **Chan Y.-S., Fannjiang A.C., Paulino G.H.** Integral equations with hypersingular kernels-theory and applications to fracture mechanics // *Intern. J. Engineering Science.* — 2003. — Vol. 41. — P. 683–720.
10. **Boykov I.V.** Accuracy optimal methods for evaluating hypersingular integrals / I.V. Boykov, E.S. Ventsel, A.I. Boykova // *Applied Numerical.* — 2009. — Vol. 59, № 6. — P. 1366–1385.
11. **Zhang X., Wu J., Yu D.** Superconvergence of the composite Simpson’s rule for a certain finite-part integral and its applications // *J. Comput. Appl. Math.* — 2009. — Vol. 223, iss. 2. — P. 598–613.
12. **Plieva L.Yu.** Kvadrurnye formuly interpolatsionnogo tipa dlya gipersingulyarnykh integralov na otrezke integrirovaniya // *Sib. zhurn. vychisl. matematiki* / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2016. — T. 19, № 4. — С. 419–428. Perevod: Plieva L.Y. Interpolation-type quadrature formulas for hypersingular integrals in the interval of integration // *Numerical Analysis and Applications.* — 2016. — Vol. 9, № 4. — P. 326–334. — DOI: 10.1134/S1995423916040066.
13. **De Bonis M.C., Occorsio D.** Numerical methods for hypersingular integrals on the real line // *Dolomites Research Notes on Approximation.* — 2017. — Vol. 10. — P. 97–117.
14. **Vainikko G.M.** Chislennyye metody v gipersingulyarnykh integral'nykh uravneniyah i ih prilozheniya / G.M. Vainikko, I.K. Lifanov, L.N. Poltavskii. — M.: Yanus-K, 2001.
15. **Boikov I.V.** Priblizhennyye metody vychisleniya singulyarnykh i gipersingulyarnykh integralov. CH. 2: Gipersingulyarnyye integraly. — Penza: Izd-vo Penzenskogo gos. un-ta, 2009.
16. **Boikov I.V., Aikashev P.V.** Priblizhennyye metody vychisleniya gipersingulyarnykh integralov // *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Povolzhskii region. Fiziko-matematicheskie nauki.* — 2021. — № 1. — С. 66–84. — DOI: 10.21685/2072-3040-2021-1-6.
17. **Dzyadyk V.K.** Vvedenie v teoriyu ravnomernogo priblizheniya funktsii polinomami. — M.: Nauka, 1977.
18. **Timan A.F.** Teoriya priblizheniya funktsii deistvitel'nogo peremennogo. — M.: Fizmatgiz, 1960.
19. **Gaier D.** Konstruktive Methoden der Konformen Abbildung. — Berlin–Heidelberg: Springer, 1964.

20. **Natanson I.P.** Konstruktivnaya teoriya funktsii. — M., L.: GITTL, 1949.
21. **Zigmund A.** Trigonometricheskie ryady. T. 1. — M.: Mir, 1965.
22. **Lu S., Ding Y., Yan D.** Singular Integrals and Related Topics. — New Jersly: Word Scientific, 2007.
23. **Capobianco M.R., Criscuolo G.** On quadrature for Cauchy principal value integrals of oscillatory functions // J. Comput. Appl. Math. — 2003. — Vol. 156, N^o 2. — P. 471–486. — DOI: 10.1016/S0377-0427(03)00388-1.
24. **Boikova A.I.** Ob odnom klasse interpolyatsionnyh polinomov // Optimal'nye metody i ih primeneniye. — Penza: Izd-vo PGU, 1996. — S. 141–148.
25. **Suetin P.K.** Klassicheskie ortogonal'nye mnogochleny. — M.: Nauka, 1976.
26. **Ahiezer N.I.** O nekotoryh formulah obrascheniya singulyarnykh integralov // Izv. AN SSSR. Ser. matematika. — 1945. — T. 9, vyp. 4. — S. 275–290.
27. **Sege G.** Ortogonal'nye mnogochleny. — M.: GIFML, 1962.
28. **Sanikidze D.G.** Kvadrurnye protsessy dlya integralov tipa Koshi // Mat. zametki. — 1972. — T. 11, vyp. 5. — S. 517–526.

