

тов также линейно уменьшается с увеличением концентрации меди c_2 . На участке $E \approx 0,25-0,5\%$ (см. рис. 1) (полная пластичность меди при упругом вольфраме) H_* пропорционален концентрации упругой фазы (кривая 1 на рис. 2). Стадия деформирования композита, соответствующая началу пластичности вольфрама ($E \approx 0,5-1,25\%$), характеризуется плавным уменьшением пластического модуля до величины, соответствующей линейному упрочнению материала при полной пластичности обеих составляющих (кривая 2 на рис. 2). При расчетных концентрациях вольфрама для кривых 1—5 на рис. 1 он слабо зависит от значения c_1 и близок к H_* вольфрама.

Заметим, что поскольку макроскопическое реологическое уравнение композита в данной модели получено при использовании самосогласованной схемы осреднения, то оно может быть применимо в достаточно широком диапазоне изменения объемных концентраций компонентов и их упругих модулей, включая поры и жесткие фазы [10]. Введение же гипотезы [8] о равенстве пластических сдвигов в активных системах скольжения пластического зерна обосновано лишь для материалов, имеющих число независимых систем скольжения в кристаллах $n = 5$ (т. е. ГЦК- и ОЦК-кристаллы) [4], что и определяет область применимости данной модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. Макарова И. С., Сараев Л. А. К теории малых упругопластических деформаций хаотически армированных композитов // ПМТФ.— 1991.— № 5.
2. Хорошун Л. П., Вецало Ю. А. К теории эффективных свойств идеально пластических композитных материалов // Прикл. механика.— 1987.— № 1.
3. Крок Р. Неорганические порошковые композиции // Современные композиционные материалы/Под ред. Л. Браутмана и Р. Крока.— М.: Мир, 1970.
4. Волоховская О. А., Подалков В. В. О пластическом деформировании изотропно упрочняющегося поликристаллического материала // ПМТФ.— 1991.— № 5.
5. Talor G. I. Plastic strain in metals // J. Inst. Metals.— 1938.— V. 62, N 1.
6. Хоникомб Р. Пластическая деформация металлов.— М.: Мир, 1970.
7. Волоховская О. А., Подалков В. В. Об упругопластическом поведении материала с учетом микронеоднородности // ПМТФ.— 1981.— № 6.
8. Chiang C. R., Weng G. J. Transition of plastic behavior from single crystal to polycrystal under pure tension and the effect of multislip // Trans. ASME. J. Engng Mater. Technol.— 1984.— V. 106, N 4.
9. Михель А. Н., Салганик Р. Л., Христианович С. А. Теоретическое описание запаздывания пластического деформирования сталей // Пластичность и разрушение твердых тел.— М.: Наука, 1988.
10. Шермергор Т. Д. Теория упругости микронеоднородных сред.— М.: Наука, 1977.
11. Свойства элементов: Справочник. Ч. 1. Физические свойства/Под ред. Г. В. Самсонова.— М.: Металлургия, 1976.

г. Москва

Поступила 25/VI 1992 г.,
в окончательном варианте — 12/XI 1992 г.

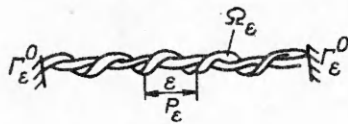
УДК. 539.3

А. Г. Колпаков

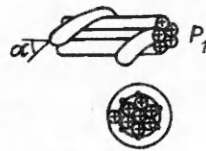
КОНСТРУКЦИИ МАЛОГО ДИАМЕТРА С ВНУТРЕННИМИ ОДНОСТОРОННИМИ КОНТАКТАМИ

Проведено построение формального асимптотического разложения [1] для задачи о контактирующих упругих телах в области малого диаметра ϵ . Предельный (при $\epsilon \rightarrow 0$) переход дает одномерную задачу. Соответствующие ей уравнения равновесия совпадают с классическими [2, 3]. Определяющие уравнения получаются при помощи решения так называемой ячейочной задачи на ячейке периодичности структуры. Рассматриваемая задача может быть использована при исследовании, в частности, текстильных материалов [4].

© А. Г. Колпаков, 1994



Р и с. 1



Р и с. 2

1. **Постановка задачи.** Рассмотрим конструкцию периодического строения, образованную упругими элементами, которые могут вступать в идеальный контакт (рис. 1). Конструкция занимает область Ω_ϵ , имеющую характерный диаметр $\epsilon \ll 1$ (что формализуется в виде $\epsilon \rightarrow 0$ [1, 2]). Тот же характерный размер имеет и ячейка периодичности (показана на рис. 2 в безразмерных переменных $y = x/\epsilon$). Упругие постоянные элементов этой конструкции обозначим через $\epsilon^{-4} a_{ijkl}(x/\epsilon)$. Функции a_{ijkl} предполагаются периодическими по y_1 с периодом m (рис. 2) и ограниченными. Коэффициент ϵ^{-4} введен для учета порядка изгибной жесткости. Наличие контактов учитывается следующим образом [5, 6]: вводится пространство функций

$$V_\epsilon = \{u \in H^1(\Omega_\epsilon): u(x) = 0 \text{ на } \Gamma_\epsilon^0 \text{ (см. рис. 1)}\}$$

и ставится условие на перемещения u^ϵ элементов конструкции:

$$(1.1) \quad u^\epsilon \in M(V_\epsilon) = \{u \in V_\epsilon: [u\mathbf{n}] = 0 \text{ на контактных поверхностях}\}$$

(\mathbf{n} — вектор нормали). Под контактными понимаются поверхности возможного соприкосновения элементов конструкции. Если априори таковые выделить нельзя, то контактной считается вся поверхность элементов. В локальных переменных y в пределах ячейки периодичности $P_1 = \epsilon^{-1}P_\epsilon = \{y = x/\epsilon: x \in P_\epsilon\}$ (см. рис. 1, 2) условие контакта имеет вид

$$(1.2) \quad u^\epsilon(x_1, y) \in \tilde{M} = \{u \in H^1(P_1): [u\mathbf{n}] = 0\}$$

на контактных поверхностях и u периодична по y_1 с периодом m . В (1.2) переменная x_1 «заморожена». Квадратные скобки в (1.1), (1.2) обозначают скачок — разность значений функции на разных сторонах контактной поверхности [6].

Перемещения u^ϵ определяются из решения вариационного неравенства [5, 6]

$$(1.3) \quad \int_{\Omega_\epsilon} \sigma_{ij}^\epsilon(u^\epsilon - v)_{,j} dv - \epsilon^{-2} \int_{\Gamma_\epsilon} g(u^\epsilon - v) ds \geq -\epsilon^{-2} \int_{\Omega_\epsilon} f(u^\epsilon - v) dv$$

для любой $v \in M(V_\epsilon)$, где

$$(1.4) \quad \sigma_{ij}^\epsilon = \epsilon^{-4} a_{ijkl}(x/\epsilon) u_{k,l}^\epsilon.$$

Суммирование предполагается по повторяющимся индексам.

Замечание 1. Множитель ϵ^{-4} в законе Гука (1.4) учитывает пропорциональность изгибной жесткости балки четвертой степени ее диаметра [7], пропорциональность сил f и g величине ϵ^{-2} связана с учетом их порядков в моделях балок [7, 3].

Если выполнены условия $a_{ijkl}, f, g \in C(R^3)$ и область Ω_ϵ имеет C^1 -границу, то задача (1.1), (1.3), (1.4) однозначно разрешима в $M(V_\epsilon)$ для любого $\epsilon > 0$ [5, 6]. Нашей целью является анализ задачи при $\epsilon \rightarrow 0$.

2. **Формальное асимптотическое разложение.** Для анализа задачи применим двухмасштабный метод [6], основанный на одновременном использовании исходных x и локальных $y = x/\epsilon$ переменных и представлении решения в виде рядов по степеням ϵ , т. е. будем строить формальное асимптотическое разложение [1] в предложенном в [3] виде

$$(2.1) \quad u^\epsilon = u^{(0)}(x_1) + \epsilon u^{(1)}(x_1, y) + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k u^{(k)}(x_1, y);$$

$$(2.2) \quad v = v^{(0)}(x_1) + \epsilon v^{(1)}(x_1, y) + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k v^{(k)}(x_1, y);$$

$$(2.3) \quad \sigma_{ij}^\epsilon = \epsilon^{-4} \sigma_{ij}^{(-4)} + \dots = \sum_{m=-4}^{\infty} \epsilon^m \sigma_{ij}^{(m)}(x_1, y),$$

где функции в правых частях (2.1)–(2.3) периодичны по y_1 с периодом m .

Перейдем к переменным x_1, y также в (1.1), (1.3), (1.4). В указанных переменных дифференцирование функций $f(x_1, y)$ производится по правилу

$$(2.4) \quad \frac{\partial}{\partial x_1} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_1} + \epsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \rightarrow \epsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \quad (\alpha = 2, 3).$$

Здесь и далее греческие индексы принимают значения 2, 3, латинские 1, 2, 3 и используются следующие обозначения: $\partial x = \partial/\partial x_1$ и $\partial y = \partial/\partial y_1$.

Замена переменных в интегралах из (1.3) и замена (2.4) дают

$$(2.5) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=-4}^{\infty} \epsilon^2 \int_{\Omega_1} (\epsilon^{m+k-1} \sigma_{ij}^{(m)} w_{i,j}^{(k)} + \epsilon^{m+k} \sigma_{i1}^{(m)} w_{i,1}^{(k)}) dv + \\ + \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k \int_{\Gamma_1} g w^{(k)} ds \geq - \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k \int_{\Omega_1} f w^{(k)} dv$$

для любой $v \in M(\Omega_1)$.

Здесь $\Omega_1 = \{(x_1, y_2, y_3): x \in \Omega_\epsilon\}$, $\Gamma_1 = \{(x_1, y_2, y_3): x \in \Gamma_\epsilon\}$ имеют характерный диаметр, равный единице; $w^{(k)} = u^{(k)} - v^{(k)}$.

Подстановка (2.1), (2.3) в закон Гука (1.4) дает [3]

$$(2.6) \quad \sigma_{ij}^{(m)} = a_{ijkl}(y) u_{k,ly}^{(m+5)} + a_{ijk1}(y) u_{k,1x}^{(m+4)} \quad (m = -4, -3, \dots).$$

3. Уравнения равновесия. Вывод уравнений равновесия для тонких конструкций в настоящее время можно считать традиционным [2, 3, 8], в связи с этим ограничимся его кратким изложением. Рассмотрим уравнение (2.5) с $w = w^0(x_1) \in C^1([-1, 1])$. В данном случае оно принимает вид

$$(3.1) \quad \int_{\Omega_1} \epsilon^{m+1} \sigma_{i1}^{(m)} w_{i,1x}^{(0)} dv - \int_{\Gamma_1} g w^{(0)} ds \geq - \int_{\Omega_1} f w^{(0)} dv \quad (m = -4, -3, \dots)$$

для любой $v^{(0)} \in C^1([-1, 1])$.

Замечание 2. Имеет место следующая связь интегралов от быстроосциллирующих функций вида $f(x_1, x/\epsilon)$ с их средними [3]: при $\epsilon \rightarrow 0$

$$\int_{\Omega_1} f(x_1, x/\epsilon) dv \rightarrow \int_{-1}^1 \langle f \rangle(x_1) dx_1, \\ \int_{\Gamma_1} f(x_1, x/\epsilon) ds \rightarrow \int_{-1}^1 \langle f \rangle_\gamma(x_1) dx_1,$$

где $\langle f \rangle = m^{-1} \int_{P_1} f(x_1, y) dy$ — среднее по ячейке периодичности, $\langle f \rangle_\gamma = m^{-1} \int_\gamma f(x_1, y) dy$ — среднее по боковой поверхности ячейки периодичности. Отметим, что рассматривается случай, когда проекцией Ω_1 (и Ω_ϵ) на ось Ox_1 является отрезок $[-1, 1]$ (см. рис. 1).

С учетом замечания 2 из (3.1) при $\epsilon \rightarrow 0$ получаем (имея в виду $v^{(0)} \in C([-1, 1])$) равенства

$$(3.2) \quad \langle \sigma_{i1}^{(m)} \rangle_{1x} = 0 \quad (m = -4, -3), \\ \langle \sigma_{i1}^{(-2)} \rangle_{1x} = \langle g \rangle_\gamma + \langle f \rangle_i.$$

Величины $\langle \sigma_{i1}^{(m)} \rangle$ имеют смысл осевых усилий.

Положим теперь в (2.5) $w = \epsilon w^{(1)}(x_1, y) = \epsilon(y_2 v_2(x_1) + y_3 v_3(x_1))$ (т. е. $v = u^{(1)} + \epsilon w^{(1)}$, при этом $v \in M(\Omega_1)$, что проверяется непосредственно). Для рассматриваемого случая (2.5) принимает вид

$$\sum_{m=-4}^{\infty} \epsilon^2 \int_{\Omega_1} [\epsilon^m \sigma_{ij}^{(m)} (v_2 \delta_{2j} + v_3 \delta_{3j}) + \epsilon^{(m+1)} \sigma_{i1}^{(m)} (y_2 v_{2i,1x} + y_3 v_{3i,1x})] dv + \int_{\Gamma_1} g (y_2 v_2 + y_3 v_3) ds \geq - \sum_{m=-4}^{\infty} \int_{\Omega_1} f (y_2 v_2 + y_3 v_3) dv.$$

Введя формулой [3] $M_{ij} = \langle y_j \sigma_{i1}^{(m)} \rangle$ моменты, с учетом замечания 2 и того, что $v_2, v_3 \in C^1([-1, 1])$, находим

$$(3.3) \quad \langle \sigma_{i\alpha}^{(-4)} \rangle = 0 \quad (\alpha = 2, 3, i = 1, 2, 3), \\ -M_{\alpha i, 1x}^{(-4)} + \langle \sigma_{i\alpha}^{(-3)} \rangle = 0, \\ -M_{\alpha i, 1x}^{(-3)} + \langle \sigma_{i\alpha}^{(-2)} \rangle = \langle g_i y_\alpha \rangle_\gamma + \langle f_i y_\alpha \rangle.$$

4. Определяющие соотношения. При получении определяющих соотношений в наибольшей степени проявляется специфика рассматриваемой задачи [1—3, 6—12]. Перейдем к получению этих соотношений.

Выберем пробную функцию в виде $v = \epsilon v^{(1)}(y)$, где $v^{(1)}(y)$ периодична по y_1 с периодом m . Для такого выбора, приравняв в (2.5) члены порядка ϵ^{-4} , имеем

$$\int_{\Omega_1} \sigma_{ij}^{(-4)} w_{i,j}^{(1)} dv \geq 0 \quad (w^{(1)} = u^{(1)} - v^{(1)})$$

для любой $v \in M(\Omega_1)$. Учитывая периодичность функций по y_1 и замечание 2, можно переписать это неравенство в виде (см. обоснование в [6])

$$(4.1) \quad \int_{P_1} \sigma_{ij}^{(-4)} w_{i,j}^{(1)} dy \geq 0$$

для любой $v^{(1)} \in \tilde{M}$, где, согласно (2.6),

$$(4.2) \quad \sigma_{ij}^{(-4)} = a_{ijkl}(y) u_{k,ly}^{(1)} + a_{ijp1}(y) u_{p,1x}^{(0)}(x_1).$$

При изучении аналогичной линейной задачи (при отсутствии контактов) важную роль играет возможность получения решения, соответствующего члену $a_{ija1}(y) u_{\alpha,1x}^{(0)}(x_1)$ в (4.2), и решения однородной задачи в явном виде [3]. В данном случае указанные решения также полезно выделить, но иным способом. Применяв метод из [9], представим решение (4.1), (4.2) как

$$(4.3) \quad u^{(1)} = U^{(1)} - y_\alpha u_{\alpha,1x}^{(0)}(x_1) e_1 - y_\alpha s_\alpha \varphi(x_1) e_\alpha + V(x_1),$$

где $\bar{\alpha} = \begin{cases} 3 & \text{при } \alpha = 2, \\ 2 & \text{при } \alpha = 3; \end{cases} s_1 = 0, s_2 = i, s_3 = -i; e_i$ — базисные орты стандартной системы координат; $\varphi(x_1), V(x_1)$ — функции (вопрос об их определении — предмет дальнейшего рассмотрения), удовлетворяющие условию $\varphi(\pm 1) = V(\pm 1) = 0; U^{(1)}$ — новая неизвестная функция; остальные члены в правой части (4.3) введены по аналогии с [3]. Подстановка (4.3) в (4.1) дает

$$\int_{P_1} \sigma_{ij}^{(-4)} (U^{(1)} - v^{(1)})_{i,j} dy - \langle \sigma_{\alpha 1}^{(-4)} \rangle u_{\alpha,1x}^{(0)} - \langle \sigma_{23}^{(-4)} - \sigma_{32}^{(-4)} \rangle \varphi(x_1) \geq 0.$$

Последние два члена в этом неравенстве — нули; первый в силу (3.5), второй в силу симметрии σ_{ij} по ij (и вытекающей из нее симметрии $\sigma_{ij}^{(m)}$, $m = -4, -3, \dots$). Кроме того, подстановка (4.3) в (4.2) дает

$$(4.4) \quad \sigma_{ij}^{(-4)} = a_{ijkl}(y) U_{k,ly}^{(1)} + a_{ij11}(y) u_{1,1x}^{(0)}(x_1).$$

В результате приходим к задаче

$$(4.5) \quad \int_{P_1} [a_{ijkl}(y) U_{k,ly}^{(1)} + a_{ij11}(y) u_{1,1x}^{(0)}(x_1)] (U^{(1)} - v^{(1)})_{i,j} dy \geq 0$$

для любой $v \in \tilde{M}$.

Замечание 3. Введем функцию $W = U^{(1)} + u_{1,1x}^{(0)} y_1 e_1$, можно заметить, что (4.4) — это задача о микродеформировании ячейки периодичности (так называемой ячеечной конструкции [13—15]), соответствующем усредненном (макроскопическом) деформациям $u_{1,1x}^{(0)}$. Это замечание оказывается полезным при решении ячеечной задачи путем ее моделирования упрощенными структурами [4] или с учетом ее специфики (когда таковая имеется [10, 13—17]).

Вариационное неравенство (4.5) аналогично полученному в [6] при усреднении монолитного тела с системой периодичности распределенных трещин. Отличие состоит в том, что в [6] условие периодичности ставится по всем переменным, а свободная поверхность у ячейки периодичности отсутствует. Эти отличия несущественны для доказательства разрешимости задачи (4.5) и единственности ее решения с точностью до функций φ , V (доказывается аналогично [6]). Обозначим через $U(u_{1,1x}^{(0)})$ решение (4.5). Подставив его в (4.4) и усреднив результат, получаем определяющее соотношение

$$(4.6) \quad \langle \sigma_{11}^{(-4)} \rangle = \langle a_{ijkl}(y) U_{k,ly}(u_{1,1x}^{(0)}) + a_{ij11}(y) u_{1,1x}^{(0)} \rangle,$$

связывающее осевое усилие с осевой деформацией $u_{1,1x}^{(0)}$. Аналогично [6] устанавливается, что: 1) (4.6) является гиперупругим законом, 2) уравнение (3.3) при $i\alpha = 11$ с краевым условием $u_1^{(0)}(\pm 1) = 0$ (это условие следует из исходного краевого условия (1.1) и разложения (2.1)) имеет единственное решение $u_1^{(0)}(x_1) = 0$, откуда, в свою очередь, $U_1^{(0)}(y) = 0$ и (4.3) принимает вид

$$(4.7) \quad u^{(1)} = -y_\alpha u_{\alpha,1x}^{(0)}(x_1) e_1 - y_\alpha s_{\bar{\alpha}} \varphi(x_1) e_{\bar{\alpha}} + V(x_1).$$

Тогда $\sigma_i^{(-4)} = 0$ (см. (4.2)), в силу $M_i^{(-4)} = 0$, откуда $\langle \sigma_{i\alpha}^{(-3)} \rangle = 0$ (см. (3.3)).

Рассмотрим при том же выборе пробной функции $v = \epsilon v^{(1)}(y)$, что и выше, члены из (2.5) порядка ϵ^{-3} . Для них имеем

$$(4.8) \quad \int_{P_1} \sigma_{ij}^{(-3)} w_{i,jy}^{(1)} dy \geq 0 \quad (w^{(1)} = u^{(1)} - v^{(1)})$$

для любой $v \in \bar{M}$, где, согласно (2.6),

$$(4.9) \quad \sigma_{ij}^{(-3)} = a_{ijkl}(y) u_{k,ly}^{(2)} + a_{ijk1}(y) u_{k,1x}^{(1)}.$$

Подстановка (4.7) в (4.9) дает

$$(4.10) \quad \sigma_{ij}^{(-3)} = a_{ijkl}(y) u_{k,ly}^{(2)} + a_{ijk1}(y) V_{k,1x}(x_1) - a_{ij11}(y) y_\alpha u_{\alpha,1x}^{(0)}(x_1) + a_{ij\bar{\alpha}1}(y) y_\alpha s_{\bar{\alpha}} \varphi_{,1x}(x_1).$$

В (4.10) входят $V_{k,1x}$, из которых физический смысл имеет только $V_{1,1x}$ — осевая деформация. В линейном случае, пользуясь полученными в явном виде решениями ячеечной задачи (4.1), (4.2), удастся исключить из (4.10) содержащие $V_{\alpha,1x}$ ($\alpha = 2, 3$) члены [3]. В рассматриваемом случае поступим аналогично [9] — представим $u^{(2)}$ в виде

$$(4.11) \quad u^{(2)} = U^{(2)} - y_\alpha V_{\alpha,1x}(x_1) e_1.$$

Подставляя (4.11) в (4.8), с учетом замечания 2 находим

$$(4.12) \quad \int_{\Omega_1} \sigma_{ij}^{(-3)} (U^{(2)} - v^{(2)})_{i,jy} dy - \int_{-1}^1 \langle \sigma_{1\alpha}^{(-3)} \rangle V_{\alpha,1x} dx_1 \geq 0.$$

Последний интеграл в (4.12) равен

$$\int_{-1}^1 \langle \sigma_{1\alpha}^{(-3)} \rangle_{,1x} V_\alpha(x_1) dx_1 + \langle \sigma_{1\alpha}^{(-3)} \rangle V_\alpha(x_1) \Big|_{x_1=-1}^{x_1=1}.$$

Последнее равенство — следствие (3.2) при $m = -3$ и того, что $V_\alpha(\pm 1) = 0$. После чего с учетом периодичности функции в оставшемся интеграле в (4.12) приходим (аналогично [6]) к неравенству на ячейке периодичности

$$(4.13) \quad \int_{P_1} \sigma_{ij}^{(-3)} (U^{(2)} - v^{(2)})_{i,jy} dy \geq 0,$$

которое с учетом (4.10) и (4.11) преобразуется к виду

$$(4.14) \quad \int_{P_1} [a_{ijkl}(y) U_{k,ly}^{(2)} - a_{ij\beta 1}(y) s_{\beta} \varphi_{,1x}(x_1) - a_{ij11}(y) y_{\alpha} u_{\alpha,1x}^{(0)}(x_1) + a_{ij11}(y) V_{1,1x}(x_1)] (U^{(2)} - v^{(2)})_{i,j} dy \geq 0$$

для любых $v \in M$.

Введем обозначения: $e = V_{1,1x}(x_1)$ — осевая деформация балки, $\rho_{\alpha} = u_{\alpha,1x}^{(0)}(x_1)$ — кривизна балки (в плоскости Ox_{α}), $\psi = \varphi_{,1x}(x_1)$ — угол закручивания на единицу длины. Тогда ячеечную задачу (4.14) можно переписать как

$$(4.15) \quad \int_{P_1} [a_{ijkl} U_{k,ly}^{(2)} - a_{ij\beta 1}(y) s_{\beta} \psi - a_{ij11}(y) y_{\alpha} \rho_{\alpha} + a_{ij11}(y) e] (U^{(2)} - v^{(2)})_{i,j} dy \geq 0$$

для любых $v \in M$.

В отличие от линейного случая [3, 17], полученная задача не распадается на ячейечные задачи, соответствующие осевому растяжению, изгибам и кручению.

Обозначим через $U^{(2)}(\psi, \rho_{\alpha}, e)$ решение (4.15). Из (4.8), (4.9) следует

$$(4.16) \quad \sigma_{ij}^{(-3)} = a_{ijkl}(y) U_{k,ly}^{(2)}(\psi, \rho_{\alpha}, e) - a_{ij\beta 1}(y) s_{\beta} \psi - a_{ij11}(y) y_{\alpha} \rho_{\alpha} + a_{ij11}(y) e.$$

Усредняя (4.16) по ячейке периодичности, умножив на y_{β} и опять усредняя, получим определяющие соотношения рассматриваемой структуры уже как однородного одномерного тела:

$$(4.17) \quad \begin{aligned} \langle \sigma_{11}^{(-3)} \rangle &= \langle a_{11kl} U_{k,ly}^{(2)}(\psi, \rho_{\alpha}, e) \rangle - \langle a_{11\beta 1}(y) \rangle s_{\beta} \psi - \\ &\quad - \langle a_{1111}(y) y_{\alpha} \rangle \rho_{\alpha} + \langle a_{1111}(y) \rangle e, \\ M_{\beta 1}^{(-3)} &= \langle y_{\beta} a_{11kl} U_{k,ly}^{(2)}(\psi, \rho_{\alpha}, e) \rangle - \langle y_{\beta} a_{11\gamma 1}(y) \rangle s_{\gamma} \psi - \\ &\quad - \langle y_{\beta} a_{1111}(y) y_{\alpha} \rangle \rho_{\alpha} + \langle y_{\beta} a_{1111}(y) \rangle e. \end{aligned}$$

5. Краевые условия. Нелинейность задачи не сказывается в крайевых условиях (1.1) и разложении (2.1), в связи с этим для одномерной задачи крайевые условия получаются так же, как в [3], и имеют вид

$$(5.1) \quad V_1(\pm 1) = 0, \quad u_{\alpha}^{(0)}(\pm 1) = u_{\alpha,1x}^{(0)}(\pm 1) = 0, \quad \psi(\pm 1) = 0.$$

6. Замкнутая система уравнений для одномерной задачи. Как отмечалось выше, часть уравнений (3.3), (3.5) оказалась удовлетворена тождественно. Приведем оставшиеся:

$$(6.1) \quad M_{\alpha i, 1x}^{(-3)} + \langle \sigma_{i\alpha}^{(-2)} \rangle = \langle g_i y_{\alpha} \rangle_{\gamma} + \langle f_i y_{\alpha} \rangle;$$

$$(6.2) \quad \langle \sigma_{i1}^{(-2)} \rangle_{,1x} = \langle g_i \rangle_{\gamma} + \langle f_i \rangle.$$

Дифференцирование (6.1) при $\alpha i = \alpha 1$ позволяет, используя (6.2), исключить $\langle \sigma_{1\alpha}^{(-2)} \rangle$ из этого уравнения при $i = 1$:

$$(6.3) \quad M_{\alpha 1, 1x}^{(-3)} = - \langle g_{\alpha} \rangle_{\gamma} - \langle f_{\alpha} \rangle + \langle g_1 y_{\alpha} \rangle_{\gamma, 1x} + \langle f_1 y_{\alpha} \rangle_{,1x}.$$

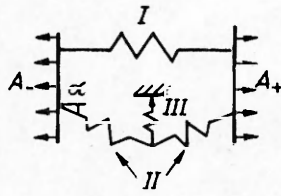
Как видно, $\langle \sigma_{1\alpha}^{(-2)} \rangle$ имеет смысл перерезывающих сил [7]. При $i \neq 1$ получаем уравнения кручения. Для этого введем момент при кручении $M = M_{23}^{(-3)} - M_{32}^{(-3)}$ [3]. Для него из (6.1) с учетом симметрии $\sigma_{mn}^{(-2)}$ по mn имеем уравнение

$$(6.4) \quad M_{,1x}^{(-3)} = \langle g_2 y_3 \rangle_{\gamma} - \langle g_3 y_2 \rangle_{\gamma} + \langle f_2 y_3 \rangle - \langle f_3 y_2 \rangle.$$

Уравнения (6.3), (6.4) с определяющими соотношениями (4.17) и крайевыми условиями (5.1) образуют замкнутую систему. Спецификой полученной задачи по сравнению с обычными теориями балок являются нелинейные определяющие соотношения (4.17).

7. Моделирование ячейечной задачи конечномерными задачами. Ячеечная задача (4.14) может быть рассмотрена относительно перемещений

$$U = y_{\beta} s_{\beta} e_{\beta} \psi - w^{\alpha} \rho_{\alpha} + y_1 e_1 e,$$



Р и с. 3

где w^α — перемещения, определяемые условием $(\text{def } w^\alpha)_{kl} = y_\alpha \delta_{k1} \delta_{l1}$. Поскольку деформации $y_\alpha \delta_{k1} \delta_{l1}$ удовлетворяют условию совместности [7], перемещения w^α существуют (и определяются в явном виде [7]). Это замечание полезно при введении упрощенных моделей ячеечной задачи. В качестве примера приведем упрощенную модель оплетенного жгута волокон (см. рис. 2) при работе на растяжение. Модель представлена на рис. 3, где I — семь упругих элементов, соответствующих прямолинейным внутренним (оплетенным) волокнам, II — упругий элемент, отвечающий оплетке, III — контакт оплетки — волокно. Жесткость «включенного» контакта определяется (см. рис. 2) аналогично жесткости «постели» для балок на упругом основании [7]. На рис. 2 оплетка имеет в пределах ячейки периодичности шесть контактных точек. Исходя из того, что контактируют несоосные цилиндры, можно определить жесткость контакта. Заметим, что на A_- и A_+ ставится условие, что их взаимное смещение равно e . В приведенной схеме пренебрегалось изгибом ячейки периодичности, который может быть отличен от нуля (в силу несимметричности ячейки периодичности).

8. Динамическая задача. Эта задача возникает при учете сил инерции (чему соответствует замена $\epsilon^{-2}f$ на $\epsilon^{-2}f + \epsilon^{-2}\rho u_{,\alpha\alpha}^\epsilon$ в уравнении (1.3)). При этом возникает аналог неравенства (1.3) (подробнее см. [5, 6]). Множитель ϵ^{-2} в динамическом члене связан с учетом порядка линейной плотности балки. Для решения рассматриваемой задачи можно применить аналогичное (2.1) — (2.3) формальное асимптотическое разложение. Выкладки проводятся, как и выше, интерес представляет только уравнение поперечных колебаний:

$$(8.1) \quad M_{\alpha 1, 1x}^{(-3)} = - \langle g_\alpha \rangle_\gamma - \langle f_\alpha \rangle + \langle g_{1, \nu_\alpha} \rangle_{,\nu_\alpha} + \langle f_{1, \nu_\alpha} \rangle_{,\nu_\alpha} + \langle \rho \rangle u_{\alpha, \alpha\alpha}^{(0)} + \langle \rho y_\alpha \rangle u_{\alpha, \alpha 1x}^{(0)}$$

Неклассическим в (8.1) является член, содержащий $u_{\alpha, \alpha 1x}^{(0)}$. Вместе с тем его возникновение имеет достаточно естественное объяснение с механической точки зрения. Стоящий при $u_{\alpha, \alpha 1x}^{(0)}$ множитель $\langle \rho y_\alpha \rangle$ характеризует несимметрию распределения масс по сечению стержня, которая и проявляется при динамических процессах. Для симметричных балок $\langle \rho y_\alpha \rangle = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. — М.: Наука, 1984.
2. Caillerie D. Thin elastic and periodic plates // Math. Meth. in the Appl. Sci.— 1984.— N 6.
3. Колпаков А. Г. К вычислению характеристик тонких упругих стержней периодического строения // ПММ.— 1991.— Т. 55, вып. 3.
4. Тканые конструкционные материалы.— М.: Мир, 1991.
5. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенство в механике и физике.— М.: Мир, 1980.
6. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний.— М.: Мир, 1984.
7. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела.— М.: Наука, 1979.
8. Kohn R., Vogelius M. A new model for thin plates with rapidly varying thickness // Intern. J. Solids and Struct.— 1984.— V. 20, N 4.
9. Колпаков А. Г. Тонкие упругие пластинки периодического строения с односторонними контактами // ПМТФ.— 1991.— № 5.
10. Kolpakov A. G. On dependence of velocity of elastic waves in composite media on initial stresses // 2nd World Congr. on Comput. Mech., Stuttgart, 1990: Extended Abstr. Lect.
11. Kolpakov A. G., Kolpakova I. G. Convex combinations problem and its application for design of laminated composite materials // IMACS 91; 13th World Congr. on Comput. and Appl. Math., Dublin, Ireland, 1991.— V. 4.
12. Козлова М. В., Панасенко Г. П. Осреднение трехмерной задачи теории упругости в неоднородном стержне // ЖВММФ.— 1991.— Т. 30, № 10.
13. Колпаков А. Г. К определению усредненных характеристик упругих каркасов // ПММ.— 1985.— Т. 49, вып. 49.
14. Колпаков А. Г. Усредненные характеристики термоупругих каркасов // Изв. АН СССР. МТТ.— 1987.— № 6.

15. Annin B. D., Kalamkarov A. L., Kolpakov A. G. Analysis of local stresses in high modulus fiber composites // Localized Damage Computer — Aided Assessment and Control.— Southampton, 1990.— V. 2.
16. Каламкарров А. Л., Колпаков А. Г., Партон В. З. К расчету высокомодульных перекрестно-армированных оболочек // Механика композит. материалов.— 1989.— № 1.
17. Аннин Б. Д., Каламкарров А. Л., Колпаков А. Г., Партон В. З. Расчет и проектирование композиционных материалов и элементов конструкций.— Новосибирск: Наука, 1993.

г. Новосибирск

Поступила 25/XI 1992 г.,
в окончательном варианте — 9/II 1993 г.

УДК 624.539.4

А. Г. Иванов, В. А. Рыжанский

ЗАПАСЫ ПРОЧНОСТИ И НАДЕЖНОСТЬ КРУПНОГАБАРИТНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

В современной практике эксплуатационные характеристики прочности крупногабаритного сооружения, в том числе и запасы прочности (ЗП), определяются расчетным путем на стадии проектирования [1, 2] и проверяются в опытах на моделях. Однако перенос на натуру результатов расчетов или модельных опытов без учета масштабного фактора может, как известно [3—5], привести к дефициту фактических ЗП натурального объекта по сравнению с проектными. Последствия такого просчета могут быть весьма тяжелыми. Покажем это на примерах.

В [6] предложена оригинальная конструкция шарового сосуда высокого давления (до 50 МПа) емкостью несколько тысяч кубических метров. Сосуд имеет многослойную оболочку, где каждый слой состоит из состыкованных листовых элементов. Только в наружном и внутреннем слоях стыки элементов сварены для герметизации сосуда в целом, а прочность его обеспечивается за счет трения между слоями. Известно, что использование многослойных или рулонированных труб на отдельных участках магистральных трубопроводов позволяет остановить распространяющуюся трещину и снизить тяжесть аварии. Поэтому с точки зрения предотвращения хрупкого разрушения многослойная конструкция сосуда более прогрессивна, чем однослойная, что подтверждается и результатами опытов по интенсивному импульсному нагружению сосудов [7].

Каков же исход внезапного разрушения сосуда [6], если это все-таки произойдет? Как нетрудно оценить, при емкости, например, 5000 м³ и наличии двухатомного газа под давлением 50 МПа хрупкое разрушение сосуда эквивалентно взрыву 150 т тротила (ТНТ), т. е. будет подлинной катастрофой. Тяжесть последствий такого инцидента и проблема экспериментального определения фактического ЗП полномасштабного сосуда [6] обуславливают необходимость тщательного обоснования надежности его конструкции.

Рассмотрим, как обоснована прочность сосуда в [6]. Здесь в качестве примера рассчитан вариант сосуда на рабочее давление $P = 20$ МПа, оболочка сосуда с внутренним радиусом $R_0 = 5$ м имеет $n = 40$ слоев из стали с пределом текучести $\sigma_T = 350$ МПа. Толщина внутреннего t_1 и наружного t_2 сварных слоев равна 32 мм, а каждого из промежуточных слоев $t = 5$ мм. По расчетам авторов [6], данная оболочка с общей толщиной $\delta = 254$ мм равнопрочна с монолитной при ЗП по σ_T , равном 1,5. Отметим, что хрупкое разрушение данного сосуда эквивалентно взрыву 6 т ТНТ*.

* Наиболее крупные авиабомбы времен Второй мировой войны содержали 1 т ТНТ.