

О СТАЦИОНАРНОМ РАСПРОСТРАНЕНИИ СИСТЕМЫ ТРЕЩИН
В УПРУГО-ХРУПКОМ МАТЕРИАЛЕ

В. М. Кузнецов

(Новосибирск)

Вопросы динамики трещин при хрупком разрушении привлекают в последнее время значительное внимание [1]. В работе [2] рассматривается стационарное распространение одной полубесконечной трещины, на поверхности которой приложены симметрично распределенные нормальные и касательные напряжения. Ниже исследуется обобщение работы [2] на случай бесконечно большого количества трещин. Для простоты предполагается, что касательные напряжения на поверхности трещины отсутствуют.

1. Математическая постановка задачи. Рассмотрим бесконечное упругое тело в плоском напряженном состоянии в плоскости xy . Предположим, что в теле имеется бесконечно большое количество трещин, параллельных оси абсцисс, расположенных на расстоянии $2h$ одна от другой в области $x \leq Vt$, где V — константа, t — время. Предположим далее, что на обеих сторонах поверхности трещины нормальные и касательные напряжения равны и имеют вид

$$\sigma_{yy} = -f(x - Vt), \quad \sigma_{xy} = 0 \quad (1.1)$$

Поведение компонент тензора напряжений на бесконечности определим следующим образом

$$R\sigma_{xx}, R\sigma_{xy}, R\sigma_{yy} \rightarrow 0 \quad \text{при } R \rightarrow \infty \quad (1.2)$$

Обозначим через u_x и u_y компоненты вектора перемещения и введем скалярный и векторный потенциалы φ и ψ

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.3)$$

Как известно, φ и ψ удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c_1^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right), \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c_2^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \quad (1.4)$$

$$\left(c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho} \right)$$

Здесь ρ — плотность среды, λ и μ — константы Ляме.

Из физических соображений ясно, что при бесконечно большом количестве трещин имеет место симметрия как относительно любой прямой, проходящей через трещину и являющуюся ее продолжением, так и относительно любой прямой, проходящей параллельно трещинам на половине расстояния между ними. Вследствие этого можно ограничиться рассмотрением области (фиг. 1), представляющей собой полосу $0 \leq y \leq h$.

На границах полосы должны быть выполнены условия

$$\sigma_{xy} = 0, \quad \frac{\partial u_y}{\partial t} = 0 \quad \text{при } y = h, y = 0, x > Vt \quad (1.5)$$

вследствие симметрии, и

$$\sigma_{yy} = -f(x - Vt), \quad \sigma_{xy} = 0 \quad \text{при } y = 0, x < Vt \quad (1.6)$$

вследствие (1.1).

Следуя [2], ищем решение уравнений (1.4), в виде

$$\varphi = \varphi(x - Vt, y), \quad \psi = \psi(x - Vt, y) \quad (1.7)$$

Введем обозначения

$$x - Yt = X, \quad \beta_1 y = Y_1, \quad \beta_2 y = Y_2 \quad (1.8)$$

$$\beta_1 = \left(1 - \frac{V^2}{c_1^2}\right)^{1/2}, \quad \beta_2 = \left(1 - \frac{V^2}{c_2^2}\right)^{1/2}$$

Подставляя (1.7) в (1.4) и используя (1.8), получаем

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y_1^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y_2^2} = 0 \quad (1.9)$$

Отсюда следует, что можно ввести в рассмотрение две функции

$$w_1(z_1) = \varphi + i\chi, \quad w_2(z_2) = \psi + ik \quad (z_1 = X + iY_1, \quad z_2 = X + iY_2) \quad (1.10)$$

Функции φ , χ и ψ , k связаны условиями Даламбера — Эйлера

$$\frac{\partial \varphi}{\partial X} = \frac{\partial \chi}{\partial Y_1}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial Y_1} = -\frac{\partial \chi}{\partial X}; \quad \frac{\partial \psi}{\partial X} = \frac{\partial k}{\partial Y_2}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial Y_2} = -\frac{\partial k}{\partial X} \quad (1.11)$$

Для компонентов тензора напряжений имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \lambda \nabla^2 \varphi + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right), & \sigma_{xy} &= \mu \left[2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right] \\ \sigma_{yy} &= \lambda \nabla^2 \varphi + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right), & \left(\nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (1.12)$$

Используя (1.7) — (1.11), преобразуем эти соотношения к виду

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{xx}}{\mu} &= (1 + 2\beta_1^2 - \beta_2^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} - 2\beta_2 \frac{\partial^2 k}{\partial X^2} \\ \frac{\sigma_{yy}}{\mu} &= -(1 + \beta_2^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} + 2\beta_2 \frac{\partial^2 k}{\partial X^2} \\ \frac{\sigma_{xy}}{\mu} &= -2\beta_1 \frac{\partial^2 \chi}{\partial X^2} - (1 + \beta_2^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} \end{aligned} \quad (1.13)$$

В тех же обозначениях

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} = V \left(\beta_1 \frac{\partial^2 \chi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} \right) \quad (1.14)$$

Теперь сформулируем задачу. Требуется найти функции $w_1(z_1)$ и $w_2(z_2)$ в области

$$0 \leq Y_n \leq \beta_n h \quad (n = 1, 2)$$

удовлетворяющие следующим граничным условиям:

$$2\beta_1 \frac{\partial^2 \chi}{\partial X^2} + (1 + \beta_2^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} = 0 \quad \text{при } Y_n = \beta_n h, Y_n = 0 \quad (1.15)$$

$$(1 + \beta_2^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} - 2\beta_2 \frac{\partial^2 k}{\partial X^2} = \frac{f(X)}{\mu} \quad \text{при } Y_n = 0, X < 0 \quad (1.16)$$

$$\beta_1 \frac{\partial^2 \chi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} = 0 \quad \text{при } Y_n = \beta_n h, Y_n = 0, X > 0 \quad (1.17)$$

и условию на бесконечности

$$\frac{d^2 w_n}{dz_n^2} \Big|_{z_n} \rightarrow 0 \quad \text{при } |z_n| \rightarrow \infty \quad (1.18)$$

2. Формальное решение. Введем вместо $w_1(z_1)$ и $w_2(z_2)$

$$W_1 = \frac{d^2 w_1}{dz_1^2}, \quad W_2 = \frac{d^2 w_2}{dz_2^2} \quad (2.1)$$

Отобразим полосу (фиг. 1) на верхнюю полуплоскость (фиг. 2)

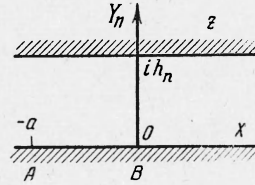
$$\zeta_n = \xi_n + i\eta_n = \exp \frac{\pi z_n}{\beta_n^n} \quad (n=1, 2) \quad (2.2)$$

Пока что, формально, не будем делать различия между переменными ξ_1 и ξ_2 и положим $W_1 = W_1(\xi)$, $W_2 = W_2(\xi)$. В плоскости ζ граничные условия (1.15) — (1.17) для функций W_1 и W_2 имеют вид

$$2\beta_1 \operatorname{Im} W_1 + (1 + \beta_2^2) \operatorname{Re} W_2 = 0 \quad (\eta = 0) \quad (2.3)$$

$$(1 + \beta_2^2) \operatorname{Re} W_1 - 2\beta_1 \operatorname{Im} W_2 = \frac{1}{\mu} f[X(\xi)] \equiv \frac{1}{\mu} F(\xi) \quad (\eta = 0, 0 < \xi < 1) \quad (2.4)$$

$$\beta_1 \operatorname{Im} W_1 + \operatorname{Re} W_2 = 0 \quad (\eta = 0, \xi > 1, \xi < 0) \quad (2.5)$$

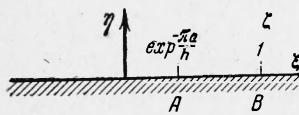


Фиг. 1

Обозначим через W^* функцию, сопряженную W , и перепишем (2.3) в виде

$$2\beta_1 i (W_1 - W_1^*) - (1 + \beta_2^2) (W_2 + W_2^*) = 0 \quad (2.6)$$

Проинтегрируем это равенство по контуру, состоящему из отрезка действительной оси и полуокружности радиуса R . Устремляя R к бесконечности, получаем, учитывая (1.18), по теореме Коши [3]



Фиг. 2

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{W(t) dt}{t - \zeta} = W(\zeta), \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{W^*(t) dt}{t - \zeta} = 0$$

и, следовательно,

$$W_1(\zeta) = -i \frac{1 + \beta_2^2}{2\beta_1} W_2(\zeta) \quad (2.7)$$

Заменяем в (2.2) и (2.3) функцию W_2 на W_1 при помощи (2.7)

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} W_1 &= \alpha F(\xi) & (\eta = 0, 0 < \xi < 1) \\ \operatorname{Im} W_1 &= 0 & (\eta = 0, \xi > 1, \xi < 0) \end{aligned} \quad \left(\alpha = \frac{1 + \beta_2^2}{\mu [(1 + \beta_2^2) - 4\beta_1\beta_2]} \right) \quad (2.8)$$

Для функции $W_1(\zeta)$, таким образом, получается смешанная краевая задача. Ее решение дает формула Келдыша — Седова [3], имеющая в данном случае вид

$$W_1(\zeta) = \frac{\alpha}{\pi i g(\zeta)} \int_0^1 \frac{F(t) g(t) dt}{t - \zeta} + \frac{W_1(\infty)}{g(\zeta)} \quad \left(g(\zeta) = \left(\frac{\zeta - 1}{\zeta} \right)^{1/2} \right) \quad (2.9)$$

Вследствие условия на бесконечности (1.18) $W_1(\infty) = 0$.

3. Частный случай. Пусть так же, как в [2]

$$f(X) = \begin{cases} 0 & (-\infty < X < -a) \\ P & (-a < X < 0) \end{cases} \quad (3.1)$$

В плоскости ζ для функции $F(\xi) \equiv f[X(\xi)]$ это условие имеет вид

$$F(\xi) = \begin{cases} 0 & (\exp(-\pi a / \beta h) > \xi > 0) \\ P & (1 > \xi > \exp(-\pi a / \beta h)) \end{cases} \quad (3.2)$$

Подставляя (3.2) в (2.9), получаем после интегрирования

$$W_1(\xi) = -\frac{\alpha P}{\pi g(\xi)} \left[2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} b - \frac{\sqrt{1-\xi}}{\sqrt{\xi}} \ln \frac{\sqrt{1-\xi} + b \sqrt{\xi}}{\sqrt{1-\xi} - b \sqrt{\xi}} \right] \quad (3.3)$$

$$b = \sqrt{\exp(\pi a / \beta h) - 1} \quad (3.4)$$

Ветви неоднозначных функций, входящих в это выражение, определены следующим образом: $g(\xi) > 0$ при $\xi > 1$, мнимая часть логарифма равна $2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} b$ при $\xi \rightarrow \infty$, $\operatorname{arc} \operatorname{tg} b \leq 1/2\pi$. Выражение (3.3) вместе с (2.1), (2.2) и (2.7) дает решение поставленной задачи. Компоненты тензора напряжений определяются отсюда по формулам (1.13). Заметим, что при замене ξ на ξ_1 и ξ_2 величина b должна заменяться согласно (3.4), где соответственно $\beta = \beta_1$ и $\beta = \beta_2$.

Переходим теперь к определению скорости распространения трещин. Из (3.3) нетрудно убедиться в том, что компоненты тензора напряжений и составляющие вектора скорости перемещения есть величины $O(\exp(-\pi\beta/\beta h))$ при $R \rightarrow \infty$. Таким образом, поток энергии на бесконечности отсутствует. С другой стороны, в окрестности особой точки $z = -a$ напряжения и скорость есть величины $O(\ln r)$, где $r^2 = [(x - Vt + a)^2 + y^2]$, так что работа в единицу времени есть $O[r(\ln r)^2]$ и стремится к нулю вместе с r . Следовательно, можно считать, что весь поток энергии, создаваемый в упругом теле внешними силами P , связан с особенностью в точке $z = 0$, т. е. в начале трещины.

Отсюда естественно предположить, что работа внешних сил целиком расходуется на создание свободной поверхности трещины.

Обозначим через T энергию, приходящуюся на единицу площади образующейся поверхности.

Тогда скорость роста поверхностной энергии есть TV . Эта величина должна быть равна работе внешних сил в единицу времени.

$$TV = \int_{-a}^0 P \left[\frac{\partial u_y}{\partial t} \right]_{y=0} dx \quad (3.5)$$

Вследствие (1.14) и (2.7) имеем

$$\left[\frac{\partial u_y}{\partial t} \right]_{y=0} = V \left\{ \beta_1 \operatorname{Im} W_1(\xi_1) - \frac{2\beta_2}{1+\beta_2^2} \operatorname{Im} W_1(\xi_2) \right\} \quad (3.6)$$

Подставим (3.6) в (3.5) и перейдем под интегралом к переменной $v = \sqrt{(1-\xi)/\xi}$; получим

$$T = \frac{2\alpha P^2 \beta_1 h}{\pi^2} \left\{ \beta_1 \left[2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} b_1 \int_0^{b_1} \frac{dv}{1+v^2} - \int_0^{b_1} \ln \frac{b_1+v}{b_1-v} \frac{v dv}{1+v^2} \right] - \right. \\ \left. - \frac{2\beta_2}{1+\beta_2^2} \left[2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} b_2 \int_0^{b_2} \frac{dv}{1+v^2} - \int_0^{b_2} \ln \frac{b_2+v}{b_2-v} \frac{v dv}{1+v^2} \right] \right\} \quad (3.7)$$

Заметив, что

$$\int_0^b \ln \frac{b+v}{b-v} \frac{v dv}{1+v^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg}^2 b$$

получим из (3.7), с учетом (2.8)

$$\frac{P^2 v}{\pi \mu T} = \frac{\pi a}{2\beta_1 h} \frac{4\beta_1 \beta_2 - (1+\beta_2^2)^2}{2\beta_2 \operatorname{arc} \operatorname{tg}^2 b_2 - \beta_1 (1+\beta_2^2) \operatorname{arc} \operatorname{tg}^2 b_1} \quad (3.8)$$

4. Анализ результатов. Рассмотрим вначале формулу (3.8) в предельном случае $h \rightarrow \infty$. Полагая $a/h \ll 1$, имеем с точностью до членов более высокого порядка малости

$$b_n = \frac{\sqrt{\pi a}}{\sqrt{h c_n^2}}, \quad \text{arc tg } b_n = b_n \quad (3.9)$$

Подставляя в (3.8) эти величины и выражения β_1 и β_2 согласно (1.8), получаем

$$\frac{P^2 a}{\pi \mu T} \frac{V^2}{c_2^2} \left(1 - \frac{V^2}{c_2^2}\right)^{1/2} = \quad (4.1)$$

$$= 4 \left(1 - \frac{V^2}{c_1^2}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{V^2}{c_2^2}\right)^{1/2} - \left(2 - \frac{V^2}{c_2^2}\right)^2$$

Это выражение совпадает с результатом работы [2] для одиночной трещины. В частности, равенство нулю правой части (4.1)

$$4 \left(1 - \frac{V^2}{c_1^2}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{V^2}{c_2^2}\right)^{1/2} - \left(2 - \frac{V^2}{c_2^2}\right)^2 = 0$$

представляет собой уравнение, определяющее скорость распространения релеевских поверхностных волн. Таким образом, в случае стационарного распространения в неограниченной упругой среде одной трещины ее скорость имеет предельное значение, равное релеевской скорости.

Второй предельный случай, который получается из (3.8) при $V \rightarrow 0$, соответствует статической задаче

$$\frac{P^2 a}{\pi \mu T} = \left\{ \frac{\text{arc tg} [\exp(\pi a/h) - 1]^{1/2}}{(\exp(\pi a/h) - 1)^{1/2}} + \frac{a}{\pi a} \frac{c_2^2}{c_1^2 - c_2^2} \text{arc tg}^2 \left[\exp \frac{\pi a}{h} - 1 \right]^{1/2} \right\}^{-1} \quad (4.2)$$

Отсюда при $h \rightarrow \infty$ получаем

$$\frac{P^2 a}{\pi \mu T} = 1 - \frac{c_2^2}{c_1^2}$$

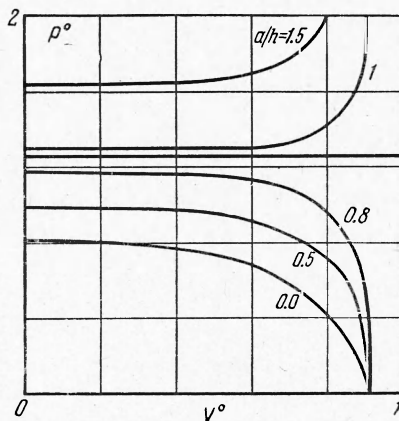
Это также совпадает с результатом, полученным в работе [2].

Рассмотрим теперь формулу (3.8) в общем виде. Результаты расчета в случае $\lambda = \mu$, $c_1^2 / c_2^2 = 3$ для различных значений параметра a/h представлены на фиг. 3, где

$$P^\circ = P a^{1/2} (\pi \mu T)^{-1/2}, \quad V^\circ = V / c_2$$

Обращает на себя внимание то обстоятельство, что формула (3.8) определяет в плоскости $P^\circ V^\circ$ два семейства кривых, соответствующих двум различным режимам распространения трещин. В одном из них (нижнем на фиг. 3) скорость трещин убывает с увеличением давления, в другом — возрастает. Формально это зависит от того, что раньше обращается в нуль с ростом скорости — числитель — или знаменатель формулы (3.8). Очевидно, что критическая кривая, разделяющая эти два семейства, определяется одновременным обращением в нуль и числителя и знаменателя. Так как числитель обращается в нуль при скорости, равной релеевской, то критическое значение параметра $(a/h)_*$ определяется из уравнения

$$2\beta_2^\circ \text{arc tg}^2 b_2^\circ - \beta_2^\circ [1 + (\beta_2^\circ)^2] \text{arc tg}^2 b_1 = 0 \quad (4.3)$$



Фиг. 3

