

УДК 539.374

ВЛИЯНИЕ ЗАВИСИМОСТИ МОДУЛЯ УПРУГОСТИ ОТ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ НА ОСТАТОЧНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ В ТРУБЕ

Р. В. Гольдштейн, С. Е. Александров

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, 119526 Москва

E-mail: goldst@ipmnet.ru

Получено полуаналитическое решение задачи об обжатии трубы внешним давлением с последующей разгрузкой. Для оценки влияния зависимости модуля сдвига от пластической деформации на остаточные напряжения и деформации использовались экспериментальные данные, согласно которым при значении накопленной пластической деформации, равном 0,25, модуль сдвига уменьшается на 20 %. Установлено, что, несмотря на значительное уменьшение модуля сдвига, его зависимость от накопленной деформации не оказывает существенного влияния на остаточные деформации. Влияние этой зависимости в основном проявляется в распределении остаточного радиального напряжения, однако и в этом случае оно весьма слабое. Полученное общее решение может быть использовано для оценки влияния зависимости модуля сдвига от накопленной пластической деформации на остаточные напряжения и деформации для других материалов.

Ключевые слова: упругопластическое тело, большие деформации, остаточные напряжения и деформации, зависимость модулей упругости от накопленной деформации.

Введение. Модули упругости металлических материалов могут зависеть от накопленной пластической деформации, причем при значениях этой деформации, достигаемых в экспериментах, уменьшение модуля упругости является значительным. Представляет интерес изучение влияния этого свойства материала на распределение остаточных напряжений и деформаций. Упругое изменение формы после снятия нагрузки оказывает существенное влияние на качество изделий, получаемых методами обработки металлов давлением. Обзор работ, посвященных моделированию упругого изменения формы при обработке металлов давлением, представлен в [1], значительное влияние пластической анизотропии и (для некоторых материалов) эффекта Баушингера на остаточные напряжения отмечается в [2, 3] соответственно. В настоящее время большинство исследований по моделированию процессов обработки металлов давлением выполняется методом конечных элементов. Однако известно, что на точность предсказания окончательной формы изделия влияют параметры численных схем, которые не имеют отношения к процессу обработки и свойствам материала [4]. Таким образом, при изучении влияния тех или иных свойств материала на форму изделия после разгрузки необходимо строить аналитические или полуаналитические решения модельных задач. Кроме того, эти решения могут быть использованы для проверки точности численных решений, предшествующей использованию численных методов на практике [5].

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ РФ (грант № НШ-3842.2012.1).

© Гольдштейн Р. В., Александров С. Е., 2014

В настоящей работе исследуется влияние зависимости модуля упругости от пластической деформации на распределение остаточных напряжений и деформаций в полном цилиндре, подвергнутом действию внешнего давления и последующей разгрузке. Влияние пластической деформации на модули упругости определено в [6, 7]. Рассматриваемая краевая задача является классической. Ее решение в упругопластической постановке при различных условиях нагружения и постоянных модулях упругости приведено в большинстве работ, в которых исследуется теория пластичности (см., например, [8–11]).

Модель материала. Один из подходов, широко используемых при построении упругопластических моделей сред при произвольных больших деформациях, основан на разложении тензора скорости деформации D на упругую D^e и пластическую D^p составляющие [12]:

$$D = D^e + D^p. \quad (1)$$

Это разложение можно получить, последовательно обобщая соответствующие разложения, используемые в теории малых упругопластических деформаций. В частности, тензор малых упругопластических деформаций ε представляется в виде суммы упругой ε^e и пластической ε^p составляющих: $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$. Дифференцируя это соотношение по времени t , получаем

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p. \quad (2)$$

Уравнение (1) представляет собой обобщение уравнения (2) путем замены производных малых деформаций по времени на соответствующие скорости деформации. В теории малых упругопластических деформаций тензор ε^e связан с тензором напряжения законом Гука. В дальнейшем будем пренебрегать упругим изменением объема. В этом случае

$$\varepsilon^e = \tau / (2G) \quad (3)$$

(τ — девиатор напряжения; G — модуль сдвига). Если модуль сдвига является постоянной величиной, то, дифференцируя (3) по времени, находим

$$\dot{\varepsilon}^e = \dot{\tau} / (2G). \quad (4)$$

Возможное обобщение этого закона на случай больших деформаций имеет вид

$$D^e = \tau^0 / (2G). \quad (5)$$

Здесь τ^0 — некоторая объективная производная τ . Подставляя (5) в (1), получаем

$$D = \tau^0 / (2G) + D^p. \quad (6)$$

Для ряда материалов модуль Юнга, а следовательно, и модуль сдвига зависят от накопленной пластической деформации ε_{eq}^p [6, 7]. Величина ε_{eq}^p определяется уравнением

$$\frac{d\varepsilon_{eq}^p}{dt} = \xi_{eq}^p, \quad (7)$$

где d/dt — материальная производная; ξ_{eq}^p — эквивалентная скорость пластической деформации:

$$\xi_{eq}^p = \sqrt{2/3} (D^p : D^p)^{1/2}. \quad (8)$$

Уравнение (3) остается в силе и при $G(\varepsilon_{eq}^p)$, но при его дифференцировании по времени вместо (4) получаем

$$\dot{\varepsilon}^e = \frac{\dot{\tau}}{2G} - \frac{\tau}{2G^2} \frac{dG}{d\varepsilon_{eq}^p} \xi_{eq}^p. \quad (9)$$

В механике упругопластических сред с развивающейся поврежденностью предполагается, что G зависит от параметра поврежденности. Поэтому при дифференцировании (3) по времени также появляется дополнительное слагаемое (в отличие от случая $G = \text{const}$), которое по определению является производной по времени от деформации поврежденности [13]. Обобщая (9) на случай больших деформаций, имеем

$$D^e = \frac{\tau^0}{2G} - \frac{\tau}{2G^2} \frac{dG}{d\varepsilon_{eq}^p} \xi_{eq}^p. \quad (10)$$

Подставляя (10) в (1), получаем

$$D = \frac{\tau^0}{2G} - \frac{\tau}{2G^2} \frac{dG}{d\varepsilon_{eq}^p} \xi_{eq}^p + D^p. \quad (11)$$

Условие текучести Мизеса с учетом изотропного упрочнения имеет вид

$$(\tau : \tau)^{1/2} = \sqrt{2} k_0 \Phi(\varepsilon_{eq}^p). \quad (12)$$

Без ограничения общности можно считать, что $\Phi(0) = 1$. Тогда k_0 — начальный предел текучести при чистом сдвиге. Тензор D^p определяется из ассоциированного закона течения

$$D^p = \lambda \tau, \quad \lambda \geq 0. \quad (13)$$

При упругой разгрузке предполагается справедливым соотношение (3), в котором напряжения и деформации необходимо заменить на соответствующие приращения. При этом модуль сдвига является известной функцией координат и определяется распределением ε_{eq}^p в конце процесса нагружения.

Постановка краевой задачи. Для оценки влияния зависимости модуля сдвига от пластической деформации на распределение остаточных напряжений и деформаций рассмотрим упругопластическую трубу, подвергнутую действию равномерного внешнего давления p и последующей разгрузке в условиях плоскодеформированного состояния. Начальный внутренний радиус трубы обозначим a_0 , начальный внешний радиус — b_0 . Текущие значения этих радиусов обозначим a и b соответственно. Целесообразно ввести цилиндрическую систему координат (r, θ, z) , ось z которой совпадает с осью симметрии трубы. В этой системе координат нормальные напряжения $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$ являются главными напряжениями. Соответствующие девиаторные компоненты обозначим $\tau_r, \tau_\theta, \tau_z$. Составляющая скорости равна $u_\theta = 0$. Напряжение σ_r должно удовлетворять краевому условию

$$r = a: \quad \sigma_r = 0. \quad (14)$$

На внешней поверхности трубы задается радиальная скорость:

$$r = b: \quad u_r = -u_0, \quad u_0 > 0. \quad (15)$$

Тогда величина p определяется из решения краевой задачи. Единственное нетривиальное уравнение равновесия принимает вид

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0. \quad (16)$$

Так как материал является несжимаемым и выполняются условия плоскодеформированного состояния, то

$$\sigma_z = \sigma, \quad (17)$$

где σ — среднее напряжение.

Очевидно, что главные оси тензоров скорости деформации и напряжения не вращаются относительно материальной системы координат. Поэтому объективная производная в (11) сводится к материальной производной. В частности,

$$D = \frac{1}{2G} \frac{d\tau}{dt} - \frac{\tau}{2G^2} \frac{dG}{d\varepsilon_{eq}^p} \xi_{eq}^p + D^p. \quad (18)$$

Общее решение при нагружении. В рассматриваемом случае уравнение несжимаемости принимает вид $\partial u_r / \partial r + u_r / r = 0$. Решение этого уравнения, удовлетворяющее краевому условию (15), имеет форму

$$u_r = -u_0 b / r. \quad (19)$$

По определению

$$\frac{\partial r}{\partial t} = u_r. \quad (20)$$

Так как $db/dt = -u_0$, то, подставляя (20) в выражение (19) и интегрируя его, получаем

$$r^2 = R^2 + b^2 - b_0^2, \quad (21)$$

где R — лагранжева координата. Из (21) следует, что при $b = b_0$ (в начальный момент времени) $r = R$. Таким образом, внутренний и внешний радиусы трубы в течение всего процесса деформирования определяются уравнениями $R = a_0$ и $R = b_0$ соответственно. Построим решение в лагранжевых координатах. Так как главные оси тензоров напряжения и скорости деформации не вращаются относительно материальной системы координат, то уравнение (18), представленное в покомпонентной форме, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial t} &= \frac{1}{2G} \frac{\partial \tau_r}{\partial t} - \frac{\tau_r}{2G^2} \frac{dG}{d\varepsilon_{eq}^p} \xi_{eq}^p + \frac{\partial \varepsilon_r^p}{\partial t}, \\ \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial t} &= \frac{1}{2G} \frac{\partial \tau_\theta}{\partial t} - \frac{\tau_\theta}{2G^2} \frac{dG}{d\varepsilon_{eq}^p} \xi_{eq}^p + \frac{\partial \varepsilon_\theta^p}{\partial t}. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь $\varepsilon_r, \varepsilon_r^p$ — полная радиальная деформация и ее пластическая составляющая; $\varepsilon_\theta, \varepsilon_\theta^p$ — полная окружная деформация и ее пластическая составляющая. Только одно из уравнений (22) является независимым. Действительно, из (17) следует, что $\tau_z = 0$, поэтому

$$\tau_r + \tau_\theta = 0. \quad (23)$$

С учетом того что материал является несжимаемым, сумма двух уравнений в (22) равна нулю. Положим $G = G_0 \Lambda(\varepsilon_{eq}^p)$. Без ограничения общности можно считать, что $\Lambda(0) = 1$. Тогда G_0 — начальный модуль сдвига.

Интегрируя первое уравнение системы (22), получаем

$$\varepsilon_r = \frac{\tau_r}{2G_0 \Lambda(\varepsilon_{eq}^p)} + \varepsilon_r^p. \quad (24)$$

Отличными от нуля являются только две компоненты тензора скорости пластической деформации ξ_r^p и ξ_θ^p . С учетом пластической несжимаемости материала $\xi_r^p = -\xi_\theta^p$, кроме того, при обжатии трубы $\xi_r^p > 0$. Поэтому уравнение (8) сводится к уравнению

$$\frac{\partial \varepsilon_{eq}^p}{\partial t} = \sqrt{\frac{2}{3}} [(\xi_r^p)^2 + (\xi_\theta^p)^2]^{1/2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \xi_r^p = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\partial \varepsilon_r^p}{\partial t}.$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$\varepsilon_{eq}^p = (2/\sqrt{3}) \varepsilon_r^p. \quad (25)$$

С учетом (23) уравнение (12) преобразуем к форме

$$\tau_r = -\tau_\theta = k_0 \Phi(\varepsilon_{eq}^p). \quad (26)$$

Из (13) определяется величина λ , которая в рассматриваемом случае не существенна.

Радиальная скорость деформации определяется из (19), (21):

$$\xi_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{u_0 b}{R^2 + b^2 - b_0^2}.$$

Заменяя в этом уравнении ξ_r на $\partial \varepsilon_r / \partial t = -u_0 \partial \varepsilon_r / \partial b$ и интегрируя его, получаем

$$\varepsilon_r = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{R^2}{R^2 + b^2 - b_0^2} \right). \quad (27)$$

Это решение удовлетворяет начальному условию $\varepsilon_r = 0$ при $b = b_0$. Подставляя (25)–(27) в (24), находим

$$\ln \left(\frac{R^2}{R^2 + b^2 - b_0^2} \right) = k \Omega(\varepsilon_{eq}^p) + \sqrt{3} \varepsilon_{eq}^p, \quad (28)$$

где $k = k_0 / G_0$; $\Omega(\varepsilon_{eq}^p) = \Phi(\varepsilon_{eq}^p) / \Lambda(\varepsilon_{eq}^p)$.

Граница $R = R_c$ между упругой и пластической областями определяется из уравнения (28) и условия $\varepsilon_{eq}^p = 0$ при $R = R_c$. Очевидно, что R_c зависит от b . Вся труба переходит в пластическое состояние при $R_c = b_0$. Из (28) следует, что соответствующее значение b равно $b_m = b_0 \exp(-k/2)$. В дальнейшем будем считать, что пластическая область занимает весь объем трубы. Таким образом, $b \leq b_m$. Переходя в (16) к дифференцированию по R^2 с помощью (21) и используя (26), находим

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial R^2} + \frac{k_0 \Phi(\varepsilon_{eq}^p)}{R^2 + b^2 - b_0^2} = 0. \quad (29)$$

Дальнейшие упрощения можно выполнить, переходя к дифференцированию в (29) по ε_{eq}^p и исключая R^2 с помощью (28). В этом случае уравнение (29) принимает форму

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial \varepsilon_{eq}^p} + \frac{k_0 \Phi(\varepsilon_{eq}^p) (k \Omega' + \sqrt{3}) \exp(k \Omega(\varepsilon_{eq}^p) + \sqrt{3} \varepsilon_{eq}^p)}{1 - \exp(k \Omega(\varepsilon_{eq}^p) + \sqrt{3} \varepsilon_{eq}^p)} = 0, \quad (30)$$

где $\Omega' \equiv d\Omega/d\varepsilon_{eq}^p$ — известная функция ε_{eq}^p . Пусть ε_a — значение ε_{eq}^p при $r = a$. Тогда решение уравнения (30), удовлетворяющее краевому условию (14), имеет вид

$$\frac{\sigma_r}{k_0} = - \int_{\varepsilon_a}^{\varepsilon_{eq}^p} \frac{\Phi(x) (k \Omega' + \sqrt{3}) \exp(k \Omega(x) + \sqrt{3} x)}{1 - \exp(k \Omega(x) + \sqrt{3} x)} dx. \quad (31)$$

Так как $\sigma_r - \sigma_\theta = \tau_r - \tau_\theta$, то выражение для окружного напряжения можно получить из (26) в виде

$$\sigma_\theta = \sigma_r - 2k_0 \Phi(\varepsilon_{eq}^p). \quad (32)$$

Уравнения (28), (31), (32) определяют распределения радиального и окружного напряжений в параметрической форме.

Пусть ε_b — значение ε_{eq}^p при $r = b$. Тогда значение радиального напряжения при $r = b$ определяется из (31) в виде

$$\frac{\sigma_b}{k_0} = - \int_{\varepsilon_a}^{\varepsilon_b} \frac{\Phi(x) (k \Omega' + \sqrt{3}) \exp(k \Omega(x) + \sqrt{3} x)}{1 - \exp(k \Omega(x) + \sqrt{3} x)} dx. \quad (33)$$

Очевидно, что $p = -\sigma_b$.

Общее решение при разгрузке. Деформации при разгрузке предполагаются малыми. Обозначим значения величин b , a в момент окончания стадии нагружения b_f и a_f соответственно. Эти значения связаны уравнением (21), так как $R = a_0$ при $b = b_f$, $r = a_f$. Распределение ε_{eq}^p при $b = b_f$ обозначим через w . Тогда из (28) следует

$$\ln \left(\frac{R^2}{R^2 + b_f^2 - b_0^2} \right) = k\Omega(w) + \sqrt{3}w. \quad (34)$$

Краевые условия для приращения радиального напряжения имеют вид

$$r = a_f: \quad \Delta\sigma_r = 0; \quad (35)$$

$$r = b_f: \quad \Delta\sigma_r = -\sigma_b. \quad (36)$$

Из условия несжимаемости следует, что распределение радиального перемещения в интервале времени с момента окончания стадии нагрузки до момента окончания процесса разгрузки задается соотношением, аналогичным (19):

$$v_r = v_0 b_f / r.$$

Здесь v_0 — постоянная интегрирования. Тогда с помощью (21) выражения для приращений деформаций представляются в виде

$$\Delta\varepsilon_r = -\frac{v_0 b_f}{R^2 + b_f^2 - b_0^2}, \quad \Delta\varepsilon_\theta = \frac{v_0 b_f}{R^2 + b_f^2 - b_0^2}. \quad (37)$$

Подставляя (37) в уравнение (3), в котором напряжения и деформации следует заменить приращениями, находим

$$\Delta\tau_r = -\frac{2v_0 b_f G_0}{R^2 + b_f^2 - b_0^2} \Lambda(w), \quad \Delta\tau_\theta = \frac{2v_0 b_f G_0}{R^2 + b_f^2 - b_0^2} \Lambda(w). \quad (38)$$

Здесь зависимость w от R следует из (34).

Подставляя (38) в уравнение равновесия (16), записанное в приращениях напряжений, и переходя в этом уравнении к дифференцированию по R^2 с помощью (21) при $b = b_f$, имеем

$$\frac{\partial \Delta\sigma_r}{\partial R^2} = \frac{2v_0 b_f G_0}{(R^2 + b_f^2 - b_0^2)^2} \Lambda(w).$$

Выполняя в этом уравнении дифференцирование по w и исключая R с помощью (34), получаем

$$\frac{1}{k_0} \frac{\partial \Delta\sigma_r}{\partial w} = \frac{2v_0 b_f}{k(b_f^2 - b_0^2)} \exp(k\Omega(w) + \sqrt{3}w) (\Omega'(w) + \sqrt{3}) \Lambda(w).$$

Интегрируя данное уравнение с учетом краевого условия (35), имеем

$$\frac{\Delta\sigma_r}{k_0} = \frac{2v_0 b_f}{k(b_f^2 - b_0^2)} \int_{\varepsilon_a}^w \exp(k\Omega(x) + \sqrt{3}x) (k\Omega'(x) + \sqrt{3}) \Lambda(x) dx. \quad (39)$$

Подставляя это решение в краевое условие (36) и используя (33), получаем уравнение для определения v_0 в форме

$$\int_{\varepsilon_a}^{\varepsilon_b} \frac{\Phi(x)(k\Omega' + \sqrt{3}) \exp(k\Omega(x) + \sqrt{3}x)}{1 - \exp(k\Omega(x) + \sqrt{3}x)} dx =$$

$$= \frac{2v_0 b_f}{k(b_f^2 - b_0^2)} \int_{\varepsilon_a}^{\varepsilon_b} \exp(k\Omega(x) + \sqrt{3}x)(k\Omega'(x) + \sqrt{3}) \Lambda(x) dx.$$

Выражение для приращения окружного напряжения можно получить из соотношения $\Delta\sigma_\theta = \Delta\sigma_r - 2\Delta\tau_r$. Таким образом, с учетом (38), (39) получаем

$$\frac{\Delta\sigma_\theta}{k_0} = \frac{2v_0 b_f}{k(b_f^2 - b_0^2)} \int_{\varepsilon_a}^w \exp(k\Omega(x) + \sqrt{3}x)(\Omega'(x) + \sqrt{3}) \Lambda(x) dx + \frac{4v_0 b_f}{k(R^2 + b_f^2 - b_0^2)} \Lambda(w). \quad (40)$$

Здесь R^2 выражается через w с помощью (34). Распределение остаточных напряжений следует из соотношений $\sigma_r^{res} = \sigma_r + \Delta\sigma_r$ и $\sigma_\theta^{res} = \sigma_\theta + \Delta\sigma_\theta$, где величины σ_r, σ_θ должны быть исключены с помощью (31), (32), а величины $\Delta\sigma_r, \Delta\sigma_\theta$ — с помощью (39), (40). Распределение остаточных деформаций находим из соотношений $\varepsilon_r^{res} = \varepsilon_r + \Delta\varepsilon_r$ и $\varepsilon_\theta^{res} = \varepsilon_\theta + \Delta\varepsilon_\theta$. Вследствие предположения о несжимаемости материала достаточно вычислить ε_r^{res} . Для этого необходимо использовать (21), (27) при $b = b_f$, а также (37).

Пример. Положим, что $b_0/a_0 = 2$, $k = 0,001$. В интервале $0 \leq \varepsilon_{eq}^p \leq 0,25$ экспериментальные данные [7] достаточно точно описываются уравнением

$$\Lambda(\varepsilon_{eq}^p) = 0,8 + 3,2(\varepsilon_{eq}^p - 0,25)^2. \quad (41)$$

Функцию $\Phi(\varepsilon_{eq}^p)$ примем в виде

$$\Phi(\varepsilon_{eq}^p) = (1 + \varepsilon_{eq}^p/\varepsilon_0)^n, \quad \varepsilon_0 = 0,2, \quad n = 0,25.$$

Тогда

$$\Omega(\varepsilon_{eq}^p) = (1 + \varepsilon_{eq}^p/\varepsilon_0)^n [0,8 + 3,2(\varepsilon_{eq}^p - 0,25)^2]^{-1}.$$

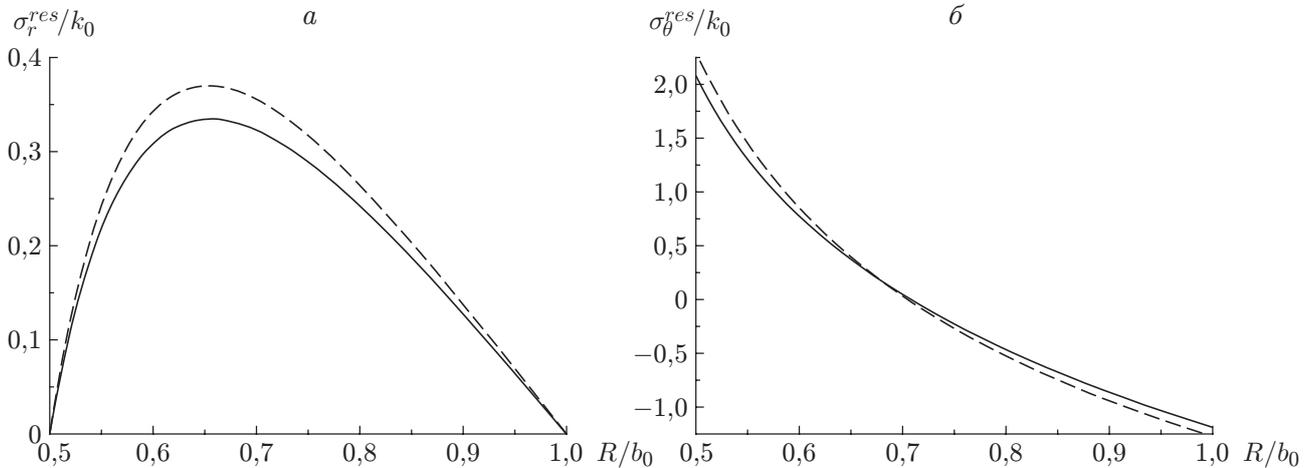
Вычислим распределение остаточных напряжений и деформаций при $\varepsilon_a = 0,25$ в конце процесса нагружения. В этом случае накопленная пластическая деформация на внутреннем радиусе трубы достигает максимального значения, при котором еще справедливо уравнение (41). Из (28) следует уравнение для определения b_f в форме

$$\ln(a_0^2/(a_0^2 + b_f^2 - b_0^2)) = k\Omega(\varepsilon_a) + \sqrt{3}\varepsilon_a.$$

Поскольку величина b_f известна, из (28) получаем уравнение для определения ε_b

$$2 \ln(b_0/b_f) = k\Omega(\varepsilon_b) + \sqrt{3}\varepsilon_b.$$

Величина σ_b определяется из (33) путем численного интегрирования. Для определения влияния зависимости модуля сдвига от пластической деформации на распределение остаточных напряжений и деформаций выполнены вычисления с использованием уравнения (41) и соотношения $\Lambda(\varepsilon_{eq}^p) = 1$. Зависимости остаточных напряжений от R показаны на рисунке. Вычисления остаточной деформации показали, что ее величина слабо зависит от выбора функции $\Lambda(\varepsilon_{eq}^p)$. Таким образом, в рассмотренном случае зависимость модуля сдвига от накопленной пластической деформации оказывает наиболее существенное влияние на распределение остаточного радиального напряжения, которое, однако, слабо зависит от вида



Зависимости радиальных (а) и окружных (б) остаточных напряжений от величины R/b_0 : сплошные линии — зависимость (41), штриховые — зависимость $\Lambda(\varepsilon_{eq}^p) = 1$

функции $\Lambda(\varepsilon_{eq}^p)$. Полученное общее решение может быть использовано для оценки влияния рассматриваемого свойства материала с функциями $\Phi(\varepsilon_{eq}^p)$ и $\Lambda(\varepsilon_{eq}^p)$ другого вида, а также в другом диапазоне значений ε_{eq}^p .

ЛИТЕРАТУРА

1. Li K. P., Carden W. P., Wagoner R. H. Simulation of springback // Intern. J. Mech. Sci. 2002. V. 44. P. 103–122.
2. Geng L., Wagoner R. H. Role of plastic anisotropy and its evolution on springback // Intern. J. Mech. Sci. 2002. V. 44. P. 123–148.
3. Gau J.-T., Kinzel G. L. An experimental investigation of the influence of the Bauschinger effect on springback predictions // J. Mater. Process. Technol. 2001. V. 108. P. 369–375.
4. Xu W. L., Ma C. H., Li C. H., Feng W. J. Sensitive factors in springback simulation for sheet metal forming // J. Mater. Process. Technol. 2004. V. 151. P. 217–222.
5. Roberts S. M., Hall F. R., Bael A. V., et al. Benchmark tests for 3-D, elasto-plastic, finite-element codes for the modeling of metal forming processes // J. Mater. Process. Technol. 1992. V. 34. P. 61–68.
6. Yamaguchi K., Adachi H., Takakura N. Effects of plastic strain and strain path on Young's modulus of sheet metals // Metals Mater. 1998. V. 4, N 3. P. 420–425.
7. Yang M., Akiyama Y., Sasaki T. Evaluation of change in material properties due to plastic deformation // J. Mater. Process. Technol. 2004. V. 151. P. 232–236.
8. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехтеоретиздат, 1956.
9. Mendelson A. Plasticity: theory and application. N. Y.: Macmillan Co., 1968.
10. Соколовский В. В. Теория пластичности. М.: Высш. шк., 1969.
11. Chakrabarty J. Theory of plasticity. N. Y.: McGraw-Hill Book Co., 1987.
12. Xiao H., Bruhns O. T., Meyers A. Elastoplasticity beyond small deformations // Acta Mech. 2006. V. 182. P. 31–111.
13. Krajcinovic D. Damage mechanics: accomplishments, trends and needs // Intern. J. Solids Struct. 2000. V. 37. P. 267–277.

Поступила в редакцию 11/VI 2013 г.