

**ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА  
КРИТИЧЕСКИХ УСЛОВИЙ ЗАЖИГАНИЯ**

*A. Э. Аверсон, B. И. Розенбанд*  
(*Москва*)

В настоящей работе с позиций тепловой теории, базирующейся на ведущей роли реакций, протекающих в конденсированной фазе, проводится анализ критических явлений, имеющих место при зажигании, и обсуждаются приближенные методы, позволяющие рассчитывать условия, при которых эти явления возникают. Результаты, имеющиеся по этому вопросу в литературе [1—6], в настоящей работе обобщаются.

Критические явления при зажигании возникают тогда, когда тепло, подводимое от внешнего источника, успевает отводиться из зоны реакции, прежде чем разовьется самоускоряющаяся химическая реакция. В этом случае наибольшая температура в веществе начинает со временем падать и зажигания не происходит. Физические критические явления при зажигании могут возникать в следующих случаях<sup>1</sup>.

1. При импульсном подводе тепла от внешнего источника, т. е. когда источник тепла действует на поверхность вещества только в течение некоторого ограниченного промежутка времени  $t_0$ . В этом случае при  $t_0 > t_{0*}$  зажигания не происходит.

2. При непрерывном подводе тепла от источника, запас тепла в котором ограничен. Классическим примером такой задачи может служить задача о зажигании накаленным телом конечной толщины  $L$ , нагретым до определенной температуры  $T_0$ . Запас тепла в этом теле (при постоянстве теплофизических характеристик) пропорционален величине  $L \cdot T_0$ , т. е.  $Q \sim L \cdot T_0$ . Очевидно, что при  $Q < Q_*$  зажигания не произойдет.

Математическая задача расчета критических условий в этих случаях сводится к нахождению решения уравнения

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T + Q k_0 \exp\left(-\frac{E}{RT}\right) \quad (1)$$

с соответствующими начальными

$$t = 0, \quad T = T_n$$

<sup>1</sup> В настоящей работе не обсуждаются критические условия воспламенения образца конечных размеров, нагреваемого с торца, при одновременном охлаждении боковой поверхности, рассмотренные в работе [7], а также критические явления, связанные с выгоранием вещества. Мы рассматриваем нормальные режимы зажигания, а в этом случае выгорание не оказывает существенного влияния на закономерности развития процесса [4].

и граничными условиями

$$\begin{aligned} x \rightarrow \infty, \quad & \lambda \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \\ x = 0, \quad & F\left(T, \frac{\partial T}{\partial x}, t\right) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Конкретный вид функции  $F$  зависит от условий теплообмена с внешним источником энергии.

Вообще говоря, четко выраженных критических условий, разделяющих два существенно различных режима протекания реакции (взрывной и невзрывной), в тепловой теории зажигания не существует, поскольку математическая модель процесса допускает возможность воспламенения даже при отсутствии внешних источников тепла (адиабатическое самовоспламенение при  $T = T_n$ ). Поэтому под критическими в тепловой теории зажигания понимаются условия, при которых время задержки зажигания резко возрастает, стремясь к адиабатическому времени самовоспламенения [8].

Поскольку аналитическое решение уравнения (1) неизвестно, то для расчета критических условий обычно применяют приближенные методы, описанию которых и посвящена настоящая статья.

**Критические условия в импульсном режиме.** В импульсном режиме критическая продолжительность действия внешнего источника существенным образом зависит от условий, возникающих на поверхности после удаления источника. Одним из наиболее распространенных условий, которые рассматриваются в тепловой теории зажигания [1, 3, 5], является условие прекращения теплообмена с внешней средой, т. е. после удаления внешнего источника энергии на поверхности вещества задается

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = 0 \text{ при } t > t_0. \quad (3)$$

Для расчета критического периода воздействия источника в этом случае можно применить условия Зельдовича [1], которое имеет вид

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi}(\tau_*) = -V^2. \quad (4)$$

Здесь

$$\theta = \frac{E}{RT_m^2} (T - T_m); \quad \tau = t \cdot \frac{Q}{c_p} \cdot \frac{E}{RT_m^2} \cdot k_0 \exp\left(-\frac{E}{RT_m}\right);$$

$$\xi = x \cdot \left[ \frac{Q}{\lambda} \cdot \frac{E}{RT_m^2} k_0 \exp\left(-\frac{E}{RT_m}\right) \right]^{1/2}$$

( $T_m$  — некоторая масштабная температура).

Действительно, рассматривая стационарную задачу о зажигании при постоянной температуре поверхности, Я. Б. Зельдович [1] показал, что предельное возможное стационарное состояние в такой системе описывается кривой, имеющей нуль производной на поверхности  $\left[\frac{\partial T}{\partial x}(0) = 0\right]$ , а вдали от поверхности градиент температуры равен

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi}(\xi_0) = -V^2, \quad (5)$$

т. е. существует критическое значение скорости теплоотвода из зоны реакции, при превышении которого воспламенения не происходит.

Применим этот результат для расчета критических условий зажигания в случае изменяющейся во времени температуры поверхности. Рассмотрим нестационарные профили температуры в веществе при некоторых заданных условиях теплообмена (рис. 1). С течением времени градиент температуры на границе зоны химической реакции уменьшается (ширина зоны химической реакции

приближенно равна [9]:  $x_0 \approx \left[ \frac{\lambda}{Q} \cdot \frac{RT_s^2}{E} \times \right. \times \left. \frac{1}{k_0} \exp\left(-\frac{E}{RT_s}\right) \right]^{1/2}$ ; ( $T_s$  — текущая температура поверхности). Если оборвать внешний нагрев в момент  $t_0 = t_1$ , когда градиент на границе зоны больше критического, определяемого из (5), то очевидно, что зажигания не произойдет. При  $t_0 = t_3$  теплоотвод из зоны реакции слишком мал, чтобы препятствовать развитию химической реакции. Таким образом, за критическое время действия импульса  $t_{0*}$  можно принять приближенно то время  $t_0$ , в течение которого при заданных условиях теплообмена на границе зоны химической реакции установится критический градиент (5). Используя в первом приближении решение задачи о нагреве химически инертного тела и предполагая, что зона химической реакции достаточно узка, т. е.  $\frac{\partial v}{\partial \xi}(\xi_0, \tau) \approx \frac{\partial \theta}{\partial \xi}(0, \tau)$ , из (5) можно рассчитать критическое время действия источника тепла в импульсном режиме.

Проведенный таким образом расчет критических условий зажигания для случая граничных условий 1-го и 2-го рода дает хорошее совпадение с численным счетом на ЭВМ, проведенным в работах [3, 5]. Так, например, в случае граничных условий 1-го рода (постоянная температура поверхности) применение формулы (5) дает  $\tau_{0*} = \frac{\theta_h^2}{2\pi} \approx 0,159\theta_h^2$ , а обработка результатов численного счета [3] —  $\tau_{0*} \approx 0,214\theta_h^2$ . В случае постоянного теплового потока на поверхности и численный счет [5], и приближенная формула (5) дают совпадающие значения  $\tau_{0*} \approx \frac{\pi}{8} \theta_h^2$ .

Если после удаления источника тепла температура поверхности скачком уменьшается до начальной, т. е.  $T_s(t > t_0) = T_n$ , то, как показывает расчет, проведенный для случая граничных условий 1-го рода [4],  $t_{0*} \approx t_{заж}$ :

$\theta_h$	5	10	15	20
$\tau_{0*}$	13,9	38,5	74,5	127
$\tau_{заж}$	15,1	39,1	75,4	128

**Критические условия зажигания при непрерывном подводе тепла от источника.** Как отмечалось выше, критические явления могут возникать и в том случае, если температура поверхности вещества быстро поднимается до некоторой величины, а потом со временем падает. Такие режимы наблюдаются при зажигании накаленными телами различной геометрической формы, а также в динамических условиях теплообмена.

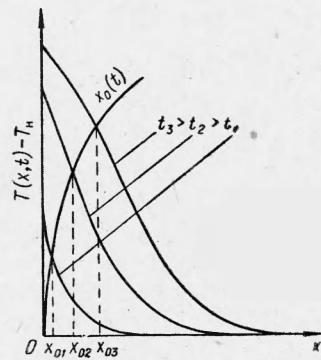


Рис. 1.

Для расчета критических условий в этих случаях может быть применен метод, основанный на сопоставлении скоростей теплоприхода от внешнего источника и тепловыделения за счет химической реакции. Рассмотрим для примера случай зажигания пластины конечной толщины (рис. 2). Если толщина пластины достаточно велика ( $L=L_1$ ), то температура поверхности и тепловой поток на поверхности уменьшаются медленно и за это время в веществе успевает образоваться прогретый слой, достаточный для возбуждения саморазвивающейся химической реакции; тепловыделение за счет реакции быстро возрастает, превышает теплоприход от внешнего источника и приводит к зажиганию. Зажиганию приближенно соответствует условие пересечения (равенства) кривых тепловыделения теплоприхода [10]. При очень малых толщинах пластины (мал запас тепла в нагретом теле) температура поверхности быстро падает и прогретый слой достаточной толщины образоваться не успевает. Тепловыделение проходит через максимум<sup>1</sup> и не превышает теплоприхода от внешнего источника. В этом случае зажигания не происходит ( $L=L_3$ ).

При таком подходе критическому условию зажигания будет соответствовать условие касания кривых теплоприхода и тепловыделения ( $L_* \approx L_2$ ). Математически это запишется следующим образом [10]:

$$q(t_*) = Q k_0 \int_0^{\infty} \left\{ \exp \left[ -\frac{E}{R T(x, t_*)} \right] - \exp \left( -\frac{E}{R T_h} \right) \right\} dx, \quad (6)$$

$$\frac{d}{dt} [q(t_*)] = Q k_0 \frac{d}{dt} \int_0^{\infty} \exp \left[ -\frac{E}{R T(x, t_*)} \right] dx. \quad (7)$$

Применяя для вычисления интегралов (6) и (7) метод Лапласа [11], получаем:

$$q^2(t_*) = \lambda Q k_0 \frac{R T_*^2}{E} \exp \left( -\frac{E}{R T_*} \right), \quad (8)$$

$$T_* = T(0, t_*), \quad (9)$$

$$\frac{d}{dt} [q(t_*)] = \frac{1}{q(t_*)} \cdot \frac{\partial T}{\partial t}(0, t_*) \cdot \lambda Q k_0 \exp \left( -\frac{E}{R T_*} \right), \quad (10)$$

где

$$q(t_*) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}(0, t_*).$$

Для приближенного расчета в (8)–(10) используются решения задачи о нагреве химически инертного тела.

<sup>1</sup> Максимум обусловлен наличием двух противоположных эффектов, влияющих на тепловыделение: прогретый слой со временем увеличивается, а температура в нем падает.

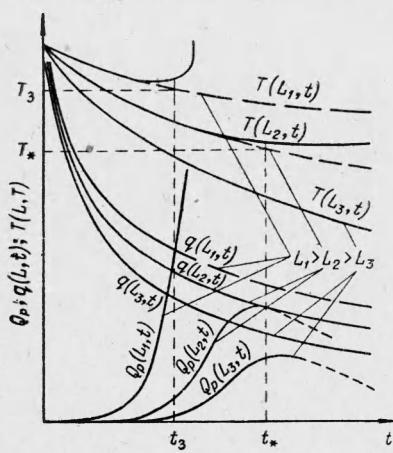


Рис. 2.

Такой метод расчета критических условий зажигания был применен к решению ряда конкретных задач; полученные результаты обсуждаются ниже.

1. Зажигание пластины конечной толщины  $L$ . Подставив известное решение о нагреве химически инертной среды пластины конечной толщины [12] в соотношения (8)–(10) и исключив из них  $t_*$  и  $T_*$ , можно найти

критическую связь между исходными параметрами нагретой пластины и воспламеняемого вещества. Из-за очевидности способа получения основных соотношений и их громоздкости в данной работе они не приводятся. Результаты расчета критических параметров представлены в табл. 1, где

они сравниваются с результатами численного расчета на ЭВМ, сделанного в работе [6]. С целью удобства сравнения результаты в табл. 1 представлены в безразмерных переменных, использованных в [6] ( $\sigma_{0*} = L_* \frac{\lambda}{\lambda_1} \left[ \frac{Q}{\lambda} \frac{E}{RT_m^2} k_0 \exp \left( - \frac{E}{RT_m} \right) \right]^{1/2}$ , а величина  $T_m$  определяется из

условия  $T_m = T_h + (T_0 - T_h) \frac{k_e}{1 + k_e}$ ,  $k_e = \frac{\lambda_1 c_1 \rho_1}{\lambda c \rho}$  — отношение тепловых активностей нагретого тела и зажигаемого вещества,  $T_0$  — температура нагретого тела).

Как видно из табл. 1, приближенный метод дает хорошее совпадение с результатами численного счета.

2. Критические условия в динамических режимах зажигания. Большой интерес представляет возможность предсказания критических явлений при изменяющихся во времени условиях теплообмена. Анализ показывает, что для этих целей может быть применен описанный выше метод. Проиллюстрируем это примером.

В соответствии с экспериментальными данными, опубликованными в [13], теплоотдачу от продуктов сгорания воспламенителя к поверхности топлива в условиях зажигания в ракетном двигателе можно приблизенно описать формулой

$$q(t) = A t^n \exp(-k t), \quad (11)$$

где  $A$ ,  $n$  и  $k$  — произвольные постоянные.

Определив решение задачи о нагреве химически инертного тела с граничным условием (11) и используя соотношения (8)–(10), получаем следующую систему для расчета критических условий:

$$A t_*^n \exp(-k t_*) = \left[ \lambda Q k_0 \frac{RT_*^2}{E} \exp \left( - \frac{E}{RT_*} \right) \right]^{1/2}, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} T_* &= T_h + \left( \frac{t_*}{\lambda c \rho} \right)^{1/2} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+3/2)} A t_*^n \exp(-k t_*) \times \\ &\quad \times {}_1F_1 \left( \frac{1}{2}, n + \frac{3}{2}, k t_* \right), \end{aligned} \quad (13)$$

$$n - k t_* = \frac{E}{R T_*^2} \cdot \left( \frac{t_*}{\lambda c \rho} \right)^{1/2} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1/2)} A t_*^n \exp(-k t_*) \times \\ \times {}_1F_1 \left( -\frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}, k t_* \right), \quad (14)$$

где  ${}_1F_1(\alpha, \beta, z) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+i)}{\Gamma(\beta+i)} \cdot \frac{z^i}{i!}$  — вырожденная гипергеометрическая функция, а  $\Gamma(z)$  — гамма-функция.

Решая совместно систему (12)–(14), можно рассчитать значения параметров  $n$ ,  $A$  и  $k$ , при которых имеют место критические явления. Такой расчет был нами проведен для случая зажигания пироксилина, кинетические и теплофизические константы которого известны [15]:  $\frac{E}{R} = 2,425 \cdot 10^4$  °К;  $\lambda = 3 \cdot 10^{-4}$  кал/см·сек·град;  $c\rho = 0,465$  кал/см<sup>3</sup>·град;  $Qk_0 = 6,35 \cdot 10^{21}$  кал/см<sup>3</sup>·сек;  $T_n = 25^\circ\text{C}$ . Результаты расчета критическо-

Таблица 2

Зависимость  $k_*$  ( $A, n$ )

$A$	$n$	Формулы (12)–(14)			Численный расчет		
		$k_*$	$t_*$	$T_*$	$k_*$	$t_*$	$T_*$
10	0	3,1	0,2	585	4,3	0,45	560
10	1	1,35	1,6	545	1,47	2,2	530
10	2	1,37	1,6	570	1,59	2,5	550
2	2	0,75	3,2	558	0,85	5,4	525

го значения  $k_*$  при заданных значениях  $A$  и  $n$  приведены в табл. 2 и сравниваются с результатами численного расчета на ЭВМ.

Как видно из табл. 2, соответствие полученных результатов вполне удовлетворительное.

Анализ показывает, что в тех случаях, когда после прохождения максимума температура поверхности вещества падает достаточно быстро, можно вместо условия равенства касательных (10) использовать условие максимума функции  $T_s(t)$ , т. е. вместо (10) принять

$$\frac{\partial T_s}{\partial t}(0, t_*) = 0. \quad (10')$$

Физически это связано с резким изменением скорости тепловыделения при небольшом изменении температуры. Если после максимума температура падает достаточно быстро, то очевидно, что условие (10) будет выполнено очень близко к точке максимума. Поэтому в приближенных расчетах можно использовать условие (10') вместо (10). Например, в случае изменения теплового потока по закону (11) применение условия (10') вместо (10) дает хорошо совпадающие значения критических величин: при  $A=10$ ,  $n=2$  значение  $k_*=1,48$ , в то время как расчет по формулам (12)–(14) дает  $k_*=1,37$ .

В заключение отметим, что метод расчета критических условий зажигания, основанный на сопоставлении скоростей теплоприхода от внешнего источника и тепловыделения за счет химической реакции, может быть применен для решения широкого круга задач тепловой теории зажигания.

Поступила в редакцию  
15/V 1968

## ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Б. Зельдович. ЖЭТФ, 1939, **9**, 12.
2. Р. Н. Thomas, R. C. Bowes. Trans. Far. Soc., 1961, **57**, 11.
3. В. Н. Вилюнов, О. Б. Сидонский. Докл. АН СССР, 1963, **152**, 1.
4. А. Э. Аверсон, В. В. Барзыкин, А. Г. Мержанов. Инж.-физ. ж., 1965, **9**, 2.
5. В. Н. Вилюнов, О. Б. Сидонский. ФГВ, 1966, 4.
6. В. Н. Вилюнов, А. К. Колчин. ФГВ, 1966, 3.
7. В. В. Барзыкин, С. И. Худяев. Докл. АН СССР, 1966, **169**, 6.
8. О. М. Тодес. ЖФХ, 1933, **4**, II.
9. А. Э. Аверсон, В. В. Барзыкин, А. Г. Мержанов. ФГВ, 1968, **4**, 1.
10. А. Э. Аверсон, В. В. Барзыкин, А. Г. Мержанов. Докл. АН СССР, 1968, **178**, 1.
11. А. Эрдейи. Асимптотические разложения. М., «Наука», 1962.
12. А. В. Лыков. Теория теплопроводности. М., ГИТЛ, 1952.
13. D. S. Alip, E. K. Bassett, K. A. Smith. J. of Spacecraft and Rock., 1967, **4**, 1.