

УДК 532.529.5

## МОДЕЛИРОВАНИЕ НАРАСТАНИЯ ЛЬДА НА ПОВЕРХНОСТИ КРЫЛОВОГО ПРОФИЛЯ В ПОТОКЕ ВОЗДУХА, СОДЕРЖАЩЕМ ЧАСТИЦЫ ЛЬДА

А. В. Кашеваров\*, А. Л. Стасенко\*,\*\*

\* Центральный аэрогидродинамический институт им. Н. Е. Жуковского,  
140180 Жуковский, Россия

\*\* Московский физико-технический институт, 140180 Жуковский, Россия  
E-mails: a.v.kash@yandex.ru, stasenko@serpantin.ru

Исследуется процесс обледенения крылового профиля при столкновении с кристаллами льда. Сформулирована физико-математическая модель движения сфероидальных кристаллов в потоке газа и их взаимодействия с обтекаемым телом, в которой учитывается ориентация несферической частицы относительно вектора скорости обтекающего газа. При этом полагается, что при столкновении с поверхностью происходит частичное разрушение частицы под действием нормальных и тангенциальных напряжений и часть ее массы остается в окрестности точки столкновения. С использованием метода приближенных конформных отображений рассчитано невязкое обтекание профиля, форма которого меняется со временем.

Ключевые слова: обледенение, кристаллы льда, несферические частицы, математическое моделирование.

DOI: 10.15372/PMTF20180410

**Введение.** Одной из проблем, возникающих при обтекании тел потоком газа, содержащим капли или твердые частицы, является проблема обледенения летательного аппарата [1]. Ранее полагалось, что обледенение может происходить только в облаках, состоящих из жидких переохлажденных капель. Такой случай хорошо изучен, имеется множество работ, посвященных исследованию взаимодействия летательного аппарата с переохлажденным воздушно-капельным потоком. Также полагалось, что в облаках, встречающихся на высоте  $6 \div 13$  км и состоящих из кристаллов льда, риск обледенения мал. Однако проведенный в работе [2] анализ летных происшествий, вызванных отказом двигателей при полете в данных условиях, позволяет предположить, что эти происшествия связаны с обледенением нагретых элементов конструкции двигателя вследствие налипания кристаллов льда. В настоящее время этот режим обледенения активно исследуется. В частности, всестороннему исследованию проблемы обледенения вследствие налипания ледяных кристаллов посвящен продолжавшийся более четырех лет европейский проект [3], включающий проведение летных экспериментов.

Одним из изучаемых в [3] аспектов было взаимодействие кристалла с поверхностью. В работе [4] выполнены эксперименты с частицами льда сферической и несферической

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 16-19-10472).

форм, ударяющимися о твердую сухую поверхность. Как и в случае частиц из других материалов (см., например, [5]), существует пороговая скорость соударения, при значениях ниже которой ледяная частица не разрушается. С увеличением скорости удара частица разрушается сильнее, при этом даже на холодной поверхности остается некоторая часть разрушенной массы кристалла. В работе [6] представлены теоретические зависимости остаточной доли кристалла от скорости удара для частиц сферической и цилиндрической форм при нормальном соударении. Эти данные необходимы при численном моделировании аккреции ледяных кристаллов на поверхности обтекаемого тела.

В рамках проекта [3] проведена серия экспериментов в аэрохолодильной трубе на модели аэродинамического профиля с подогреваемой передней кромкой в условиях кристаллического обледенения [7]. Установлено, что незначительный подогрев лобовой поверхности модели приводит к прилипанию кристаллов, которое усиливается при увеличении подогрева. При дальнейшем увеличении температуры лобовой части на ней образуется водяная пленка, при еще большем нагреве пленка затекает на плоский необогреваемый участок и замерзает на нем, образуя так называемый барьерный лед. Также экспериментально исследовалось образование барьерного льда при наличии искусственно созданной пленки воды. В рамках проекта [3] создана физико-математическая модель воздействия потока воздуха, содержащего частицы льда, на пленку воды, движущуюся по поверхности твердого тела [8].

В настоящей работе, развивающей исследование [8], в качестве начального этапа численного моделирования обледенения экспериментального профиля [7] вследствие налипания кристаллов льда рассмотрен наиболее простой режим обледенения без образования жидкой пленки. Прежде всего, при решении траекторной задачи о движении кристаллов в сносимом потоке необходимо найти область орошения, т. е. участок профиля, на котором происходит соударение кристаллов с поверхностью. В отличие от капель воды, которые, как правило, считаются сферическими, кристаллы льда характеризуются большим разнообразием форм, часто существенно отличающихся от сферической (например, снежинки в виде пластинок или игл). Исследование влияния несферичности частиц и их ориентации в потоке на площадь области орошения является одной из целей настоящей работы. Еще одним аспектом исследования является учет частичного разрушения кристаллов при столкновении с поверхностью тела для определения плотности потока массы прилипающих частиц.

**1. Динамика несферических частиц в окрестности обтекаемого тела.** На движение несферической частицы в несущем газе оказывает влияние поперечная сила. Уравнение движения имеет вид

$$m_0 \frac{d\mathbf{V}_2}{dt} = \frac{1}{2} C_D \pi a_p^2 |\mathbf{V}_{12}| \mathbf{V}_{12} + \frac{1}{2} C_L \pi a_p^2 (\mathbf{e}_p \times \mathbf{V}_{12}) \times \mathbf{V}_{12}, \quad (1.1)$$

где  $m_0$  — масса частицы;  $\mathbf{V}_{12} = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2$  — скорость обтекания частицы (разность скорости газа в центре масс частицы и скорости частицы);  $C_D, C_L$  — коэффициенты сопротивления и подъемной силы частицы;  $a_p$  — радиус эквивалентного по объему шара;  $\mathbf{e}_p$  — единичный вектор, характеризующий ориентацию частицы и направленный в случае сфероида вдоль оси его симметрии.

В [9] для коэффициента сопротивления  $C_D$  при произвольных значениях числа Рейнольдса частицы  $Re = 2a_p |\mathbf{V}_{12}| / \nu$  ( $\nu$  — кинематическая вязкость несущей среды) предложена следующая интерполяция, асимптотически описывающая стоксово обтекание ( $Re \ll 1$ ) и случай невязкой жидкости ( $Re \gg 1$ ):

$$C_D = \frac{8}{Re \sqrt{\Phi_{\parallel}}} + \frac{16}{Re \sqrt{\Phi}} + \frac{3}{\sqrt{Re} \Phi^{3/4}} + \frac{0,432 \cdot 10^{0,4(-\lg \Phi)^{1/5}}}{\Phi_{\perp}}. \quad (1.2)$$

Здесь  $\Phi$  — “сферичность” (отношение площади поверхности объемно-эквивалентного шара  $4\pi a_p^2$  к площади поверхности несферической частицы);  $\Phi_{\perp} = \pi a_p^2 / A_{\perp}$  — “поперечная сферичность” (отношение площади диаметрального сечения шара к площади поперечного сечения несферической частицы в плоскости, перпендикулярной вектору скорости обтекания);  $\Phi_{\parallel}$  — “продольная сферичность” (отношение площади поперечного сечения объемно-эквивалентного шара к разности между половиной площади поверхности рассматриваемой частицы и средней площадью проекции поперечного сечения на все плоскости, содержащие вектор скорости обтекания).

В работе [9] также отмечено, что среднее отклонение значений  $C_D$ , рассчитанных по формуле (1.2), от известных экспериментальных данных (2061 измерение) составляет 14,1 % — меньше, чем рассчитанные по другим выражениям. При замене “продольной сферичности”  $\Phi_{\parallel}$  на  $\Phi_{\perp}$  (более простой в вычислении) это отклонение составляет 14,4 %. Поэтому в настоящей работе использовалась формула (1.2) с данной заменой.

Для сплюснутых ( $E < 1$ ) и вытянутых ( $E > 1$ ) сфероидов ( $E = a/b$  — отношение полуосей) имеем:

—  $E < 1$ :

$$A_{\perp} = \pi ab \cos^2 \alpha + \pi b^2 \sin^2 \alpha, \quad \Phi = 4E^{2/3} \left( 2 + \frac{E^2}{\zeta} \ln \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta} \right)^{-1}, \quad \zeta = (1 - E^2)^{1/2},$$

—  $E > 1$ :

$$A_{\perp} = \pi b^2 \cos^2 \alpha + \pi ab \sin^2 \alpha, \quad \Phi = 2E^{2/3} \left( 1 + \frac{E}{\zeta} \arcsin \zeta \right)^{-1}, \quad \zeta = (1 - E^{-2})^{1/2}$$

( $\alpha$  — угол атаки (между векторами  $\mathbf{e}_p$  и  $\mathbf{V}_{12}$ )).

Радиус объемно-эквивалентного шара равен

$$a_p = \frac{1}{2} \left( \frac{6W_0}{\pi} \right)^{1/3},$$

где  $W_0$  — объем частицы любой формы. В случае сфероидов  $a = a_p E^{2/3}$ ,  $b = a_p E^{-1/3}$ .

Для определения коэффициента подъемной силы в [10] предложено выражение

$$C_L = C_D \sin^2 \alpha \cos \alpha |\cos \alpha|.$$

В результате осреднения множителя при  $C_D$  по телесному углу, содержащему все углы атаки  $0 < \alpha < \pi/2$ , получаем  $C_L \approx 0,13C_D$ , поэтому (как показывают расчеты) влияние  $C_L$  на плотность потока массы несущественно.

Полагается, что частицы на бесконечном расстоянии от обтекаемого тела не вращаются. Следовательно, их вращение может возникнуть только вследствие того, что скорость обтекающего газа  $\mathbf{V}_{12}$  изменяется на расстоянии, соответствующем размеру частицы. Поскольку характерный размер частицы значительно меньше характерного размера обтекаемого тела ( $a_p \ll R_w$ ), закручивающий момент мал. Соответственно малым является демпфирующий момент, особенно в случае периферийных траекторий, касающихся тела и определяющих поверхность орошения.

Известно, что в неподвижной среде сплюснутые частицы ( $E < 1$ ) опускаются таким образом, что их ось симметрии вертикальна, а удлинненные ( $E > 1$ ) — таким образом, что их ось симметрии перпендикулярна вектору тяготения. Однако суммарное воздействие силы тяжести, восходящих и горизонтальных потоков воздуха может привести к любой преимущественной ориентации оси симметрии сфероидов по отношению к телу, движущемуся в облаке. В экспериментах в аэроклиматической трубе [7] ориентация кристаллов может быть хаотической.

**2. Модель аккреции массы частиц на поверхности обтекаемого тела.** В работе [6] теоретически исследован нормальный удар об абсолютно твердую поверхность сферической или цилиндрической частицы льда, который рассматривался как полухрупкий материал, и получена следующая формула для отношения объема разрушенной после соударения части частицы  $W$  к первоначальному объему:

$$\frac{W}{W_0} = 1 - \exp\left(-\frac{\rho_i^0 u_n^2}{2\sigma_n}\right). \quad (2.1)$$

Здесь  $\rho_i^0$  — плотность льда;  $u_n$  — скорость частицы при ударе;  $\sigma_n$  — предел текучести льда при сжатии, зависящий от скорости деформации. В [6] предложена аппроксимационная формула

$$\sigma_n = \sigma_{n0} \exp\left(\frac{0,9u_n}{u_{nc}}\right), \quad (2.2)$$

где  $\sigma_{n0}$  — предел текучести при малых скоростях деформации;  $u_{nc} = \sqrt{\sigma_{n0}/\rho_i^0}$  — характерная скорость.

Из (2.1) следует, что при малых скоростях удара ( $u_n \rightarrow 0$ ) частица не разрушается, а при больших ( $u_n \rightarrow \infty$ ) происходит ее полное разрушение ( $W/W_0 \rightarrow 1$ ).

Столкновение кристалла с поверхностью может сопровождаться его адгезией, что приводит к появлению ледяного слоя. Заметим, что при соударении лед — лед ледяной слой также разрушается, поэтому следует использовать среднее значение предела текучести  $\langle\sigma_n\rangle = (\sigma_n^{-1} + \sigma_w^{-1})^{-1} = \sigma_n/2$  (поскольку предел текучести материала стенки  $\sigma_w \equiv \sigma_n$ ); при ударе о металлические мишени  $\sigma_w \gg \sigma_n$  и стенка не оказывает влияния на процесс. С учетом этого формула (2.1) модифицирована следующим образом:

$$\frac{W}{W_0} = \frac{m}{m_0} = 1 - \exp\left[-\rho_i^0\left(\frac{u_n^2}{\sigma_n} + \frac{u_\tau^2}{\sigma_\tau}\right)\right]. \quad (2.3)$$

В (2.3)  $m_0$ ,  $m$  — массы кристалла до удара и разрушенной после соударения части;  $u_\tau$  — касательная компонента вектора скорости удара. Предполагается, что плотность льда не меняется, и учитывается, что разрушение кристалла может происходить в результате как нормальных, так и сдвиговых напряжений  $\sigma_\tau$ , действующих независимо друг от друга. Зависимость предела текучести льда при сдвиге  $\sigma_\tau$  от касательной скорости удара  $u_\tau$  определяется с использованием формулы (2.2) при характерной скорости  $u_{\tau c} = \sqrt{\sigma_{\tau 0}/\rho_i^0}$ .

Предполагается, что разрушенная часть частицы полностью примерзает к поверхности в окрестности точки столкновения. При столкновении может разрушаться не только частица, но и слой льда, поэтому формула для скорости нарастания толщины слоя льда  $h_i$

$$\frac{dh_i}{dt} = \frac{\rho_i u_n}{\rho_i^0} \frac{m}{m_0} \quad (2.4)$$

( $\rho_i$  — массовая концентрация кристаллов льда в набегающем потоке) позволяет получить верхний предел этой величины.

Данные о прочностных характеристиках льда существенно различаются. В [6] для предела текучести  $\sigma_{n0}$  принято значение 5,2 МПа, полученное в экспериментах [11] с ледяными градинами диаметром 4 ÷ 6 см. Сведения о пределе текучести при сдвиге в [11] отсутствуют. В настоящей работе в расчетах использованы данные работы [12], согласно которым для поликристаллического льда, состоящего из уплотненных кристаллов различной формы,  $\sigma_{n0} = 2,5$  МПа,  $\sigma_{\tau 0} = 0,57$  МПа. Плотность льда принята равной  $\rho_i^0 = 920$  кг/м<sup>3</sup>.

**3. Численное исследование и его результаты.** Численное моделирование нарастания льда проводилось для крылового профиля [7] с полуцилиндрическими передней (радиус закругления  $R_w = 15$  мм) и задней ( $r_w = 10$  мм) кромками и плоскими участками

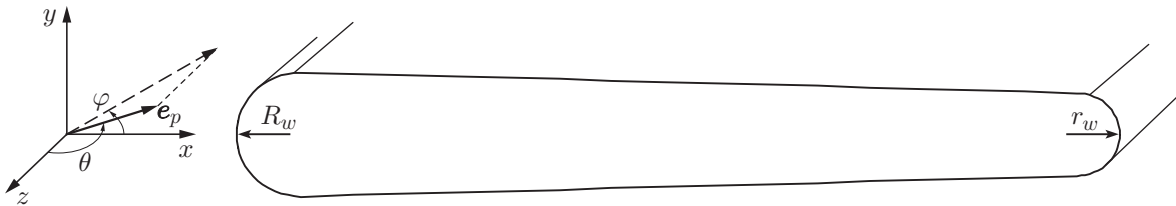


Рис. 1. Схема модели и система координат для описания ориентации частицы

сверху и снизу (длина хорды равна 205 мм). Схема модели и система координат для описания ориентации частицы представлены на рис. 1.

Поле скоростей несущего газа вокруг профиля рассчитывалось с использованием метода конформных отображений в следующей трактовке. Уравнение Лапласа, определяющее потенциал  $\phi$ , в любых криволинейных координатах  $\xi$ ,  $\eta$ , являющихся конформным отображением декартовой сетки, имеет один и тот же вид [13]

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} = 0.$$

Для случая профиля в отсутствие циркуляции решение этого уравнения можно записать следующим образом:

$$\phi = C \operatorname{ch} \xi \cos(\eta - \gamma) \quad (3.1)$$

( $C$ ,  $\gamma$  — постоянные).

Для определения криволинейной системы координат, связанной с обтекаемым профилем, следует конформно отобразить контур профиля на контур единичного круга, что, как правило, можно сделать лишь приближенно, используя, например, метод тригонометрической интерполяции [14]. Согласно этому методу декартовы  $x$ ,  $y$  и специальные криволинейные координаты связаны формулами

$$x = \sum_{n=-1}^M e^{-n\xi} (A_n \cos(n\eta) + B_n \sin(n\eta)), \quad y = - \sum_{n=-1}^M e^{-n\xi} (A_n \sin(n\eta) - B_n \cos(n\eta)).$$

Единичная окружность разбивается на  $M$  равных частей и находятся неизвестные коэффициенты  $A_n$ ,  $B_n$ :

$$A_n = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M [x_{k-1} \cos(n\eta_{k-1}) - y_{k-1} \sin(n\eta_{k-1})],$$

$$B_n = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M [x_{k-1} \sin(n\eta_{k-1}) + y_{k-1} \cos(n\eta_{k-1})].$$

Здесь  $\eta_k$  — угловые координаты узловых точек окружности;  $x_k$ ,  $y_k$  — неизвестные декартовы координаты точек профиля, являющиеся конформными образами узловых точек окружности. Для определения значений  $x_k$ ,  $y_k$  используется итерационная процедура [14].

Константы  $C$ ,  $\gamma$  в (3.1) находятся из условия, что скорость потока на бесконечности задана. В случае если она направлена вдоль оси  $x$  и равна  $U_\infty$ , имеем

$$C = \frac{2(A_{-1}^2 + B_{-1}^2)U_\infty}{A_{-1} \cos \gamma - B_{-1} \sin \gamma}, \quad \operatorname{tg} \gamma = -\frac{B_{-1}}{A_{-1}}.$$

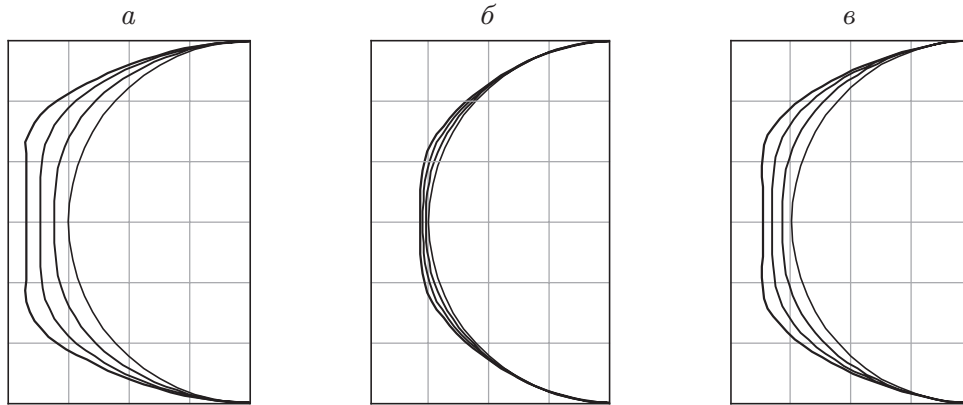


Рис. 2. Изменение со временем формы профиля при нарастании льда для сферических (а), хаотически ориентированных сплюснутых ( $E = 0,1$ ) (б) и вытянутых ( $E = 10$ ) сфероидальных (в) частиц при  $a_p = 50$  мкм,  $\Delta t = 15$  с

После определения компонент скорости течения

$$u_{1\xi} = H^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial \xi}, \quad u_{1\eta} = H^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial \eta}$$

( $H$  — коэффициент Ламе) с помощью метода конечных разностей рассчитывались траектории частиц на основе векторного уравнения (1.1), записанного в криволинейной ортогональной системе координат, определялись область орошения и скорость нарастания льда по формуле (2.4). Затем определялось изменение формы профиля за счет образования льда, происходящее за фиксированный промежуток времени  $\Delta t$ , рассчитывалось обтекание “нового” профиля и т. д.

В расчетах в качестве входных данных использовались параметры, характерные для экспериментов [7]: скорость набегающего потока  $U_\infty = 50$  м/с, его температура  $T_\infty = 263$  К,  $\rho_i = 5$  г/м<sup>3</sup>. Использовались два значения радиуса частиц (объемно-эквивалентного шара)  $a_p = 500, 50$  мкм, шаг по времени изменения формы профиля составлял  $\Delta t = 15$  с.

На рис. 2,а показано нарастание льда на профиле в случае сферических частиц ( $E = 1$ ) радиусом  $a_p = 50$  мкм. Для сферических частиц и сплюснутых сфероидов ( $E = 0,1$ ) радиусом  $a_p = 500$  мкм изменение формы профиля при нарастании льда незначительно отличается от представленного на рис. 2,а. Видно, что область орошения является практически вся лобовая поверхность профиля, т. е. частицы слабо отклоняются потоком. Однако в случае сплюснутых сфероидальных кристаллов ( $E = 0,1$ ) радиусом  $a_p = 50$  мкм процесс нарастания льда (рис. 3) существенно отличается от показанного на рис. 2,а. Заметим, что в экспериментах [7] использовались, в частности, кристаллы свежевыпавшего снега, представлявшие собой гексагональные пластинки с близкими к указанным выше параметрами  $E$  и  $a_p$ . В этом случае изменение формы профиля при нарастании льда зависит от ориентации кристаллов. Полагалось, что все кристаллы ориентированы одинаково и их ориентация не меняется при движении. Заметим, что, в случае когда ось симметрии кристалла направлена вдоль оси  $z$  ( $\theta = 0^\circ, \varphi = 0^\circ$ ), нарастание льда в течение 45 с не существенно и не показано на рис. 3. В отличие от рис. 3,а,б на рис. 3,в отчетливо видна асимметрия наледи, что обусловлено одинаковым наклоном ( $\varphi = 45^\circ$ ) осей всех частиц-сфероидов к плоскости симметрии. Картина обледенения при  $\varphi = 135^\circ$  получается зеркальным отображением относительно горизонтальной оси.

На рис. 4 представлена зависимость отношения массы прилипшей части кристалла к его первоначальной массе при соударении с цилиндрической частью профиля в отсут-

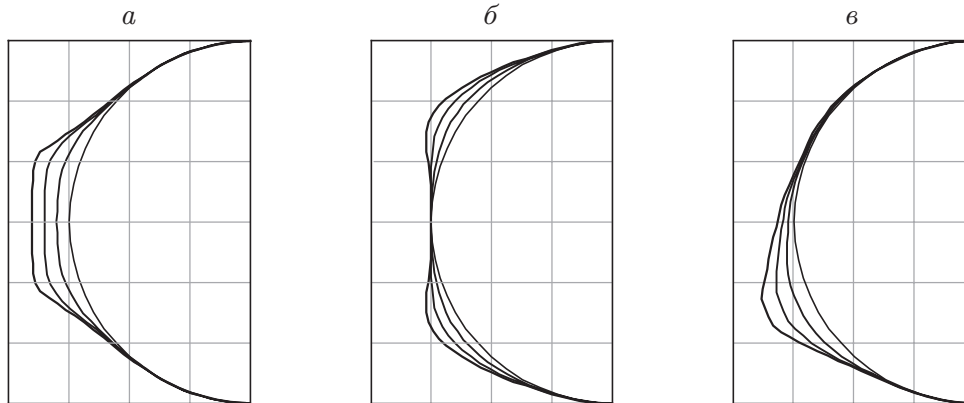


Рис. 3. Изменение со временем формы профиля при нарастании льда для сферических частиц ( $a_p = 50$  мкм,  $E = 0,1$ ) с различной ориентацией при  $\theta = 90^\circ$ :  $a$  —  $\varphi = 0^\circ$ ,  $b$  —  $\varphi = 90^\circ$ ,  $v$  —  $\varphi = 45^\circ$

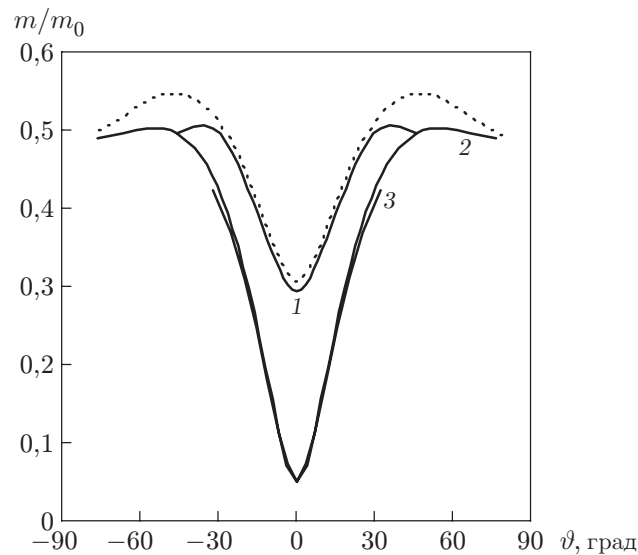


Рис. 4. Зависимость отношения массы прилипшей части кристалла к его первоначальной массе при соударении с цилиндрической частью профиля в отсутствие льда от угла  $\vartheta$ :

пунктирная линия — сферические кристаллы ( $E = 1$ ), сплошные — сфероиды ( $E = 0,1$ ) различной ориентации (1 —  $\theta = 90^\circ$ ,  $\varphi = 0^\circ$ ; 2 —  $\theta = 90^\circ$ ,  $\varphi = 90^\circ$ ; 3 —  $\theta = 0^\circ$ ,  $\varphi = 0^\circ$ )

ствие льда от угловой координаты  $\vartheta$ , отсчитываемой от передней критической точки. Для сравнения приведена зависимость для сферической частицы. Видно, что в случае сплюснутых сфероидов отношение  $m/m_0$  меньше, особенно при определенной их ориентации. Это обусловлено большей силой сопротивления сплюснутого сфероида, что приводит к уменьшению скорости удара в окрестности передней критической точки. Вследствие малой степени разрушения частиц в этой зоне отложение льда происходит на верхней и нижней частях цилиндрической кромки, в случае если ось симметрии кристалла ориентирована вдоль оси  $y$  (см. рис. 3,б). В случае если ось направлена по оси  $z$ , область орошения и скорость обледенения существенно уменьшаются.

Влияние ориентации кристаллов на площадь области орошения показано на рис. 5,а. Кривая 1 соответствует оси симметрии сплюснутого сфероида в плоскости  $(x, z)$ , кри-

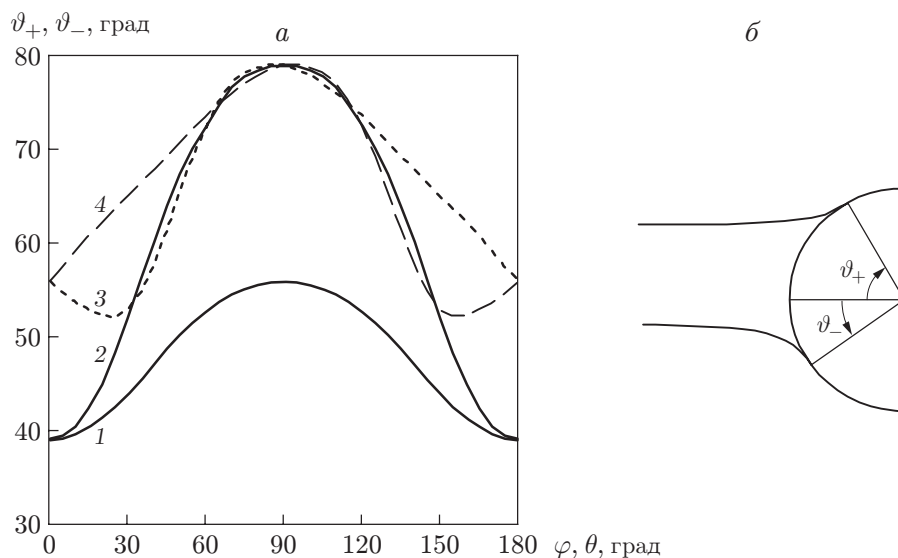


Рис. 5. Зависимости предельных угловых координат  $\vartheta_+$ ,  $\vartheta_-$  области орошения лобовой поверхности профиля кристаллами ( $E = 0,1$ ) от их ориентации (а) и схема области орошения (б):

1 —  $\vartheta_+(\theta)$ ,  $\vartheta_-(\theta)$  при  $\varphi = 0^\circ$ ; 2 —  $\vartheta_+(\theta)$ ,  $\vartheta_-(\theta)$  при  $\varphi = 90^\circ$ ; 3 —  $\vartheta_+(\varphi)$  при  $\theta = 90^\circ$ ; 4 —  $\vartheta_-(\varphi)$  при  $\theta = 90^\circ$

вая 2 — в плоскости  $(y, z)$ . В этих случаях картина орошения симметрична относительно угла  $\theta = 90^\circ$ . Кривые 3, 4 зеркально симметричны; кривая 3 описывает зависимость от угла  $\varphi$  координаты верхней границы области орошения, линия 4 — нижней (рис. 5, б).

На рис. 2, б показана картина обледенения профиля со временем в случае хаотической ориентации сплюснутых сфероидальных кристаллов, полученная в результате осреднения соответствующих картин для 133 фракций (частицы каждой фракции ориентированы одинаково, шаг между углами  $\theta$  или  $\varphi$  для двух соседних фракций составляет  $15^\circ$ ). Из рис. 2, б следует, что скорость обледенения, вызванного действием сплюснутых сфероидов, в несколько раз меньше, чем при воздействии сферических частиц.

Результаты расчетов обледенения (см. рис. 2, в), проведенных для вытянутых сфероидов ( $E = 10$ ), незначительно отличаются от результатов расчетов в случае воздействия сферических частиц.

**Заключение.** Нарастание льда на поверхности профиля при его обтекании потоком сплюснутых сфероидальных кристаллов существенно отличается от случая обтекания потоком кристаллов сферической формы. Границы поверхности орошения обтекаемого тела сплюснутыми сфероидными кристаллами и форма наледи зависят от их преимущественной ориентации в потоке. Учет пластической деформации кристаллов льда под действием тангенциальных напряжений позволяет предсказать появление на теле “двугорбой” наледи, как в случае обледенения переохлажденными каплями с образованием жидкой пленки.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Gent R. W, Dart N. P, Cansdale J. T. Aircraft icing // Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 2000. V. 358. P. 2873–2911.
2. Mason J. G., Strapp J. W., Chow P. The ice particle threat to engines in flight. Reno, 2006. (Paper / AIAA; N 2006-206).



3. **Dezitter F., Grandin A., Brenguier J.-L., et al.** HAIC (high altitude ice crystals). S. 1., 2013. (Paper / AIAA; N 2013-2674).
4. **Hauk T., Bonaccorso E., Roisman I. V., Tropea C.** Ice crystal impact onto a dry solid wall. Particle fragmentation // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 2015. V. 471. 20150399.
5. **Горбушин Н. А., Петров Ю. В.** Динамическая фрагментация твердых частиц при взаимодействии с жесткой преградой // Журн. техн. физики. 2014. Т. 84, вып. 2. С. 39–43.
6. **Roisman I. V., Tropea C.** Impact of a crushing ice particle onto a dry solid wall // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 2015. V. 471. 20150525.
7. **Miller A. B., Potapov Yu. F., Stasenko A. L.** Experimental and theoretical investigations of aircraft icing in the case of crystal and mixed-phase flow // Proc. of the 29th congress of the intern. council of the aeronaut. sci. (ICAS), St-Petersburg (Russia), 7–12 Sept. 2014. S. 1., 2014. Paper 0576.
8. **Кашеваров А. В., Стасенко А. Л.** Гидротермодинамика жидкой пленки с кристаллами на поверхности тела в потоке воздуха, содержащем частицы льда // ПМТФ. 2017. Т. 58, № 2. С. 103–114.
9. **Hölzer A., Sommerfeld M.** New simple correlation formula for the drag coefficient of non-spherical particles // Powder Technol. 2008. V. 184. P. 361–365.
10. **Yin C., Rosendahl L., Kær S. K., Sørensen H.** Modelling the motion of cylindrical particles in a nonuniform flow // Chem. Engng Sci. 2003. V. 58. P. 3489–3498.
11. **Tippman J. D., Kim H., Rhymer J. D.** Experimentally validated strain rate dependent material model for spherical ice impact simulation // Intern. J. Impact Engng. 2013. V. 57. P. 43–54.
12. **Маленков Г. Г.** Лед // Большая советская энциклопедия. М.: Сов. энцикл., 1973. Т. 14. С. 255–257.
13. **Морс Ф. М.** Методы теоретической физики / Ф. М. Морс, Г. Фешбах. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. Т. 2.
14. **Фильчаков П. П.** Приближенные методы конформных отображений. Киев: Наук. думка, 1964.

*Поступила в редакцию 23/III 2017 г.,  
в окончательном варианте — 13/IX 2017 г.*

---