УДК 532.5

СПОНТАННОЕ ВОЗНИКНОВЕНИЕ ВРАЩЕНИЯ В ТОЧНОМ РЕШЕНИИ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ТЕЧЕНИЯ МЕЖДУ ДВУМЯ НЕПОДВИЖНЫМИ НЕПРОНИЦАЕМЫМИ ДИСКАМИ

Н. И. Яворский

Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия
Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия
E-mail: nick@itp.nsc.ru

Рассматривается магнитогидродинамическое (МГД) течение вязкой электропроводящей несжимаемой жидкости между двумя неподвижными непроницаемыми дисками. На верхнем диске задан вектор однородной плотности электрического тока, направленный по нормали к поверхности, нижний диск является непроводящим. Исследуется принадлежащее к классу течений Кармана точное решение полной системы МГД-уравнений, в котором осевая скорость и магнитное поле зависят только от осевой координаты. Задача содержит два безразмерных параметра: величину плотности электрического тока на верхней пластине Y и число Бэтчелора (магнитное число Прандтля). Предполагается, что внешний источник, создающий осевое магнитное поле, отсутствует. Получено решение для числа Бэтчелора, изменяющегося в диапазоне $0 \div 2$. Течение жидкости создается электрическим током. Показано, что при малых значениях Y вектор скорости жидкости имеет только осевую и радиальную компоненты. С увеличением Y интенсивность движения увеличивается, и при критическом значении Y происходит бифуркация нового устойчивого режима течения с вращением жидкости, при этом течение без вращения теряет устойчивость. Особенностью полученного нового точного решения является отсутствие осевого магнитного поля, необходимого для появления азимутальной компоненты пондеромоторной силы, как это имеет место в МГД-динамо. Обнаружен новый механизм бифуркации вращения в МГД-течении.

Ключевые слова: магнитогидродинамическое течение, вязкая несжимаемая жидкость, бифуркация вращения, класс Кармана.

DOI: 10.15372/PMTF20170507

Введение. Начало исследованию решений задач о магнитогидродинамическом (МГД) течении вязкой несжимаемой проводящей жидкости с полем скорости из класса Кармана положено в работе [1], в которой впервые рассматривалось взаимовлияние магнитного поля и течения, обусловленное вращением диска. В работе [1] получено асимптотическое решение для случая течения вдали от диска. Аналогичные задачи для МГД-течения между двумя бесконечными дисками решались в основном в приближении малых магнитных чисел Рейнольдса, когда течение не оказывает влияния на магнитное поле [2–4]. В работе [5] исследовалось течение с учетом влияния магнитного поля на профиль скорости при малых числах Рейнольдса. В настоящей работе не используются указанные приближения, что позволило построить новый класс точных решений магнитной гидродинамики и обнаружить нетривиальный эффект спонтанного возникновения вращения при точном решении полных МГД-уравнений для течения с неподвижными непроницаемыми границами в отсутствие внешнего осевого магнитного поля.

Постановка задачи. Рассматриваются точные решения уравнений магнитной гидродинамики несжимаемой вязкой проводящей электрический ток жидкости:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v},\nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla\Big(p + \frac{\boldsymbol{H}^2}{8\pi}\Big) + \frac{1}{4\pi\rho}(\boldsymbol{H},\nabla)\boldsymbol{H} + \nu\,\Delta\boldsymbol{v},$$
$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0,$$
$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} + (\boldsymbol{v},\nabla)\boldsymbol{H} = (\boldsymbol{H},\nabla)\boldsymbol{v} + \nu_m\,\Delta\boldsymbol{H}, \tag{1}$$
$$\operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0,$$
$$\boldsymbol{j} = \frac{c}{4\pi}\operatorname{rot}\boldsymbol{H}, \qquad \nu_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma}.$$

Здесь $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{j}$ — векторы скорости, напряженности магнитного поля и плотности электрического тока; p — давление; ρ — плотность; c — скорость света; σ — электропроводность; ν — кинематическая вязкость; ν_m — магнитная вязкость.

Исследуется стационарное осесимметричное решение системы уравнений (1), в случае когда поля скорости, давления и магнитное поле соответствуют течениям класса Кармана [1]:

$$V_r(r,\theta,z) = -rv'(z)/2, \qquad V_\theta(r,\theta,z) = r\omega(z), \qquad V_z(r,\theta,z) = v(z),$$
$$p(r,\theta,z) = \rho(r^2F_2(z) + F(z)), \tag{2}$$
$$H_r(r,\theta,z) = -rh'(z)\sqrt{\pi\rho}\,, \qquad H_\theta(r,\theta,z) = rj(z)\sqrt{4\pi\rho}\,, \qquad H_z(r,\theta,z) = h(z)\sqrt{4\pi\rho}\,.$$

Здесь r, θ, z — цилиндрические координаты; V_r, V_θ, V_z — компоненты вектора скорости; H_r, H_θ, H_z — компоненты вектора напряженности магнитного поля; $v(z)$, $\omega(z)$, $j(z)$, $h(z)$ — искомые функции осевой координаты z. Решение задачи в виде (2) согласуется с постановкой задачи об осесимметричном течении вязкой несжимаемой проводящей жидкости между двумя дисками, которые могут вращаться вокруг одной оси и на поверхности которых могут быть заданы однородный вдув или отсос, нормальная компонента однородной плотности электрического тока и магнитного поля.

Исключая давление, получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$-4j(z)j'(z) + 4\omega(z)\omega'(z) - h(z)h^{(3)}(z) + v(z)v^{(3)}(z) - \nu v^{(4)}(z) = 0,$$
$$j(z)h'(z) - h(z)j'(z) - \omega(z)v'(z) + v(z)\omega'(z) - \nu\omega''(z) = 0, \tag{3}$$
$$v(z)j'(z) - h(z)\omega'(z) - \nu_m j''(z) = 0, \qquad v(z)h'(z) - h(z)v'(z) - \nu_m h''(z) = 0.$$

Аналогичная система уравнений впервые получена в [1] для задачи об МГД-течении над вращающимся непроницаемым диском.

Граничные условия для поля скорости рассматриваемой задачи следуют из условия, что нижний диск является непроницаемым и покоится, а через верхний пористый диск может осуществляться равномерный вдув или отсос и он может вращаться с постоянной угловой скоростью. Поле скорости удовлетворяет условию прилипания на обоих дисках. Такие граничные условия использованы для задачи о течении непроводящей вязкой несжимаемой жидкости в работе [6], результаты которой положены в основу настоящей работы.

Также предполагается, что нижний диск не проводит электрический ток, а на верхнем задана нормальная компонента однородной плотности электрического тока. На обоих дисках можно задать нормальные компоненты однородного магнитного поля. Предполагается, что нижний диск расположен в плоскости $z = 0$, а верхний диск — в плоскости $z = H$ на расстоянии H от него. Для искомых величин имеем соотношения

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = 0, \quad v(H) = V, \quad v'(H) = 0, \quad \omega(0) = 0, \quad \omega(H) = \Omega,$$
$$j(0) = 0, \qquad j(H) = J, \qquad J = \sqrt{\pi/(\rho c^2)}\, j_z\Big|_{z=H}, \tag{4}$$
$$h(0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\rho}}\, H_z\Big|_{z=0}, \qquad h(H) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\rho}}\, H_z\Big|_{z=H},$$

где V — скорость отсоса; Ω — угловая скорость вращения верхнего диска; J — величина, пропорциональная заданной плотности электрического тока; $h(0)$, $h(H)$ — величины, пропорциональные заданным нормальным компонентам напряженности магнитного поля на нижнем и верхнем дисках соответственно. Возможна более общая постановка задачи, когда оба диска являются проницаемыми, проводящими и вращаются с разными угловыми скоростями. В этом случае к общему числу параметров задачи добавляются три дополнительных параметра, соответствующие нижнему диску (ненулевые скорости вдува и вращения, плотность электрического тока). Поскольку исследование такой многопараметрической задачи является трудоемким, в настоящей работе рассматривается лишь задача с ненулевым значением плотности электрического тока на верхнем диске, остальные параметры в граничных условиях (4) полагаются равными нулю.

Невязкое течение. Рассмотрим некоторые свойства невязкого течения, поскольку в этом пределе в отсутствие магнитного поля задача имеет ряд нетривиальных особенностей [6]. Эти особенности проявляются при $V \neq 0$, $\Omega \neq 0$. В чисто гидродинамической задаче необходимо задать движение на границе области течения. Исследуем решение МГД-задачи в аналогичной постановке.

В невязком пределе уравнения (3) преобразуются в систему

$$-4j(z)j'(z) + 4\omega(z)\omega'(z) - h(z)h^{(3)}(z) + v(z)v^{(3)}(z) = 0,$$
$$j(z)h'(z) - h(z)j'(z) - \omega(z)v'(z) + v(z)\omega'(z) = 0, \tag{5}$$
$$v(z)j'(z) - h(z)\omega'(z) = 0, \qquad v(z)h'(z) - h(z)v'(z) = 0.$$

Первое уравнение один раз проинтегрируем:

$$-2j(z)^2 + 2\omega(z)^2 + h'(z)^2/2 - v'(z)^2/2 - h(z)h''(z) + v(z)v''(z) = C = \mathrm{const}\,.$$

Граничные условия для невязкой задачи задаются только для нормальных компонент векторов $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{j}$:

$$v(0) = 0, \quad v(H) = V, \qquad j(0) = 0, \quad j(H) = J,$$
$$h(0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\rho}}\, H_z\Big|_{z=0}, \qquad h(H) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\rho}}\, H_z\Big|_{z=H}.$$

Нетрудно показать, что нетривиальное решение последних двух уравнений (5) имеет вид

$$h(z) = Bv(z), \qquad j(z) = B\omega(z), \qquad B = \mathrm{const}\,.$$

При $B \neq \pm 1$ находим аналитическое решение задачи

$$\omega(z) = kv(z), \qquad v(z) = V\,\frac{\sin(2kz)}{\sin(2kH)} + V_1\,\frac{\sin(k(H-z))\sin(kz)}{\cos(kH)}, \qquad k = \mathrm{const}, \tag{6}$$

где $kH = \Omega H/V$ — параметр крутки; V_1 — произвольная постоянная, имеющая размерность скорости,

$$C = 2k^2(1 - B^2)\Big(\frac{V - V_1 \sin^2(kH)}{\sin(2kH)}\Big)^2.$$

При $B = \pm 1$ решением являются любые дифференцируемые функции $\omega(z)$, $v(z)$, удовлетворяющие граничным условиям.

Следует отметить, что в работе [6] были получены точные решения полной вязкой задачи, которые обладают необычными для классической гидродинамики свойствами. Так, в пределе исчезающе малой вязкости эти решения стремятся к устойчивым невязким решениям с разрывом нормальной компоненты скорости, т. е. непроницаемые диски становятся проницаемыми. Также в этом пределе появляется бесконечное множество решений, в которых параметр k становится дискретным (квантование в классической гидродинамике). В МГД-задаче данными свойствами обладает также магнитное поле. Вид указанных решений отличается от (6). Нетрудно показать, что уравнения (5) удовлетворяются в случае

$$v(z) \equiv \text{const}, \qquad \omega(z) \equiv \text{const}, \qquad j(z) \equiv \text{const}, \qquad h(z) \equiv \text{const}\,. \tag{7}$$

Решения вида (7) получаются в предельном случае вязкости, стремящейся к нулю. Очевидно, что решения (7) не согласуются с заданными граничными условиями, которые “стираются” вследствие возникновения на поверхности диска бесконечно тонких пограничных слоев с ненулевым конечным расходом жидкости [6], существенно отличающихся от классического пограничного слоя Прандтля.

Ползущее течение. Рассмотрим ползущее течение, полагая $\nu \to \infty$, $\nu_m \to \infty$. В уравнениях (1) пренебрегаем конвективными слагаемыми, содержащими компоненты скорости. Уравнения (3) преобразуются к виду

$$\nu v^{(4)}(z) + 4j(z)j'(z) + h(z)h^{(3)}(z) = 0, \qquad \nu\omega''(z) - j(z)h'(z) + h(z)j'(z) = 0,$$
$$\nu_m j''(z) = 0, \qquad \nu_m h''(z) = 0.$$

Граничные условия зададим в виде

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = 0, \quad v(H) = V, \quad v'(H) = 0, \quad \omega(0) = 0, \quad \omega(H) = \Omega,$$
$$j(0) = 0, \quad j(H) = J, \quad h(0) = h_0, \quad h(H) = h_1.$$

В случае ползущего течения решение единственно и имеет вид

$$\begin{gathered} v(z) = V\Big(3 - 2\,\frac{z}{H}\Big)\frac{z^2}{H^2} - \frac{J^2 H}{30\nu}\Big(1 - \frac{z}{H}\Big)^2\Big(2 + \frac{z}{H}\Big)z^2, \\ \omega(z) = \frac{z}{H}\,\Omega + \frac{h_0 J}{2\nu}\Big(1 - \frac{z}{H}\Big)z, \qquad j(z) = \frac{z}{H}\,J, \qquad h(z) = h_0 + (h_1 - h_0)\,\frac{z}{H}. \end{gathered} \tag{8}$$

Из выражения для азимутальной скорости (2) с учетом (8) следует, что при наличии осевого магнитного поля h_0 и осевого тока J возникает пондеромоторная сила, вращающая поток жидкости. Под влиянием этой силы возникает вращательное движение, которое соответствует течению между двумя покоящимися дисками независимо от поставленных граничных условий.

Общий случай течения. Введем безразмерные полевые величины

$$z \to \frac{z}{H}, \quad v(z) \to \frac{v(z)H}{\nu}, \quad \omega(z) \to \frac{\omega(z)H^2}{\nu}, \quad j(z) \to \frac{j(z)H^2}{\nu}, \quad h(z) \to \frac{h(z)H}{\nu}$$

и следующие критерии подобия: $\mathrm{Re} = VH/\nu$ — число Рейнольдса, $\mathrm{Re}_s = \Omega H^2/\nu$ — число Рейнольдса вращения, $\mathrm{Bt} = \nu/\nu_m$ — число Бэтчелора (магнитное число Прандтля),

$\mathrm{Re}_m = VH/\nu_m = \mathrm{Re}\,\mathrm{Bt}$ — магнитное число Рейнольдса, $K = \Omega H/V = \mathrm{Re}_s/\mathrm{Re}$ — число крутки, $\mathrm{Al} = H_0^2/(\rho V^2)$ — число Альфвена, $Y = JH^2/\nu$ — число Y (безразмерная плотность электрического тока), $\mathrm{Ha} = \sqrt{\mathrm{Al}\,\mathrm{Bt}}\,\mathrm{Re}$ — число Гартмана, $\mathrm{Ni} = \sqrt{\mathrm{Al}}\,\mathrm{Re}$ — число Ni (безразмерная величина нормальной компоненты магнитного поля на поверхностях дисков):

$$h_0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi\rho}}\,H_z\Big|_{z=0}\frac{H}{\nu} = \mathrm{Ni}_0, \qquad h_1 = \frac{1}{\sqrt{4\pi\rho}}\,H_z\Big|_{z=H}\frac{H}{\nu} = \mathrm{Ni}_1.$$

Среди указанных критериев независимыми являются только пять. Выберем в качестве параметров задачи Re, Re_s, Bt, Y, Ni. Процедура обезразмеривания выбирается таким образом, что безразмерные параметры задачи входят только в граничные условия, лишь число Бэтчелора остается параметром в уравнениях. Уравнения для безразмерных полевых величин принимают вид

$$\begin{gathered}-4j(z)j'(z) + 4\omega(z)\omega'(z) - h(z)h^{(3)}(z) + v(z)v^{(3)}(z) - v^{(4)}(z) = 0,\\ j(z)h'(z) - h(z)j'(z) - \omega(z)v'(z) + v(z)\omega'(z) - \omega''(z) = 0,\\ \mathrm{Bt}\,(v(z)j'(z) - h(z)\omega'(z)) - j''(z) = 0, \qquad \mathrm{Bt}\,(v(z)h'(z) - h(z)v'(z)) - h''(z) = 0.\end{gathered} \tag{9}$$

Проинтегрировав первое уравнение (9), получаем

$$-2j(z)^2 + 2\omega(z)^2 + h'(z)^2/2 - v'(z)^2/2 - h(z)h''(z) + v(z)v''(z) - v^{(3)}(z) = C.$$

Граничные условия для этих безразмерных полевых величин имеют вид

$$\begin{gathered}v(0) = 0, \quad v'(0) = 0, \quad v(1) = \mathrm{Re}, \quad v'(1) = 0, \quad j(0) = 0, \quad j(1) = Y,\\ h(0) = \mathrm{Ni}_0, \quad h(1) = \mathrm{Ni}_1, \quad \omega(0) = 0, \quad \omega(1) = \mathrm{Re}_s\,.\end{gathered}$$

Течение в отсутствие осевого магнитного поля. Бифуркация вращения. Рассмотрим течение между двумя неподвижными непроницаемыми дисками с заданной плотностью нормальной компоненты электрического тока Y. Представляет интерес изучить задачу в отсутствие заданного осевого магнитного поля. В этом случае внешние факторы, которые должны вызвать вращение жидкости, отсутствуют: $\mathrm{Ni}_0 = \mathrm{Ni}_1 = 0$. Исследуем возникновение новых режимов течения. При малых значениях Y имеем единственное решение, соответствующее решению (1) при нулевой скорости отсоса ($V = 0$) на покоящемся диске ($\Omega = 0$). В работе [6] в случае, когда на верхнем диске задавалась определенная скорость отсоса, обнаружена бифуркация нового режима течения с вращением. При наличии магнитного поля критическая скорость отсоса будет изменяться. Если при увеличении плотности электрического тока эта скорость уменьшается, то, возможно, при определенном критическом значении плотности тока бифуркация вращения произойдет при нулевой скорости отсоса. В результате проведенного численного исследования установлено, что такое критическое значение плотности тока существует. На рис. 1 показано, что при нулевой скорости отсоса имеет место вилочная бифуркация вращательного режима течения. (По оси ординат отложена величина безразмерного трения вращения.) На рис. 1 видно, что бифуркация является прямой. Согласно теории бифуркаций возникающее течение является устойчивым, а предшествующее течение теряет устойчивость. Таким образом, возникает устойчивое вращательное движение, а режим без вращения становится неустойчивым. Это можно проверить, решив задачу устойчивости относительно возмущений, принадлежащих к классу Кармана [6]. Полученные результаты свидетельствуют о возможности спонтанного возникновения вращения покоящейся электропроводящей жидкости под влиянием электрического тока в отсутствие внешнего осевого магнитного поля.

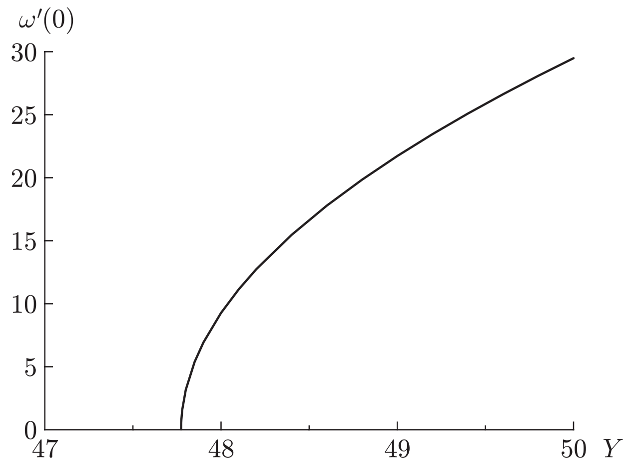

Рис. 1. Бифуркация вращения при увеличении безразмерной величины нормальной компоненты плотности электрического тока Y на верхнем диске

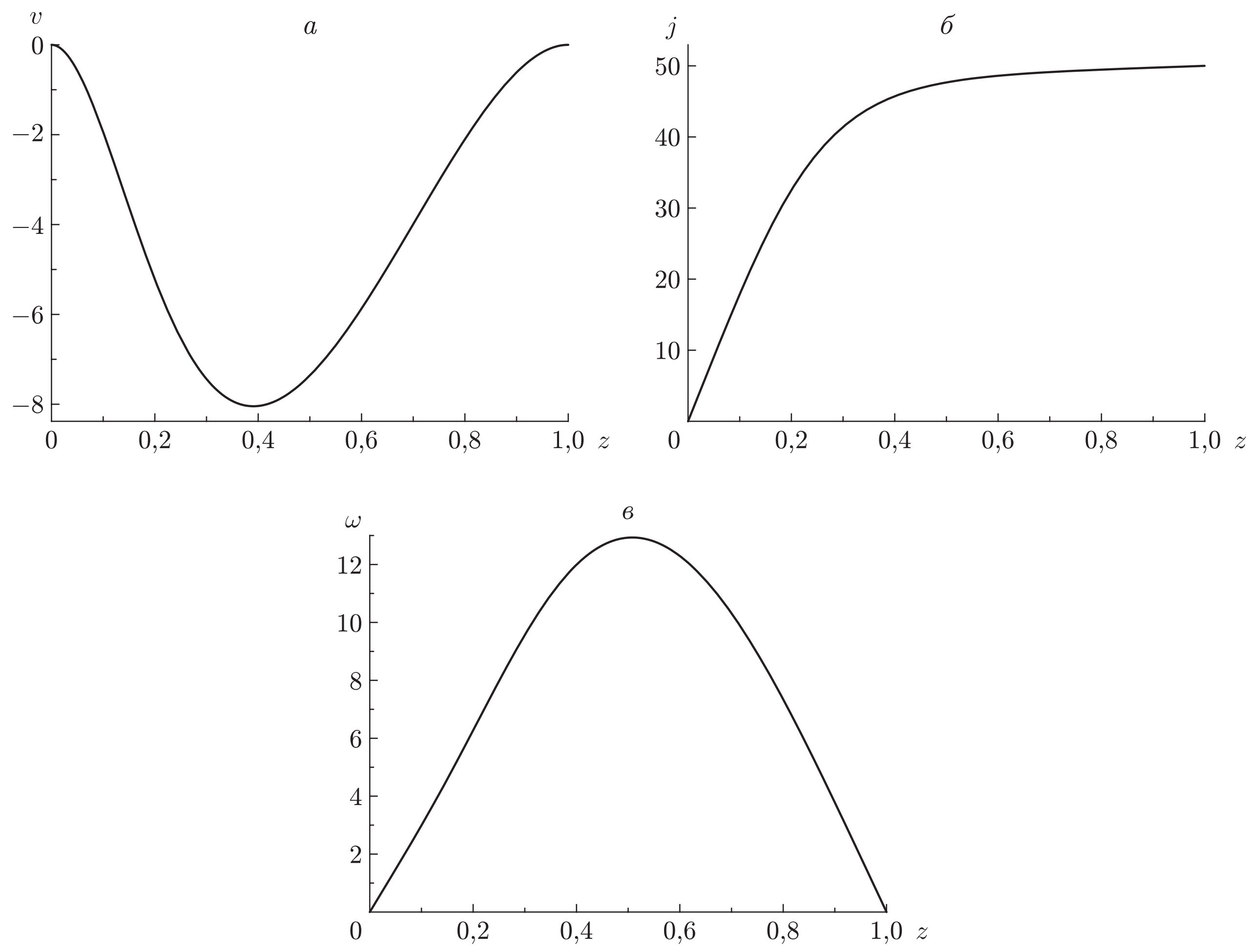

Рис. 2. Профили осевой скорости (a), плотности электрического тока ($б$) и азимутальной скорости ($в$)

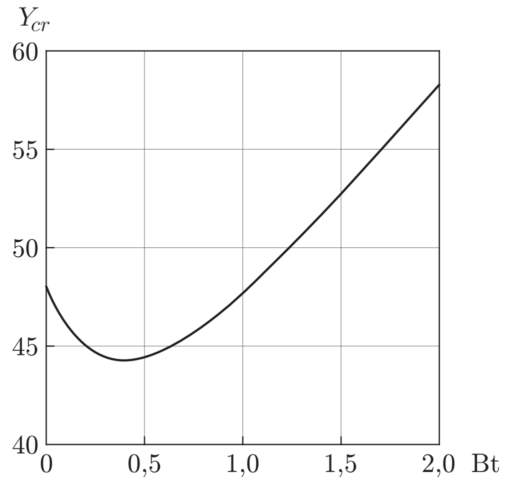

Рис. 3. Зависимость критической плотности электрического тока, при которой происходит бифуркация вращения, от числа Бэтчелора

На рис. 2 приведены профили скорости, плотности электрического тока и азимутальной скорости для нового течения с вращением при $Y = 50$, $\mathrm{Bt} = 1$. Видно, что производные в граничных точках равны нулю, следовательно, радиальная компонента скорости также равна нулю.

В рассматриваемой задаче имеется только два параметра: число Бэтчелора Bt (магнитное число Прандтля), характеризующее свойства среды, и параметр Y, являющийся безразмерной плотностью электрического тока, определяющего движение жидкости и его интенсивность. На рис. 3 приведена зависимость критической плотности электрического тока, при которой происходит бифуркация вращения, от числа Бэтчелора. Укажем некоторые критические значения плотности тока: $Y_{cr} = 48{,}1$ при $\mathrm{Bt} = 0$, $Y_{cr} = 44{,}5$ при $\mathrm{Bt} = 0{,}5$, $Y_{cr} = 58{,}4$ при $\mathrm{Bt} = 2$.

Заключение. Согласно данным, приведенным на рис. 3, бифуркация вращения имеет место при всех исследованных значениях числа Бэтчелора вплоть до $\mathrm{Bt} = 0$ ($Y_{cr} = 48{,}1$), что соответствует случаю, когда магнитное число Рейнольдса при любом способе его определения ($\nu_m \to \infty$) равно нулю. Во всем рассмотренном диапазоне чисел Бэтчелора пондеромоторная магнитная сила является источником движения и приводит к бифуркации вращения, в том числе в случае жидких металлов, для которых число Бэтчелора обычно очень мало. Это свидетельствует о том, что обнаруженное явление спонтанного возникновения вращения можно наблюдать экспериментально. Подавая электрический ток равномерно на плоскую крышку кюветы с электропроводящей жидкостью и диэлектрическим дном, при достижении определенной величины плотности тока можно ожидать спонтанного возникновения вращения жидкости с одинаковой вероятностью вращения как по часовой стрелке, так и против нее. Согласно рис. 3 при увеличении числа Бэтчелора от нуля критическая плотность тока сначала уменьшается до значения $Y_{cr} = 44{,}3425$ при $\mathrm{Bt} = 0{,}394$ вследствие влияния скорости движения жидкости на распределение и величину магнитного поля. Затем критическая плотность тока увеличивается и ее зависимость от числа Бэтчелора становится близкой к линейной. Соответственно область существования устойчивого вращательного движения сначала увеличивается, а затем уменьшается. Особенностью исследованной бифуркации вращения является отсутствие в течении осевого магнитного поля и азимутальной компоненты пондеромоторной силы, появление которой обычно обусловливает возникновение вращения в МГД-динамо. Таким образом, обнаружен новый тип бифуркации вращения в МГД-течении.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Сычев В. В.** О движении вязкой электропроводной жидкости под действием вращающегося диска в присутствии магнитного поля // Прикл. математика и механика. 1960. Т. 24, № 5. С. 906–908.
2. **Srivastava A. C., Sharma S. K.** The effect of a transverse magnetic field on the flow between two infinite discs — one rotating and the other at rest // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Tech. (Hydrodynamics). 1961. V. 9. P. 639–644.
3. **Stephenson C. J.** Magnetohydrodynamic flow between rotating coaxial disks // J. Fluid Mech. 1969. V. 38, pt 2. P. 335–352.
4. **Attia H. A., Aboul-Hassan A. L.** On hydromagnetic flow due to a rotating disk // Appl. Math. Modelling. 2004. V. 28. P. 1007–1014.
5. **Verma P. D., Mathur A. K.** Magnetohydrodynamic flow between two disks — one rotating and the other at rest // Indian J. Pure Appl. Math. 1974. V. 6, N 12. P. 1514–1525.
6. **Goldshtik M. A., Javorsky N. I.** On the flow between a porous rotating disk and a plane // J. Fluid Mech. 1989. V. 207. P. 1–27.

Поступила в редакцию 10/VII 2017 г.