

ЗАКОНОМЕРНОСТИ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ И ВЫГОРАНИЯ РЕАКЦИОННОСПОСОБНОГО ТЕЛА НА ПОВЕРХНОСТИ $x = 0$ ПРИ ТЕПЛОМ ВОСПЛАМЕНЕНИИ

Р. С. Буркина

Томский государственный университет, 634050 Томск

С помощью преобразования Лапласа показана возможность нахождения уравнений, определяющих изменения во времени температуры и выгорания реакционноспособного тела в сечении $x = 0$ в процессах теплового воспламенения. Получены уравнения для температуры и выгорания полуограниченного тела в точке воспламенения $x = 0$ при зажигании потоком излучения и при очаговом тепловом взрыве. Проведен асимптотический анализ полученных уравнений, определены времена зажигания тел и критические условия очагового воспламенения. Дано обоснование «адиабатического метода» определения временных характеристик зажигания В. Н. Вилюнова. Подтверждены результаты асимптотического анализа очагового теплового воспламенения.

В индукционных режимах тепловой теории зажигания критерий и время воспламенения системы определяются поведением температуры в точке воспламенения. Главная задача для таких процессов заключается в определении точки воспламенения и закона изменения в ней температуры. Для задач зажигания тел с монотонно возрастающей во времени температурой поверхности (например, при зажигании лучистым потоком тепла) В. Н. Вилюновым был предложен «адиабатический метод зажигания» [1, 2], в котором для определения температуры поверхности, на которой происходит воспламенение, весь период зажигания делится на стадию инертного прогрева и адиабатическую стадию химических реакций у поверхности тела, «склеивание» которых позволяло найти общий закон изменения температуры поверхности и временные характеристики зажигания. Возможность такого расщепления процесса на стадии связывалась с большим значением отношения времени прогрева к времени адиабатических химических реакций [2]. В [3, 4] рассматривалось воспламенение пористых горючих веществ тепловым потоком при диффузии через их внешнюю поверхность из окружающей среды газообразного окислителя. В этих работах с помощью интегрального преобразования и метода асимптотического интегрирования Лапласа при больших энергиях активации и значении параметра Льюиса $Le = 1$ было получено обыкновенное дифференциальное уравнение для температу-

ры поверхности тела, численное интегрирование которого позволило получить информацию о процессе зажигания и его параметрах. Возможности использования интегральных преобразований Лапласа и Ганкеля для нахождения характеристик разогрева тела при его инертном прогреве потоком излучения с распределенной по пространству плотностью показаны в [5]. Полученные выражения для температуры и ее производных в области максимального разогрева далее использовались для расчета времени зажигания реакционноспособного тела.

В настоящей работе на примере двух задач: зажигания реакционноспособных непрозрачных и полупрозрачных тел потоком излучения и очагового теплового воспламенения — рассматривается возможность определения дифференциальных уравнений для температуры и выгорания в точке воспламенения $x = 0$. Дальнейший асимптотический анализ этих уравнений при больших значениях температурного напора $\Theta_0 \gg 1$ позволяет получить всю необходимую информацию о процессе воспламенения. В частности, результаты такого исследования для задачи зажигания потоком тепла являются обоснованием адиабатического метода Вилюнова.

Первой рассматривается задача зажигания реакционноспособного полуограниченного тела лучистым потоком тепла, падающим на его поверхность $x = 0$. В безразмерных переменных математическая постановка задачи

имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - B \exp(-B\xi) - \omega(1-\eta)^m \exp\left(-\frac{\Theta_0 u}{1-\sigma u}\right); \quad (1)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = \text{Le} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} + \gamma \omega(1-\eta)^m \exp\left(-\frac{\Theta_0 u}{1-\sigma u}\right), \quad (2)$$

$$\tau > 0, \quad 0 < \xi < \infty;$$

$$u(\xi, 0) = 1, \quad \eta(\xi, 0) = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial \eta(0, \tau)}{\partial \xi} = \frac{\partial u(\infty, \tau)}{\partial \xi} = \frac{\partial \eta(\infty, \tau)}{\partial \xi} = 0; \quad (4)$$

$$\frac{\partial u(0, \tau)}{\partial \xi} = \begin{cases} 0, & B \neq \infty, \\ 1, & B = \infty. \end{cases} \quad (5)$$

В (1)–(5) использованы следующие безразмерные переменные и параметры:

$$u = \frac{T_* - T}{T_* - T_0}, \quad \eta = \frac{a_0 - a}{a_0}, \quad \xi = \frac{x}{x_h},$$

$$\tau = \frac{t}{t_h}, \quad x_h = \lambda \frac{T_* - T_0}{q}, \quad t_h = \frac{c\rho x_h^2}{\lambda},$$

$$B = nx_h, \quad \Theta_0 = E \frac{T_* - T_0}{RT_*^2},$$

$$\omega = \frac{Qz\rho^m a_0^m \lambda (T_* - T_0) \exp(-E/RT_*)}{q^2},$$

$$\sigma = \frac{T_* - T_0}{T_*}, \quad \text{Le} = \frac{c\rho D}{\lambda}, \quad \gamma = c \frac{T_* - T_0}{Qa_0}.$$

Обозначения: T, T_* — текущая и масштабная температуры соответственно, последняя пока не определена; T_0 — начальная температура горючего компонента; x — пространственная координата; t — время; τ — переменная времени; a, a_0 — текущая и начальная концентрации реагирующего вещества; q — плотность внешнего потока излучения; x_h, t_h — характерные пространственный и временной масштабы стадии инертного прогрева; c — удельная теплоемкость; ρ — плотность; λ — удельная теплопроводность; n — показатель поглощения лучистого потока тепла; Q — тепловой эффект химической реакции; E — энергия активации; R — универсальная газовая постоянная; z — предэкспонент; D — коэффициент диффузии газа,

m — порядок химической реакции; u — температура в переменных прогрева; η — выгорание; ξ, τ — пространственная и временная переменные.

Для дальнейшего анализа задачи перейдем от безразмерной температуры u к переменной, представляющей разогрев системы от химических реакций: $\varphi = u - u_I$, где $u_I(\xi, \tau)$ — решение инертной задачи о прогреве тела внешним потоком излучения:

$$\frac{\partial u_I}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u_I}{\partial \xi^2} - B \exp(-B\xi), \quad (6)$$

$$\tau > 0, \quad 0 < \xi < \infty;$$

$$u_I(\xi, 0) = 1, \quad \frac{\partial u_I(\infty, \tau)}{\partial \xi} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial u_I(0, \tau)}{\partial \xi} = \begin{cases} 0, & B \neq \infty, \\ 1, & B = \infty. \end{cases}$$

Тогда задача (1)–(5) преобразуется к виду

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} - \omega(1-\eta)^m \times \times \exp\left[-\frac{\Theta_0(\varphi + u_I)}{1-\sigma(\varphi + u_I)}\right]; \quad (8)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = \text{Le} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} + \gamma \omega(1-\eta)^m \times \times \exp\left[-\frac{\Theta_0(\varphi + u_I)}{1-\sigma(\varphi + u_I)}\right], \quad (9)$$

$$\tau > 0, \quad 0 < \xi < \infty;$$

$$\varphi(\xi, 0) = \eta(\xi, 0) = 0; \quad (10)$$

$$\frac{\partial \varphi(0, \tau)}{\partial \xi} = \frac{\partial \eta(0, \tau)}{\partial \xi} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \varphi(\infty, \tau)}{\partial \xi} = \frac{\partial \eta(\infty, \tau)}{\partial \xi} = 0.$$

К задаче (8)–(11) применим интегральное преобразование Лапласа: перейдем к изображению по пространственной переменной

$$\xi \rightarrow S, \quad \varphi(\xi, \tau) \div \bar{\varphi}(S, \tau), \quad \eta(\xi, \tau) \div \bar{\eta}(S, \tau).$$

Тогда из (8)–(11) имеем

$$\frac{d\bar{\varphi}}{d\tau} = S^2 \bar{\varphi}(S, \tau) - S \bar{\varphi}(0, \tau) - J(S, \tau), \quad (12)$$

$$\frac{d\bar{\eta}}{d\tau} = \text{Le}[S^2\bar{\eta}(S, \tau) - S\eta(0, \tau)] + \gamma J(S, \tau), \quad (13)$$

$$\bar{\varphi}(S, 0) = \bar{\eta}(S, 0) = 0, \quad (14)$$

где

$$J(S, \tau) = \int_0^\infty \omega[1 - \eta(\xi, \tau)]^m \times \\ \times \exp \left[- \frac{\Theta_0(\varphi(\xi, \tau) + u_I(\xi, \tau))}{1 - \sigma(\varphi(\xi, \tau) + u_I(\xi, \tau))} \right] \exp(-S\xi) d\xi$$

— изображение неоднородностей в уравнениях (8), (9). Интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений (12)–(14) по переменной τ дает

$$S\bar{\varphi}(S, \tau) = \varphi(0, \tau) - \int_0^\tau \left[\frac{\partial \varphi(0, y)}{\partial y} + SJ(S, y) \right] \times \\ \times \exp[(\tau - y)S^2] dy, \quad (15)$$

$$S\bar{\eta}(S, \tau) = \eta(0, \tau) - \int_0^\tau \left[\frac{\partial \eta(0, y)}{\partial y} - \gamma SJ(S, y) \right] \times \\ \times \exp[(\tau - y)\text{Le}S^2] dy. \quad (16)$$

Переходя в (15), (16) к пределу при $S \rightarrow \infty$ и учитывая, что для функции-изображения выполняется предельное равенство

$$\lim_{S \rightarrow \infty} Sf(S, \tau) = f(0, \tau),$$

получаем уравнения для разогрева и выгорания на поверхности тела $\xi = 0$:

$$\frac{\partial \varphi(0, \tau)}{\partial \tau} + \omega[1 - \eta(0, \tau)]^m \times \\ \times \exp \left[- \frac{\Theta_0(\varphi(0, \tau) + u_I(0, \tau))}{1 - \sigma(\varphi(0, \tau) + u_I(0, \tau))} \right] = 0, \quad (17)$$

$$\frac{\partial \eta(0, \tau)}{\partial \tau} - \gamma\omega[1 - \eta(0, \tau)]^m \times \\ \times \exp \left[- \frac{\Theta_0(\varphi(0, \tau) + u_I(0, \tau))}{1 - \sigma(\varphi(0, \tau) + u_I(0, \tau))} \right] = 0, \quad (18)$$

$$\varphi(0, 0) = \eta(0, 0) = 0. \quad (19)$$

Система (17)–(19) имеет первый интеграл

$$\eta(0, \tau) = -\gamma\varphi(0, \tau), \quad (20)$$

который показывает подобие между разогревом от химических реакций и выгоранием на поверхности тела при любых значениях параметра Le . В дальнейшем будем отмечать значения переменных на поверхности $\xi = 0$ индексом

s : $\varphi(0, \tau) = \varphi_s(\tau)$. Использование первого интеграла (20) в уравнении (17) дает независимую задачу для разогрева от химических реакций на поверхности тела:

$$\frac{d\varphi_s(\tau)}{d\tau} + \omega[1 + \gamma\varphi_s(\tau)]^m \times \\ \times \exp \left[- \frac{\Theta_0(\varphi_s(\tau) + u_I(0, \tau))}{1 - \sigma(\varphi_s(\tau) + u_I(0, \tau))} \right], \quad (21)$$

$$\varphi_s(0) = 0. \quad (22)$$

Поскольку в данной задаче максимум температуры на этапе воспламенения находится в точке $\xi = 0$, по поведению разогрева от химических реакций $\varphi_s(\tau)$ можно делать вывод о зажигании тела и находить время зажигания. Задача (21), (22) представляет собой задачу Коши, просто решается численно, причем осталась одна степень свободы в выборе параметра T_* . Как показано в [6], удачный выбор T_* обеспечивает слабую зависимость решения от параметра σ . В данной задаче за T_* эффективно брать температуру, при которой происходит развитие химических реакций у поверхности. После определения $\varphi_s(\tau)$ выгорание рассчитывается по (20).

Проведем асимптотическое решение задачи (21), (22) методом сращиваемых асимптотических разложений с использованием большого значения параметра $\Theta_0 \gg 1$, характерного для задач зажигания веществ, способных к взрывчатому превращению. На начальной стадии процесса $T_s < T_*$, $\varphi_s(\tau)$ мало и $u_I(0, \tau) \sim o(1)$. Поэтому с точностью до экспоненциально малых величин $o(\exp(-\Theta_0 u_I(0, \tau)))$ из (21), (22) получаем

$$\frac{d\varphi_s(\tau)}{d\tau} = 0, \quad \varphi_s(0) = 0,$$

откуда находится

$$\varphi_s(\tau) = 0. \quad (23)$$

Из (23) следует, что температура поверхности на начальном этапе изменяется как при инертном прогреве: $u(0, \tau) = u_I(0, \tau)$, что соответствует решению на первой стадии адиабатического метода [1, 2, 6].

При прогреве поверхности, когда T_s близко к T_* , имеем $u_I(0, \tau) \ll 1$ и $\Theta_0 u_I(0, \tau) \sim o(1)$. На этой (второй) стадии процесса перейдем к переменным $\tau_1 = \Theta_0(\tau - \tau_0)$, $\Phi_s(\tau_1) = \Theta_0 \varphi_s(\tau)$, где τ_0 — время достижения поверхностью температуры T_* , Φ — разогрев от химических реакций

в переменных Франк-Каменецкого. В переменной τ_1 решение инертной задачи (6), (7) можно представить в виде разложения

$$\Theta_0 u_I(0, \tau_1) = A - C_1 \tau_1 + o(\Theta_0^{-1}), \quad (24)$$

где A и C_1 — константы порядка единицы. Тогда при переходе к новым переменным уравнение (21) с точностью $o(\Theta_0^{-1})$ преобразуется к виду

$$\frac{d\Phi_s(\tau_1)}{d\tau_1} + \omega \exp[-\Phi_s(\tau_1) - A + C_1 \tau_1] = 0. \quad (25)$$

Интегрирование (25) и его сращивание с решением начальной стадии (23) $\Phi_s(\tau_1 \rightarrow -\infty) \rightarrow 0$ дает

$$\Phi_s(\tau_1) = \ln \left[1 - \frac{\omega}{C_1} \exp(-A + C_1 \tau_1) \right]. \quad (26)$$

Формула (26) показывает логарифмическое изменение разогрева на поверхности тела во второй стадии процесса зажигания, как и соответствующее решение в адиабатическом методе [1, 2, 6].

Момент зажигания определим как время неограниченного роста температуры поверхности:

$$\Phi_s(\tau_1 \rightarrow \tau_{i1}) \rightarrow -\infty. \quad (27)$$

Выбор такого условия зажигания справедлив для реакции порядка $m = 0$ и имеет асимптотический смысл при $m > 0$. Время прогрева поверхности до температуры T_* находится из условия $T(0, t_0) = T_*$, которое в безразмерных переменных имеет вид

$$\Phi_s(0) + \Theta_0 u_I(0, 0) = 0. \quad (28)$$

Поскольку вторая стадия процесса значительно короче первой, за масштабную температуру T_* удобно взять аналогично [1, 6] экстраполированную температуру зажигания, т. е. температуру, которую достигла бы поверхность тела в момент зажигания при инертном прогреве:

$$u_I(0, \tau_{i1}) = 0. \quad (29)$$

После подстановки (24), (26) в выражения (27)–(29) и их решения приходим к уравнениям

$$A = \ln 2, \quad \omega = C_1, \quad \tau_{i1} = \frac{\ln 2}{C_1}. \quad (30)$$

Из (30), используя конкретные выражения для A и C_1 , определяемые из решения инертной задачи (6), (7), находим ω (определяет масштабную температуру T_*), τ_0 и τ_{i1} .

Таблица 1

B	$\Delta \tau_i$ [%] при Θ_0					
	5	10	20	30	50	100
∞	-23,4	-14,3	-9,2	-7,0	-5,0	-3,1
1,0	-3,8	0,6	0,8	0,6	0,4	0,1
0,1	2,2	3,4	2,3	1,6	1,0	0,5
10,0	-15,2	-5,9	-2,2	-1,1	-0,2	0,5

Так, для непрозрачного тела ($B = -\infty$) из (6), (7) имеем $u_I(0, \tau) = 1 - 2\sqrt{\tau/\pi}$ и тогда в разложении (24)

$$A = \Theta_0 \left(1 - 2\sqrt{\frac{\tau_0}{\pi}} \right), \quad C_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi \tau_0}}.$$

Подставляя эти значения A и C_1 в (30) и решая полученную систему уравнений с точностью $o(\Theta_0^{-1})$, находим

$$\omega = \frac{2}{\pi}, \quad \tau_0 = \frac{\pi}{4}, \quad \tau_{i1} = \frac{\pi \ln 2}{2}.$$

Переходя к исходным переменным начальной стадии прогрева, получаем выражения для времени зажигания:

$$\tau_i = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi \ln 2}{2\Theta_0}. \quad (31)$$

Сравнение (в процентах) времени зажигания с результатом численного счета исходной задачи (1)–(5) τ_{num} показано в табл. 1 (первая строка), где

$$\Delta \tau_i [\%] = \frac{\tau_i - \tau_{\text{num}}}{\tau_{\text{num}}} \cdot 100 \%.$$

Минус указывает на приближение к времени зажигания снизу. Легко прослеживается асимптотический характер решения (31). Время зажигания (31) хорошо согласуется с временем зажигания, полученным адиабатическим методом [1]: $\tau_{i,ad} = \pi/4 + \pi/2\Theta_0$, которое также согласуется с результатом численного счета.

Для полупрозрачного тела $B \sim o(1)$ и из (6), (7) находим

$$u_I(0, \tau) = 1 - 2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}} + \frac{1}{B} [1 - \exp(B^2 \tau_0) \operatorname{erfc}(B\sqrt{\tau_0})],$$

а из разложения (24) следует, что

$$A = \Theta_0 \left\{ 1 - 2\sqrt{\frac{\tau_0}{\pi}} + \frac{1}{B} [1 - \exp(B^2 \tau_0) \operatorname{erfc}(B\sqrt{\tau_0})] \right\},$$

$$C_1 = B \exp(B^2 \tau_0) \operatorname{erfc}(B\sqrt{\tau_0}).$$

Для этих констант решение системы (30) дает

$$1 + B \left(1 - 2 \sqrt{\frac{\tau_0}{\pi}} \right) = \exp(B^2 \tau_0) \operatorname{erfc}(B \sqrt{\tau_0}), \quad (32)$$

$$\omega = B \left[1 + B \left(1 - 2 \sqrt{\frac{\tau_0}{\pi}} \right) \right], \quad (33)$$

$$\tau_i = \tau_0 + \frac{\ln 2}{\Theta_0 \omega}. \quad (34)$$

Уравнение (32) при любых значениях B имеет единственный корень, который находится итерациями:

$$\tau_0^{(i+1)} = \frac{\pi}{4} \left\{ 1 + \frac{1}{B} \left[1 - \exp(B^2 \tau_0^{(i)}) \times \operatorname{erfc} \left(B \sqrt{\tau_0^{(i)}} \right) \right] \right\}^2.$$

Так, при $B = 1$ $\tau_0 = 2,204$ и из (33), (34) получим $\omega = 0,325$, $\tau_i = 2,204 + 2,135/\Theta_0$. При $B = 0,1$ $\tau_0 = 12,759$ и из (33), (34) имеем $\omega = 0,0697$, $\tau_i = 12,759 + 9,945/\Theta_0$. Сравнение времени зажигания для данных значений B с результатом численного счета исходной задачи (1)–(5) при различных значениях Θ_0 показано в табл. 1 (вторая и третья строки соответственно). Видно, что асимптотические формулы представляют время зажигания на уровне точности численных расчетов. Повидимому, этим объясняется некоторая немонотонность в поведении ошибки при переходе от $\Theta_0 = 10$ к $\Theta_0 = 20$ при $B = 1$ и от $\Theta_0 = 5$ к $\Theta_0 = 10$ при $B = 0,1$. Как видно из таблицы, параметр B влияет на приближение асимптотической формулы к времени зажигания. При небольших значениях B асимптотическая формула подходит к времени зажигания сверху.

При возрастании параметра B правая часть уравнения (32) быстро убывает до нуля и из (32), (33) получаем

$$\tau_0 = \frac{\pi}{4} \left(1 + \frac{1}{B} \right)^2 + o(B^{-2}),$$

$$\omega = \frac{2}{\pi(1 + 1/B)} + o(B^{-2}), \quad (35)$$

$$\tau_i = \frac{\pi}{4} \left(1 + \frac{1}{B} \right) \left[1 + \frac{1}{B} + \frac{2 \ln 2}{\Theta_0} \right] + o(B^{-2}).$$

Сравнение времени зажигания по (35) при $B = 10$ с результатом численного счета представлено в четвертой строке табл. 1. Вполне удовлетворительное согласие результатов наблюдается уже при $\Theta_0 \geq 10$.

Проведенный асимптотический анализ поведения температуры поверхности тела при зажигании потоком тепла в идейном плане аналогичен адиабатическому методу определения времени зажигания В. Н. Виллюнова. Полученные формулы для температуры поверхности и времени зажигания подобны результатам адиабатического метода, отличаются высокой точностью уже при реальных значениях Θ_0 и практически совпадают с результатом численного счета при возрастании Θ_0 . Таким образом, выполненное исследование показывает асимптотический характер адиабатического метода и может служить его обоснованием.

В качестве примера проведем расчет размерных времен зажигания непрозрачного и полупрозрачного нитроглицеринового к-вещества Н с теплофизическими и формально-кинетическими параметрами [6]: $E = 1,4654 \cdot 10^5$ Дж/моль, $Q = 1,13 \cdot 10^6$ Дж/кг, $z = 9,08 \cdot 10^{13}$ с⁻¹, $\rho = 1,6 \cdot 10^3$ кг/м³, $c = 1,465 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К), $\lambda = 0,2345$ Дж/(м·с·К), $a_0 = 1$, $m = 1$, $n = 4 \cdot 10^3$ м⁻¹. При этом $T_0 = 293$ К, $q = 4,1868 \cdot 10^4$ Дж/(м²·с). При добавлении 1% сажи к данному к-веществу Н оно становится непрозрачным ($n = \infty$). В этом случае масштабная температура T_* находится из условия $\omega = 2/\pi$, которое дает

$$T_* = \frac{E}{R \ln[\pi Q z \rho^m a_0^m \lambda (T_* - T_0) / (2q^2)]}.$$

Уравнение имеет единственный корень, который находится, например, итерациями и для заданных значений параметров равен $T_* = 483,85$ К. Используя это значение масштабной температуры, получим $\Theta_0 = 14,37$ и $t_h = 11,42$ с. Из (31) определим $t_i = 9,84$ с.

В случае полупрозрачного к-вещества Н для определения T_* используются уравнения (32), (33) и выражения ω и B , записанные через размерные параметры. В результате приходим к системе уравнений, которую можно решить итерациями:

$$T_*^{(i)} = \frac{E}{R \{ \ln[Q z \rho^m a_0^m / (nq)] - \ln[(\omega/B)^{(i)}] \}},$$

$$B^{(i)} = \frac{n\lambda}{q} (T_*^{(i)} - T_0),$$

$$\tau_0^{(i)} = \frac{\pi}{4} \left\{ 1 + \frac{1}{B^{(i)}} \left[1 - \left(\frac{\omega}{B} \right)^{(i)} \right] \right\}^2,$$

$$\left(\frac{\omega}{B}\right)^{(i+1)} = \exp\left((B^{(i)})^2 \tau_0^{(i)}\right) \operatorname{erfc}\left(B^{(i)} \sqrt{\tau_0^{(i)}}\right).$$

Итерации быстро сходятся и в данном случае дают $T_* = 481,24$ К, $\tau_0 = 1,146$, $B = 4,217$, $\omega = 0,515$. С помощью полученного значения T_* определяем $\Theta_0 = 14,32$ и $t_h = 11,083$ с. Из (34) с использованием полученных величин находим $t_i = 13,74$ с. Увеличение времени зажигания с ростом прозрачности тела связано с прохождением части поступающего внешнего тепла вглубь тела.

Для малопрозрачных тел ($B \gg 1$) масштабную температуру и время зажигания определяем по формулам (35) аналогично случаю непрозрачного тела, и для к-вещества Н получаем следующие значения параметров: $T_* = 481,23$ К, $\Theta_0 = 14,32$, $B = 4,212$, $t_h = 11,083$ с, $t_i = 14,37$ с. Видно, что в данном случае применение формул (35) вполне приемлемо, хотя значение B не очень большое. Различие во времени зажигания составляет всего 4,5 %.

Вторая из рассматриваемых задач — очаговое тепловое воспламенение реакционноспособной среды. Теоретически эту задачу изучали многие исследователи, далеко не полный список представляют работы [7–18]. В [10] на основе результатов подробного численного анализа задачи [9] показано, что предыдущие приближенные теории [11–14] критического условия очагового теплового взрыва неудовлетворительны и не дают даже правильной качественной критической связи определяющих параметров. Основная ошибка этих теорий была связана, в основном, с неверной качественной трактовкой поведения нелинейного теплоприхода от химических реакций. Подобный вывод обязывает к более строгому подходу при построении приближенных теорий.

В безразмерных переменных, характерных внутри очага разогрева [7, 8], математическая постановка задачи при плоскопараллельном начальном распределении температуры имеет вид [9, 16, 18]:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{1}{\delta} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - \psi(\eta) \exp\left(-\frac{v}{1 - \sigma v / \Theta_0}\right); \quad (36)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = \frac{Le}{\delta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} + \gamma_1 \psi(\eta) \exp\left(-\frac{v}{1 - \sigma v / \Theta_0}\right), \quad (37)$$

$$\tau > 0, \quad 0 < \xi < \infty;$$

$$v(\xi, 0) = \Theta_0[1 - f(\xi)], \quad \eta(\xi, 0) = 0; \quad (38)$$

$$\frac{\partial v(0, \tau)}{\partial \xi} = \frac{\partial \eta(0, \tau)}{\partial \xi} = 0, \quad (39)$$

$$\frac{\partial v(\infty, \tau)}{\partial \xi} = \frac{\partial \eta(\infty, \tau)}{\partial \xi} = 0,$$

где

$$v = \frac{E(T_0 - T)}{RT_0^2}, \quad \eta = \frac{a_0 - a}{a_0}, \quad \xi = \frac{x}{L},$$

$$\tau = \frac{t}{t_{ad}}, \quad \sigma = \frac{T_0 - T_i}{T_0}, \quad \Theta_0 = \frac{E(T_0 - T_i)}{RT_0^2},$$

$$\delta = \frac{\rho^m a_0^m EQzL^2}{\lambda RT_0^2} \exp\left(-\frac{E}{RT_0}\right), \quad Le = \frac{c\rho D}{\lambda},$$

$$\gamma_1 = \frac{cRT_0^2}{a_0 QE}, \quad t_{ad} = \frac{RT_0^2 c}{EQz\rho^{m-1} a_0^m} \exp\frac{E}{RT_0},$$

v — температура в переменных Франк-Каменецкого; $\psi(\eta)$ — кинетическая функция химических реакций; $f(\xi)$ — функция, определяющая начальное распределение температуры в среде с максимумом в центре очага ($f(0) = 1$, $f(\infty) = 0$); T_0 и T_i — начальные температуры в центре очага разогрева и вне его; L — характерный размер (полуширина) очага разогрева. Используя далее в качестве зависимой переменной разогрев от химических реакций $\Phi = v - v_I$, где v_I — решение задачи об инертном охлаждении очага:

$$\frac{\partial v_I}{\partial \tau} = \frac{1}{\delta} \frac{\partial^2 v_I}{\partial \xi^2}, \quad v_I(\xi, 0) = \Theta_0[1 - f(\xi)], \quad (40)$$

$$\frac{\partial v_I(0, \tau)}{\partial \xi} = \frac{\partial v_I(\infty, \tau)}{\partial \xi} = 0,$$

из (36)–(39) приходим к задаче

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = \frac{1}{\delta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} -$$

$$- \psi(\eta) \exp\left[-\frac{\Phi + v_I}{1 - \sigma(\Phi + v_I)/\Theta_0}\right]; \quad (41)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = \frac{Le}{\delta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} +$$

$$+ \gamma_1 \psi(\eta) \exp\left[-\frac{\Phi + v_I}{1 - \sigma(\Phi + v_I)/\Theta_0}\right], \quad (42)$$

$$\tau > 0, \quad 0 < \xi < \infty;$$

$$\Phi(\xi, 0) = \eta(\xi, 0) = 0; \quad (43)$$

$$\frac{\partial \Phi(0, \tau)}{\partial \xi} = \frac{\partial \eta(0, \tau)}{\partial \xi} = 0, \quad (44)$$

$$\frac{\partial \Phi(\infty, \tau)}{\partial \xi} = \frac{\partial \eta(\infty, \tau)}{\partial \xi} = 0.$$

Из задачи (41)–(44), аналогичной задаче (8)–(11), с помощью преобразования Лапласа по переменной $\xi \rightarrow S$ и предельного перехода при $S \rightarrow \infty$ получаются уравнения для разогрева от химических реакций и выгорания в центре очага при $\xi = 0$: $\Phi(0, \tau) = \Phi_s(\tau)$, $\eta(0, \tau) = \eta_s(\tau)$:

$$\frac{d\Phi_s}{d\tau} + \psi(\eta_s) \times \exp \left\{ \frac{\Phi_s + v_I(0, \tau)}{1 - \sigma[\Phi_s + v_I(0, \tau)]/\Theta_0} \right\} = \bar{v}, \quad (45)$$

$$\frac{d\eta_s}{d\tau} - \gamma_1 \psi(\eta_s) \times \exp \left\{ - \frac{\Phi_s + v_I(0, \tau)}{1 - \sigma[\Phi_s + v_I(0, \tau)]/\Theta_0} \right\} = 0, \quad (46)$$

$$\Phi_s(0) = \eta_s(0) = 0. \quad (47)$$

Задача (45)–(47) так же, как и (17)–(19), имеет первый интеграл: $\eta_s(\tau) = -\gamma_1 \Phi_s(\tau)$, использование которого в (45) позволяет получить задачу для разогрева в центре очага:

$$\frac{d\Phi_s}{d\tau} + \psi(-\gamma_1 \Phi_s) \times \exp \left\{ - \frac{\Phi_s + v_I(0, \tau)}{1 - \sigma[\Phi_s + v_I(0, \tau)]/\Theta_0} \right\} = 0, \quad (48)$$

$$\Phi_s(0) = 0. \quad (49)$$

В невырожденных режимах на этапе воспламенения очага максимум температуры будет находиться в точке $\xi = 0$, поэтому критерий и время воспламенения можно определять по уравнению (48). Для простой реакции нулевого порядка, как и в предыдущей задаче, момент воспламенения аналогично [6–8] можно определить как время неограниченного возрастания температуры: $\Phi_s(\tau \rightarrow \tau_i) \rightarrow -\infty$. Для реакций более высокого порядка этот критерий воспламенения имеет асимптотический смысл при $\Theta_0 \gg 1$, $\gamma_1 \ll 1$. Для автокаталитических реакций аналогично [18] момент воспламенения

можно определить по достижению максимальной скорости химической реакции. Определение времени воспламенения с помощью численного счета задачи (48), (49) значительно проще исходной (36)–(39). В частности, численный счет задачи (48), (49) определяет различные режимы воспламенения очага разогрева, включая режим с первоначальным понижением температуры центра очага, описанный в [17], и критические параметры их разделяющие.

Для веществ, способных к взрывчатому превращению, можно провести асимптотическое решение (48), (49), используя $\Theta_0 \gg 1$. Если искать решение (48), (49) в виде асимптотического разложения по параметру Θ_0^{-1} , то для главного приближения из (48), (49) с точностью $o(\Theta_0^{-1})$ получаем задачу

$$\frac{d\Phi_s}{d\tau} + \psi(-\gamma_1 \Phi_s) \exp[-\Phi_s - v_I(0, \tau)] = 0, \quad (50)$$

$$\Phi_s(0) = 0,$$

интегрирование которой дает

$$\int_0^{\Phi_s} \frac{\exp y}{\psi(-\gamma_1 y)} dy = - \int_0^{\tau} \exp[-v_I(0, y)] dy. \quad (51)$$

Задача (50) и ее интеграл (51) совпадают с соответствующими выражениями для разогрева внутри очага, полученными в [7, 16, 18] с помощью асимптотического анализа при больших значениях температурного напора ($\Theta_0 \gg 1$) и параметра Франк-Каменецкого ($\delta \gg 1$). Для дальнейшего исследования (51) необходимо конкретизировать кинетику химической реакции. Так, для реакции m -го порядка $\psi(-\gamma_1 \Phi) = (1 + \gamma_1 \Phi)^m$ и интеграл в левой части (51) при $\gamma_1 \ll 1$ дает

$$\int_0^{\Phi_s} \frac{\exp y}{(1 + \gamma_1 y)^m} dy = \frac{\exp \Phi}{(1 + \gamma_1 \Phi)^m} \left[1 + \frac{\gamma_1 m}{1 + \gamma_1 m} \right] - (1 + \gamma_1 m) + o(\gamma_1^2). \quad (52)$$

Подстановка (52) в (51) приводит к трансцендентному уравнению для Φ_s , имеющему единственный корень $\Phi_s < 0$, который находится итерациями. В момент воспламенения $\Phi_s(\tau \rightarrow \tau_i) \rightarrow -\infty$, а из (51), (52) получаем уравнение для времени воспламенения:

$$1 + \gamma_1 m = \int_0^{\tau_i} \exp[-v_I(0, y)] dy. \quad (53)$$

Инертное охлаждение центра очага определяется из (40):

$$v_I(0, \tau) = \Theta_0 \sqrt{\frac{\delta}{\pi\tau}} \times \int_0^\infty [1 - f(y)] \exp\left(-\frac{\delta y^2}{4\tau}\right) dy. \quad (54)$$

При $\Theta_0 \gg 1$ и ограниченных значениях $\delta \sim o(1)$ интеграл в (53) остается меньше единицы даже при $\tau_i \rightarrow \infty$, уравнение (53) не имеет решения и воспламенение не происходит. Режим воспламенения реализуется лишь при $\delta \gg 1$, когда уравнение (53) имеет решение. Предельное значение δ_* , разделяющего режимы стационарного и взрывного прохождения процесса, можно найти аналогично [7, 16]. Так, для П-образного очага разогрева $f(\xi) = 1 - \frac{1}{2}(\xi - 1)$, и из (54) находится

$$v_I(0, \tau) = \Theta_0 \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\delta}{\tau}}\right) = 2\Theta_0 \sqrt{\frac{\tau}{\pi\delta}} \exp\left(-\frac{\delta}{4\tau}\right) \left[1 + o\left(\frac{1}{\delta}\right)\right].$$

Подставляя последнее выражение в (53) и разлагая экспоненту в ряд, после взятия интеграла с точностью до главных слагаемых получаем следующее уравнение для времени воспламенения:

$$\tau_i - (1 + m\gamma_1) = \frac{8\Theta_0 T_i^{5/2}}{\sqrt{\pi}\delta^{3/2}} \exp\left(-\frac{\delta}{4\tau_i}\right). \quad (55)$$

При $\delta > \delta_*$ оно имеет два положительных корня, меньший из которых определяет время воспламенения. Предельное значение δ_* , при котором еще существует решение, находим из условия касания левой и правой частей равенства (55):

$$\delta_* = 4(1 + \gamma_1 m) \left(1 + \frac{4}{\delta_*}\right) \times \ln \left[\frac{2\Theta_0(1 + \gamma_1 m)^{5/2}}{\sqrt{\pi}\delta_*} \left(1 + \frac{4}{\delta_*}\right)^{5/2} \right], \quad (56)$$

которое легко определяется итерациями. Сравнение полученного критического значения $\delta_*(\Theta_0)$ из (56) при реакции порядка $m = 0$ с результатом численного счета [10] представлено в табл. 2, где $\Delta\delta_* [\%] = (\delta_{*(56)} - \delta_{*[10]})/\delta_{*[10]} \cdot 100\%$. Хорошо прослеживается асимптотический характер решения (56) по $\Theta_0 \gg 1$. При $\Theta_0 > 40$ согласие результатов идет на уровне точности численного счета.

Для рассмотренного в первой задаче нитроглицеринового к-вещества Н при $T_0 = 500$ К

Таблица 2

Θ_0	$\delta_{*[10]}$	$\delta_{*(56)}$	$\Delta\delta_*, \%$
10	7,87	10,95	39,1
20	11,07	13,06	18,0
30	13,06	14,35	9,9
40	14,52	15,28	5,2

и $T_i = 293$ К определяющие безразмерные параметры, входящие в (56), (55), равны $\Theta_0 = 14,6$, $\gamma_1 = 1,84 \cdot 10^{-2}$. Из (56) находится критическое значение параметра Франк-Каменецкого $\delta_* = 12,35$, а из (55) — время зажигания на пределе очагового воспламенения $\tau_i = 1,2$. Переход к размерным переменным дает критическое значение полуширины очага разогрева $L = 0,71 \cdot 10^{-4}$ м и время его воспламенения $t_i = 0,49$ с.

ВЫВОДЫ

1. Получены обыкновенные дифференциальные уравнения для температуры тела в точке $x = 0$ при зажигании потоком излучения и очаговом тепловом воспламенении. Показано подобие между разогревом от химических реакций и выгоранием в точке $x = 0$.

2. Проведен асимптотический анализ полученных уравнений при больших значениях температурного напора ($\Theta_0 \gg 1$). Дано сравнение с результатами численного счета задач.

3. Асимптотический анализ задачи для разогрева поверхности (21), (22) при зажигании тела потоком излучения дает обоснование «адиабатического метода» определения временных характеристик зажигания В. Н. Виллюнова [1, 2, 6].

4. Подтверждены результаты асимптотического анализа очагового теплового воспламенения [7, 16, 18].

Автор выражает глубокую признательность И. В. Городиловой за представление некоторых результатов численного счета.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 98-01-03009).

ЛИТЕРАТУРА

1. Виллюнов В. Н. К тепловой теории зажигания // Физика горения и взрыва. 1966. Т. 2, № 2. С. 77–82
2. Виллюнов В. Н. Приближенные методы решения задач тепловой теории зажигания // Пер-

- вый Всесоюз. симпоз. по горению и взрыву: Тез. докл. М.: Наука, 1968. С. 9–11.
3. Kim C. S., Chung P. M. An asymptotic, thermo-diffusive ignition theory of porous solid fuels // J. Heat Transfer. 1976. V. 98. P. 269–276.
 4. Kim C. S., Chung P. M. Ignition of a porous solid fuel by convective heat and mass transfer at the fuel surface // Combust. Sci. Technol. 1977. V. 15. P. 75–82.
 5. Гусаченко Л. К. Нагревание полупространства проникающим узким лучом // Методы и алгоритмы параметрического анализа линейных и нелинейных моделей переноса. М.: МГОПИ, 1988. Вып. 6. С. 22–27.
 6. Виллюнов В. Н. Теория зажигания конденсированных веществ. Новосибирск: Наука, 1987.
 7. Вуркина Р. С., Виллюнов В. Н. О возбуждении химической реакции в горячей точке // Физика горения и взрыва. 1980. Т. 16, № 4. С. 75–79.
 8. Вуркина Р. С., Виллюнов В. Н. Асимптотика задач теории горения. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1982.
 9. Мержанов А. Г., Барзыкин В. В., Гонтовская В. Т. Задача об очаговом тепловом взрыве // Докл. АН СССР. 1963. Т. 148, № 2. С. 380–383.
 10. Merzhanov A. G. An critical conditions for thermal explosion of a hot spot // Combust. Flame. 1966. V. 10, N 4. P. 341–348.
 11. Zinn J. Initiation of explosions of hot spots // J. Chem. Phys. 1962. V. 36, N 7. P. 1949.
 12. Boddington T. The growth and decay of hot spots and relation between structure and stability // 9th Symp. on Combustion. New York — London: Acad. Press, 1963. P. 287.
 13. Friedman M. H. Size of “hot spots” in the impact explosion of exothermic materials // Trans. Farady Soc. 1963. V. 59, N 8. P. 1865.
 14. Thomas P. H. A comparison of some hot spot theories // Combust. Flame. 1965. V. 9, N 4. P. 369–372.
 15. Thomas P. H. An approximate theory of “hot spot” critically // Combust. Flame. 1973. V. 21, N 1. P. 99–109.
 16. Буркина Р. С., Виллюнов В. Н. Очаговое тепловое воспламенение при произвольном начальном распределении температуры // Хим. физика. 1982. № 3. С. 419–422.
 17. Князева А. Г., Буркина Р. С., Виллюнов В. Н. Особенности очагового теплового воспламенения при различных начальных распределениях температуры // Физика горения и взрыва. 1988. Т. 24, № 3. С. 45–47.
 18. Буркина Р. С., Князева А. Г. Влияние автокатализа на критические условия очагового теплового воспламенения // Физика горения и взрыва. 1991. Т. 27, № 2. С. 15–21.

*Поступила в редакцию 27/X 1998 г.,
в окончательном варианте — 24/VI 1999 г.*