

УДК 533.95

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТОКОВ  
В ПЛАЗМЕННОЙ СТРУЕ ПРИ УЧЕТЕ ЭФФЕКТА ХОЛЛА***В. И. Ермилин, В. К. Колесников**НИИ прикладной механики и электродинамики  
Московского авиационного института,  
125871 Москва*

Численное исследование распределения электрических токов в плазменной среде с учетом эффекта Холла проводилось во многих работах (см., например, [1–3]), посвященных исследованию внутреннего течения в каналах различных МГД-устройств.

Цель настоящей работы — изучение особенностей распределения токов в стационарных недорасширенных плазменных струях, истекающих в нейтральную среду при наличии приложенного магнитного поля, направленного вдоль оси струи. В литературе данному вопросу практически не уделяется внимания, хотя его изучение представляет определенный интерес при разработке и использовании некоторых типов МГД-двигателей и ускорителей. Несмотря на то что рассматриваемая задача из-за отсутствия электродов в расчетной области кажется несколько проще, чем [1–3], тем не менее она имеет свои особенности, связанные с наличием свободной границы, с неограниченностью струи вниз по потоку и др.

**Система уравнений. Метод решения.** Рассматривается стационарная осесимметричная струя полностью ионизованной плазмы, истекающая в непроводящую среду с конечным давлением, которое может быть достаточно низким. Предполагается, что плазма обладает конечной проводимостью, являющейся функцией электронной температуры. Приложенное магнитное поле направлено вдоль оси струи. Для описания струи используется магнитогидродинамическое приближение. Заметим, что в отсутствие магнитного поля приближение сплошной среды для струй, истекающих в сильно разреженное пространство, является некорректным; длина свободного пробега частиц на удалении от источника становится сравнимой с характерными размерами струи. Однако часто оказывается, что магнитное поле сильно связывает заряженные частицы и появляется возможность, используя данное приближение, получать качественно правильные результаты [4, 5].

В основу математической модели положим систему уравнений, предложенную в [6, 7], которая получена из общих гидродинамических уравнений плазмы [8] в предположении бездиссипативности ионного газа, малости энергии, передаваемой от электронов к ионам в связи с большим отношением масс и относительно низкой концентрацией плазмы, и при использовании модельного соотношения для электронов вместо уравнения энергии. Заметим, что адекватное описание распределения  $T_e$  в струе является сложной задачей, решение которой требует существенного увеличения мощности ЭВМ за счет необходимости учитывать наряду с теплопроводностью и кинетико-излучательные процессы, влияние которых может быть значительным [9]. Однако, основываясь на [9, 10], для проведения качественного исследования воспользуемся модельным соотношением (5). Отметим, что применение вместо (5) других модельных или

эмпирических зависимостей не изменяет качественной картины взаимодействия плазменной струи с магнитным полем.

При учете эффекта Холла систему уравнений, описывающую поведение струи, распределение магнитных полей и электрических токов, приняв за основные размерные величины радиус начального сечения струи  $R_a$ , скорость  $V_a$  и плотность  $\rho_a$  плазмы на оси в начальном сечении, можно записать в следующем безразмерном виде:

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0; \quad (1)$$

$$\rho(\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} + \nabla(p_i + p_e) = [\mathbf{j} \mathbf{H}]; \quad (2)$$

$$p_i = \operatorname{const} \rho^{\gamma_i}; \quad (3)$$

$$p_e = \rho T_e; \quad (4)$$

$$T_e = \operatorname{const} \rho^{\gamma_e - 1}; \quad (5)$$

$$\sigma = \operatorname{const} T_e^{3/2}; \quad (6)$$

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + [\mathbf{V} \mathbf{H}]) - \mu([\mathbf{j} \mathbf{H}] - \nabla p_e); \quad (7)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0; \quad (8)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0; \quad (9)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0; \quad (10)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 4 \pi \mathbf{j}. \quad (11)$$

Здесь  $p_i, p_e$  — ионное и электронное давление соответственно;  $\gamma_i$  — показатель адиабаты для ионного газа;  $\gamma_e$  — параметр модельного соотношения для электронов;  $\mu = \tilde{\beta} \sigma / \rho$  — подвижность электронов;  $\mu \mathbf{H}$  — вектор Холла;  $\beta = c_s m_i / (e R_a \sqrt{\rho_a}) = \sqrt{4\pi} \tilde{\beta}$  ( $\tilde{\beta}$  — параметр обмена [11]);  $\mathbf{V} = (V_r, V_\varphi, V_z)$  — вектор скорости плазмы;  $\mathbf{H} = \mathbf{H}^0 + \mathbf{H}^i$  — сумма приложенного и индуцированного магнитных полей;  $\mathbf{H}^0 = (0, 0, H_z^0)$ ; остальные обозначения общепринятые. Задача рассматривается в цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$ .

Система (1)–(11) содержит уравнения разных типов. Электромагнитные уравнения (8)–(11) имеют эллиптический тип, а тип уравнений динамики плазмы (1), (2) зависит от режима течения; в случае сверхзвукового течения они имеют гиперболический тип. Поэтому целесообразно разбить исходную задачу на подзадачи (гидродинамическую и электромагнитную) с их последующей совместной итерацией до установления согласованного решения.

Рассмотрим гидродинамическую группу уравнений (1), (2) с учетом зависимостей (3)–(5). Данные уравнения отличаются от аналогичных в [6, 7] появлением азимутальной проекции уравнения движения, отражающей закрутку струи вокруг оси симметрии пондеромоторной силой и наличием силы Кориолиса.

Заметим, что в обычной газовой динамике система уравнений, подобная (1)–(5), применяется для описания течений без ударных волн. Однако, учитывая вязкостный характер влияния приложенного магнитного поля [6], относительно большую степень нерасчетности, большую скорость истечения и малые углы наклона струи, можно получить качественно правильные результаты для струй с ударными волнами слабой интенсивности.

Решение гидродинамической группы уравнений осуществляется конечно-разностным маршевым методом второго порядка точности в соответствии с [6, 7]. Граничные условия по сравнению с [6, 7] дополняются. На

оси струи полагаем  $V_\varphi = 0$ . Для определения составляющих скорости на свободной границе струи добавляется азимутальная проекция уравнения движения. Уравнение Бернулли вдоль граничной линии тока, записанное в дифференциальной форме, имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial l} [(V_r^2 + V_z^2 + V_\varphi^2)/2] - \sin \theta (j_\varphi H_z - j_z H_\varphi)/\rho - \cos \theta (j_r H_\varphi - j_\varphi H_r)/\rho = 0,$$

где  $\partial/\partial l$  — производная вдоль граничной линии тока;  $\theta$  — угол между касательной к граничной линии тока и осью  $Oz$  в данной точке.

Рассмотрим электромагнитную группу уравнений (8)–(11) с учетом обобщенного закона Ома (7). Уравнения (7)–(9) определяют вектор плотности электрических токов, протекающих в струе при известных значениях магнитного поля и гидродинамических параметров плазмы. Уравнения (10), (11) определяют магнитное поле по известным значениям электрических токов, протекающих в струе. Для данной группы уравнений также можно выделить две подзадачи: расчет токов и вычисление индуцированного магнитного поля.

Рассмотрим задачу расчета токов. В силу осевой симметрии решение уравнений (7)–(9) можно свести к решению одного эллиптического уравнения со смешанными производными для определения  $j_r$ ,  $j_z$  и вычислению  $j_\varphi$  из проекции (7) на ось  $\varphi$  цилиндрической системы координат. Последнее соотношение имеет вид

$$j_\varphi = \sigma (V_z H_r - V_r H_z) - \mu (j_z H_r - j_r H_z).$$

Для определения  $j_r$ ,  $j_z$  воспользуемся соленоидальностью векторного поля  $\mathbf{j}$ . Введем функцию тока  $\psi$ , удовлетворяющую соотношениям

$$j_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}; \quad (12)$$

$$j_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (13)$$

Сравнивая (12), (13) с (11), заметим, что  $\psi = r H_\varphi^i / (4\pi)$ .

Используя соотношения (3), (5), запишем (7) как

$$\mathbf{E}' = [\mathbf{V} \mathbf{H}] - \mathbf{j} / \sigma - \beta / \rho [\mathbf{j} \mathbf{H}],$$

где

$$\mathbf{E}' = \nabla (\varphi_e + \beta c_e \gamma_e / (\gamma_e - 1) \rho^{\gamma_e - 1});$$

$\varphi_e$  — электростатический потенциал;  $c_e$  — постоянная в соотношении (5).

Применяя операцию  $\text{rot}$  к полученному выражению, учитывая, что  $\text{rot} \mathbf{E}' = 0$  и  $E'_\varphi = 0$ , можно получить следующее уравнение для определения функции тока:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left( K^{11} \frac{\partial \psi}{\partial z} + K^{12} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\mu H_\varphi^i}{r\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial r} \left( K^{22} \frac{\partial \psi}{\partial r} + K^{21} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\mu H_\varphi^i}{r\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = Q_1 + Q_2. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь

$$K^{11} = (1 + (\mu H_z)^2) / (r\sigma);$$

$$K^{12} = K^{21} = \mu^2 H_r H_z / (r\sigma);$$

$$K^{22} = (1 + (\mu H_r)^2)/(r\sigma);$$

$$Q_1 = \frac{\partial}{\partial z} (\bar{v}_z \bar{n}_\varphi - V_\varphi H_z) + \mu H_z (V_z H_r - V_r H_z);$$

$$Q_2 = \frac{\partial}{\partial r} (\bar{v}_r \bar{n}_\varphi - V_\varphi H_r) + \mu H_r (V_z H_r - V_r H_z).$$

Рассмотрим граничные условия для уравнения (14). Поскольку плазменная струя истекает в непроводящую среду, на свободной границе струи нормальная составляющая вектора плотности электрического тока равна нулю. Следовательно, функция  $\psi$  будет здесь постоянна. Вниз по потоку струя, вообще говоря, не ограничена. Для определенности ограничим струю в этом направлении некоторым значением  $z_k$ . При  $z > z_k$  полагаем  $\sigma = 0$ . Следовательно, и здесь  $\psi$  постоянна. В случае непротекания токов через начальное сечение струи (нет их выноса из источника плазмы)  $\psi$  также постоянна и равна нулю. Значит, и на остальных участках границы функция  $\psi$  тоже будет равна нулю. На оси струи  $\psi = 0$  из соображений симметрии.

Таким образом, для нелинейного эллиптического уравнения (14) со смешанными производными и несамосопряженным оператором имеем первую краевую задачу. Однако заметим, что члены, доставляющие несамосопряженность, имеют коэффициент порядка  $\mu H$ , а коэффициенты при других членах имеют порядок  $(\mu H)^2$  и 1. В случае, когда не отмечается существенного преобладания азимутальной компоненты вектора Холла, члены с коэффициентом  $\mu H$  не будут оказывать первостепенного влияния на решение ни при  $\mu H \geq 1$ , ни при  $\mu H \leq 1$ , и, следовательно, их можно перенести в правую часть, положив известными с предыдущей глобальной итерации.

Для численного решения удобно отобразить физическую область в координатах  $(r, z)$  на расчетный прямоугольник или квадрат  $(\xi, \eta)$ . В расчетной области введем две сетки: основную

$$S^1 = \{ \eta_{i_1} = i_1 h_\eta, \xi_{i_2} = i_2 h_\xi, 0 \leq i_1 \leq N, 0 \leq i_2 \leq M \}$$

и вспомогательную

$$S^2 = \left\{ \begin{array}{l} \eta_{i_1-1/2} = (i_1 - 1/2)h_\eta, \xi_{i_2-1/2} = (i_2 - 1/2)h_\xi, \\ 1 \leq i_2 \leq M, 1 \leq i_1 \leq N \end{array} \right\},$$

сдвинутую относительно  $S^1$  на половину шага. Аппроксимируя на основе принципов [3, 12] преобразованное (с учетом отображения) уравнение (14), получим систему линейных уравнений, для эффективного решения которой можно успешно применить метод сопряженных невязок, его локально-оптимальную модификацию, представленную в [13].

Составляющие  $H_r^i, H_z^i$  магнитного поля, индуцированного азимутальным током, удобно рассчитать согласно [7] на основе теории потенциала.

Для решения подзадач использовались различные сетки. При расчете гидродинамических параметров плазмы применялась сетка, имеющая 101 точку в радиальном направлении. Вычисление составляющих плотности электрических токов и индуцированного магнитного поля проводилось на сетке, содержащей 21 точку в радиальном и 101 точку в продольном направлениях. Переход с одной сетки на другую осуществлялся с помощью интерполяции.

**Результаты численных исследований.** Рассмотрим некоторые характерные результаты, полученные при моделировании струи аргоновой плазмы в условиях, когда индуцированным магнитным полем можно пренебречь. Пусть радиус начального сечения струи  $R_a = 10$  см. Концентрация, скорость, температура ионов и электронов, заданные в начальном сечении на оси струи, имеют следующие значения:  $n_a = 10^{14}$  см $^{-3}$ ,  $V_a = 6 \cdot 10^5$  см/с,  $T_i = T_e = 0,5$  эВ. Параметры  $\gamma_i = 1,67$ ,  $\gamma_e = 1$ . Предварительно заметим, что варьирование параметрами  $\gamma_i$  и  $\gamma_e$  ( $1 < \gamma_e \leq \gamma_i$ ) не выявило принципиальных отличий в картине распределения электрических токов в струе.

При данных условиях степень ионизации плазмы невелика ( $\approx 1,5 \cdot 10^{-3}$ ). Тем не менее вследствие эффекта Рамзауэра для аргоновой плазмы при рассматриваемых параметрах отмечается заметное преобладание частоты столкновений заряженных частиц между собой над частотой их столкновений с атомами. Используя [14] для оценки сечения столкновений электрон-атом ( $Q_{ea} \approx 0,7 \cdot 10^{-16}$  см $^2$ ), получим, что  $\nu_{ei}/\nu_{ea} \approx 6,4$ . Следовательно, характер переноса электрического заряда в этом случае аналогичен переносу в полностью ионизованной плазме [9].

Профили параметров в начальном сечении струи определялись по модельным соотношениям

$$F = \exp(Cr^{l_1}), \quad r \in [0, 1], \quad l_1 = 1, 2, 3, \dots,$$

$$V_r = \text{const } V_z \sin\left(\frac{r\pi}{2}\right)^{l_2}, \quad l_2 = 1, 2, 3, \dots,$$

где  $F = [\rho V_z]^T$ ;  $C = [c_1, c_2]^T$ ;  $c_1, c_2$  — постоянные ( $c_1 < 0, c_2 > 0$ ).

Рассмотрим струю с отношением плотности на оси начального сечения к плотности окружающей среды, равным 10. Варьируя величину модуля вектора напряженности предложенного магнитного поля в пределах 25–125 Э (начальные значения гидродинамических параметров струи не изменялись), можно получить при сверхзвуковом режиме течения струи различной формы [6], в том числе и бочкообразные. На основании апостериорных оценок отметим, что в данном случае  $Re_m < 1$  и влияние эффекта Холла на гидродинамические параметры плазмы незначительно. Заметим лишь, что струя стала вращаться, но азимутальная скорость много меньше скорости поступательного движения.

Рассмотрим распределение электрических токов (компонент  $j_r, j_z$  вектора плотности тока), возникающих в струях различной геометрии при учете эффекта Холла. На рис. 1–3 представлены линии тока при  $H_z^0 = 125, 75$  и 25 Э соответственно. Линии тока для каждого семейства петель построены в равных долях от величины полного тока, протекающего в данной области.

Величины полного тока для каждой области, ограниченной нулевыми линиями, различны. Граница струи также является линией тока. Стрелками показано направление тока. Значение составляющих вектора Холла в разреженной части струи не превышало 4.

Из рис. 1 видно, что в данном случае в поле струи электрический ток протекает по одному семейству замкнутых линий (петель) в одном направлении. Между соседними линиями тока здесь протекает 1/5 полного

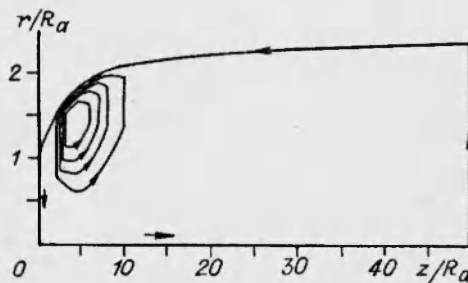


Рис. 1

тока. Наибольшие токи ( $j_r, j_z$ ) протекают вблизи границы струи (сильное сгущение линий тока) в области, расположенной на некотором удалении от начального сечения струи. Здесь увеличивается разреженная часть струи, но градиенты гидродинамических параметров еще достаточно велики. Также велики и азимутальные токи. В ядре струи и вниз по потоку электрические токи малы вследствие большей равномерности в распределении параметров течения.

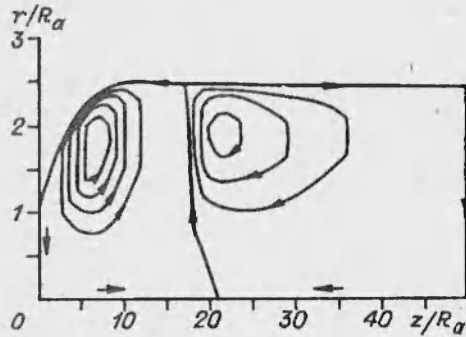


Рис. 2

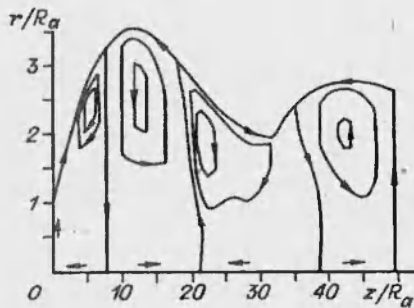


Рис. 3

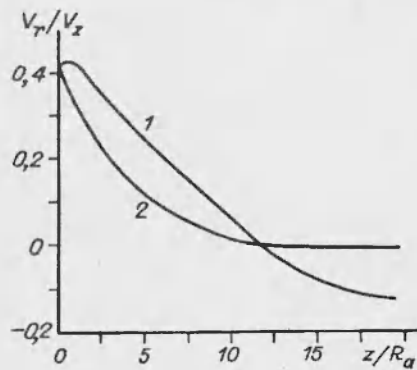


Рис. 4

Когда струя имеет бочкообразную структуру (чередование зон разрежения и сжатия), картина распределения  $j_r, j_z$  качественно изменяется (см. рис. 2, 3). Появляются области, в которых электрический ток протекает по различным семействам токовых петель в разных направлениях. Семейства токовых петель разделяются линией, на которой  $H_z^i = 0$ , а по обе стороны от нее имеют разные знаки, причем местоположение нулевых поверхностей не совпадает с границами «бочек», а сдвинуто относительно последних. Можно сказать по аналогии с [14], что в поле струи возникают так называемые нейтральные (нулевые) поверхности.

Из анализа рис. 1–3 видно, что появление и расположение нулевых линий связано с появлением и расположением точек перегиба на кривых, определяющих границу струи, т. е. можно сделать вывод о том, что возникновение нулевых линий определяется наличием изменения знака ускорения потока в радиальном направлении. Данный вывод хорошо иллюстрируется появлением нулевой линии вблизи начального сечения струи на рис. 3. Появление здесь нулевой линии связано с искусственным возмущением вектора скорости в начальном сечении, обеспечивающим ускорение потока в радиальном направлении (рис. 4, где представлен тангенс угла наклона

вектора скорости вдоль границы струи для случаев  $H_z^0 = 25$  и  $75$  Э — линии 1 и 2).

Отметим также, что больший ток при наличии бочкообразной структуры протекает в первой «бочке».

При расчетах с большим отношением плотностей на оси начального сечения струи и окружающей среды ( $\rho_a/\rho_\infty \geq 100$ ) и с меньшей величиной модуля вектора напряженности приложенного магнитного поля ( $H_z^0 \leq 10$  Э) для сохранения примерно того же параметра МГД-

взаимодействия на границе струи картина распределения токов качественно соответствует случаю, показанному на рис. 1. Однако из-за более высокой степени разреженности плазмы аналогичные линии тока проходят ближе к оси симметрии и более вытянуты вдоль оси  $z$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Lie V. L., Lineberry J. T., Schmidt H. J. Three-dimensional fluid and electrodynamic modeling for MHD DCW Channels. N. Y., 1983. (Paper/AIAA; N 83-0464).
2. Танака М., Кимура И. Распределение тока и ускорение плазмы в дуговом МПД-двигателе с внешним магнитным полем // Аэрокосмич. техника. 1989. № 6. С. 153-162.
3. Быков А. А., Попов В. Ю., Свешников А. Г., Якунин С. А. Математическое моделирование тока в среде с сильным эффектом Холла // Мат. моделирование. 1989. Т. 1, № 4. С. 45-49.
4. Каулинг Т. Магнитная гидродинамика. М.: Атомиздат, 1978.
5. Гуськов К. Г., Райзер Ю. П., Суржигов С. Т. Сравнение МГД и гибридного описания динамики разреженной плазмы. М., 1990. (Препр./Ин-т проблем механики АН СССР; № 470).
6. Ермилин В. И., Колесников В. К., Петров В. Г. Влияние магнитного поля на струю плазмы // Мат. моделирование. 1992. Т. 4, № 5. С. 24-29.
7. Ермилин В. И., Колесников В. К., Петров В. Г. Численное исследование плазменной струи в магнитном поле // ПМТФ. 1993. Т. 34, № 4. С. 9-14.
8. Брагинский С. И. Явления переноса в плазме // Вопросы теории плазмы / Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1963. Вып. 1. С. 183-272.
9. Лукьянов Г. А. Сверхзвуковые струи плазмы. Л.: Машиностроение, 1985.
10. Sack Ch., Schamel H. Plasma expansion into vacuum-hydrodynamic approach // Phys. Reports. 1987. V. 156, N 6. С. 311-395.
11. Морозов А. И., Соловьев Л. С. Стационарные течения плазмы в магнитном поле // Вопросы теории плазмы / Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1974. Вып. 8. С. 3-87.
12. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971.
13. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
14. Смирнов Б. М. Атомные столкновения и элементарные процессы в плазме. М.: Атомиздат, 1968.
15. Березин Ю. А., Дудникова Г. И. Численные модели плазмы и процессы пересоединения. М.: Наука, 1985.

Поступила в редакцию 21/XII 1993 г.,  
в окончательном варианте — 6/V 1994 г.