

УДК 519.683.2

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА МОДИФИЦИРОВАННЫМ МЕТОДОМ ГОДУНОВА

В. Л. Колмогоров, О. А. Макотра*, Н. Я. Моисеев*

Институт машиноведения УрО РАН, 620219 Екатеринбург

* Всероссийский научно-исследовательский институт технической физики, 456770 Снежинск

Рассмотрена математическая модель поведения веществ в условиях развитых упруго-пластических деформаций для решения одномерных задач механики твердого тела. Модель базируется на основных законах сохранения массы, импульса и полной энергии, модели Уилкинса, кинетической модели для разрушения веществ и модифицированном методе Годунова для численного решения задач математической физики. Построена гибридная разностная схема, которая аппроксимирует на гладких течениях уравнения акустики с постоянными коэффициентами в случае плоской симметрии со вторым порядком по времени и пространству.

Ключевые слова: динамика, упругопластическое деформирование, разрушение, численное решение.

Введение. Рассматривается математическая модель поведения твердых изотропных идеально пластических материалов в условиях развитых упругопластических деформаций для решения одномерных нестационарных задач механики твердого тела модифицированным методом Годунова [1, 2]. Предполагается, что материал изотермичен, коэффициент Пуассона постоянный и массовые силы отсутствуют. Основными уравнениями модели являются уравнения законов сохранения массы, импульса и полной энергии. Эта система уравнений дополняется определяющими соотношениями для описания упругопластических свойств веществ в форме Прандтля — Рейсса при условии текучести Мизеса [3] и уравнениями для учета поврежденности и разрушения материалов.

В настоящей работе рассматриваются две модели разрушения: кинетическая модель разрушения металлов [4], разработанная в Институте машиноведения Уральского отделения РАН, базирующаяся на концепции постепенного накопления микроповреждений в металле по мере развития деформации, и модель мгновенного откола, основанная на концепции разрушения материала при достижении критического напряжения.

С целью повышения точности численных решений вводится регулируемая аппроксимационная антидиффузия для корректировки численных потоков [5], найденных методом Годунова. Модифицированная разностная схема на гладких решениях аппроксимирует уравнения акустики с постоянными коэффициентами в случае плоской симметрии со вторым порядком по времени и пространству.

Разностные уравнения движения выписаны с учетом согласованной аппроксимации [6], что совместно с разностным уравнением полной энергии обеспечивает аппроксимацию уравнения внутренней энергии. Вследствие этого отсутствует эффект перекачки части кинетической энергии во внутреннюю энергию.

Построена гибридная разностная схема для решения одномерных задач упругопластичности в переменных Лагранжа модифицированным методом Годунова.

Выполнены тестовые расчеты и проведено сравнение результатов численных расчетов с экспериментальными данными. Из представленных результатов следует, что модифицированный метод Годунова с использованием кинетической модели разрушения вещества может быть применен для решения задач ударного и высокоскоростного нагружения.

Математическая модель. Основные уравнения для решения задач с одной пространственной переменной запишем в форме уравнений законов сохранения массы, импульса и полной энергии:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial(FQ)}{\partial q} = f_2, \quad \frac{\partial r(q, t)}{\partial t} = u(q, t), \quad (1)$$

где

$$w = \begin{bmatrix} V \\ u \\ \varepsilon \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} -u \\ -\sigma_1 \\ -\sigma_1 u \end{bmatrix}; \quad f_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sigma_2 \partial Q / \partial q \\ 0 \end{bmatrix};$$

r — эйлерова координата; q — массовая лагранжева переменная; t — время; $V = 1/\rho$ — удельный объем; ρ — плотность; u — компонента вектора скорости; $\varepsilon = E + 0,5u^2$ — полная энергия; E — удельная внутренняя энергия вещества; σ_1, σ_2 — компоненты тензора главных напряжений; $Q(r) = r^\nu$ ($\nu = 0, 1, 2$ в случаях плоской, цилиндрической и сферической симметрии соответственно).

Систему уравнений (1) дополняют уравнения состояний вещества $p = p(\rho, E)$ и определяющие соотношения для девиатора тензора напряжений, записанные в форме уравнений Прандтля — Рейсса [3]

$$\frac{dS_j}{dt} - 2Ge_j + \lambda S_j = 0, \quad j = 1, 2, 3,$$

где S_j — компоненты девиатора тензора напряжений; G — модуль упругости на сдвиг; λ — скалярная диссипативная функция.

Модель идеального упругопластического тела Мизеса с постоянным пределом текучести описывается функцией

$$\lambda = \begin{cases} 0, & \text{если } I_1 < 0 \text{ или } I_1 = 0 \text{ и } D < 0, \\ 3GD/\sigma_s^2, & \text{если } I_1 > 0 \text{ или } I_1 = 0 \text{ и } D > 0. \end{cases}$$

Здесь $I_1 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$; $D = S_1 e_1 + S_2 e_2 + S_3 e_3$; e_1, e_2, e_3 — компоненты девиатора тензора скоростей деформации; σ_s — предел текучести при одноосном растяжении.

Кинетическая модель разрушения металлов базируется на концепции постепенного накопления микроповреждений в металле по мере развития деформации [4]. Условие пластического деформирования материала без разрушения записывается в виде дифференциального уравнения

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{H}{\Lambda_p},$$

где $H = 2\sqrt{|e_1 e_2 + e_3 e_1 + e_3 e_2|}$ — интенсивность скоростей деформации сдвига; $\Lambda_p(k_1, k_2, H)$ — пластичность материала; $0 \leq \Psi \leq 1$ — поврежденность; k_1, k_2 — безразмерные показатели напряженного состояния. Момент разрушения материала соответствует моменту времени, когда Ψ достигает единицы.

Простейшая модель мгновенного откола основана на концепции разрушения материала при достижении критического напряжения $\sigma \geq \sigma_{кр}$.

Разностная схема. Пусть в начальный момент времени $t = t_0$ в области построена сетка с координатами (узлами) $q_{j+1/2}, q_{j-1/2}$, с центрами в точках $q_j = 0,5(q_{j+1/2} + q_{j-1/2})$

и шагами по пространству $h_j = q_{j+1/2} - q_{j-1/2}$ ($h_j = \rho_j(R_{j+1/2}^{\nu+1} - R_{j-1/2}^{\nu+1})/(\nu + 1)$ — массовая лагранжева переменная; $R_{j+1/2}, R_{j-1/2}$ — значения эйлеровой переменной в узлах сетки). Величины $w^j = [(V, u, E, \rho, \Psi)^j]^T$ с целым верхним индексом j соответствуют точкам q_j (центрам ячеек) и вычисляются в моменты времени $t_n + \tau$ по величинам $w_j = [(V, u, E, \rho, \Psi)_j]^T$ с нижним индексом j , заданным в моменты времени t_n . Величины $F_{j\pm 1/2}^* = [(U, \Sigma_1, \Sigma_1 U)_{j\pm 1/2}^*]^T$ с полуцелым индексом являются промежуточными и соответствуют точкам $q_{j+1/2}, q_{j-1/2}$. Здесь Σ_1^* — значение первой компоненты σ_1 тензора главных напряжений; U^* — скорость; $[\dots]^T$ — транспонирование вектор-строки.

Записав уравнения (1) в виде интегральных законов сохранения, проинтегрируем их по некоторой области $S: q \in [q_{j+1/2}, q_{j-1/2}], t \in [t_n, t_n + \tau]$. Применяв к интегралам по области теорему Гаусса — Остроградского, получим разностную схему, которую запишем в векторной форме

$$w^j = w_j - \tau(F_{j+1/2}^* - F_{j-1/2}^*)/h + \tau f_2^0 V_g^0 \quad (2)$$

($f_2^0 = [0, -\sigma_2^0, 0]^T$). Величина σ_2^0 будет определена ниже. Величины $F_{j\pm 1/2}^*$ являются промежуточными и вычисляются на границе двух соседних ячеек. Способ выбора промежуточных величин определяет конкретную разностную схему. Так, в методе Годунова эти величины называются “большими” и определяются из решения задачи о распаде произвольного разрыва, возникающего на границе двух соседних ячеек. Компоненты вектора $F_{j\pm 1/2}^*$, который в методе Годунова обозначим через $F_{j\pm 1/2}$, вычисляются по формулам [7]

$$U_{j+1/2} = \frac{a_{j+1}u_j + a_j u_{j+1}}{a_{j+1} + a_j} + \frac{\sigma_{1j+1} - \sigma_{1j}}{a_{j+1} + a_j},$$

$$\Sigma_{1j+1/2} = a_{j+1}a_j \frac{u_{j+1} - u_j}{a_{j+1} + a_j} + \frac{a_{j+1}\sigma_{1j+1} + a_j\sigma_{1j}}{a_{j+1} + a_j}$$

($a_j = \rho_j c_j$ — массовая скорость звука; c_j — продольная скорость звука).

Если $u_j < 0$, то $V_{j+1/2} = V_j + (\sigma_{1j} - \Sigma_{1j+1/2})/a_j^2$, $S_{1j+1/2} = S_{1j} - 4b_j^2(1/V_{j+1/2} - 1/V_j)/3$. Если $u_j > 0$, то $V_{j+1/2} = V_{j+1} + (\sigma_{1j+1} - \Sigma_{1j+1/2})/a_{j+1}^2$, $S_{1j+1/2} = S_{1j+1} - 4b_{j+1}^2(1/V_{j+1/2} - 1/V_{j+1})/3$. Здесь b_j — поперечная скорость звука.

Система основных разностных уравнений (2) дополняется уравнениями

$$((S_i)^j - (S_i)_j)/\tau - 2G(e_i)_j^0 + \lambda_j(S_i)_j^0 = 0 \quad (i = 1, 2), \quad (S_3)_j = -(S_1 + S_2)_j.$$

Кинетическое уравнение для учета разрушения аппроксимируем разностным уравнением

$$\Psi^j = \Psi_j + \tau H(F_{j+1/2}^*, F_{j-1/2}^*)/\Lambda_{pj}.$$

Значение $\Lambda_{pj} = \Lambda_p = \Lambda_p(k_j)$ может быть получено из таблицы экспериментальных данных [4].

Антидиффузия. Одним из способов повышения точности численных решений, полученных на основе метода Годунова, является введение антидиффузии для корректировки численных потоков. Для повышения точности решений, получаемых по схеме (2), будем использовать подход, предложенный в [5]. Согласно [5] компоненты вектора $F_{j\pm 1/2}^*$ будем вычислять по формулам

$$F_{j+1/2}^* = F_{j+1/2} - \mu(\tau_{j+1/2} - 0,5\tau) \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (3)$$

Второе слагаемое в (3) по отношению к величинам $F_{j\pm 1/2}$ имеет смысл антидиффузии [5]. Параметр $0 \leq \mu \leq 1$ является ограничителем антидиффузии, и его значение выбирается в

зависимости от параметров течения, что позволяет получать квазимонотонные профили рассчитываемых величин.

В силу уравнений, полученных линеаризацией уравнений (1) для плоского случая, производная по времени $\partial f/\partial t$ заменяется производной по пространству. Производную по пространству можно аппроксимировать комбинацией разностных производных, вычисленных в момент t_n (на нижнем слое) и в момент $t_n + \tau_{j+1/2}$ по величинам $F_{j\pm 1/2}$. Если производную аппроксимировать по величинам с нижнего слоя, то получим схему с нормальной дисперсией. Если производную аппроксимировать с использованием величин $F_{j\pm 1/2}$, найденных из решения задачи о распаде разрыва, то получим новую схему с аномальной дисперсией. В первом случае осцилляции решений в окрестности сильного разрыва возникают за фронтом разрыва, во втором — перед фронтом.

Если в (3) $\mu = 0$, то $F_{j+1/2}^* = F_{j+1/2}$ и разностная схема (2) аппроксимирует на гладких решениях исходные дифференциальные уравнения в случае плоской симметрии с первым порядком по времени и пространству, не требует введения дополнительной искусственной вязкости и позволяет получать монотонные решения для широкого класса задач [5, 8].

Если в (3) $\mu = 1$, то схема (2) аппроксимирует на гладких решениях уравнения акустики с постоянными коэффициентами в случае плоской симметрии со вторым порядком по времени и пространству. Учитывая отмеченные свойства, построим гибридную разностную схему, в которой для расчета гладких течений значения параметра μ будем выбирать близкими к единице, а на сильных разрывах — близкими к нулю.

Согласованная аппроксимация. Известно, что в оригинальной схеме Годунова с уравнением движения, записанным в дивергентной форме, имеется эффект перекачки части кинетической энергии во внутреннюю энергию. В [6] показано, что этот эффект можно устранить, если вычисление давления в правой части уравнения будет согласовано с вычислением “больших” величин давления на ребрах ячейки. В этом случае давление выбирается так, чтобы разностные уравнения, которые аппроксимируют уравнения движения в дивергентной и недивергентной форме, были эквивалентными. Согласно этому подходу величины в правой части вычисляются из уравнений

$$\sigma_{1j}^0 = -p_0 + S_1^0 = 0,5(\Sigma_{1j+1/2}^* + \Sigma_{1j-1/2}^*) = -0,5(P_{j+1/2}^* + P_{j-1/2}^*) + 0,5(S_{1j+1/2}^* + S_{1j-1/2}^*).$$

Вторая компонента девиатора S_{2j}^0 находится из условия $I_1(S) = S_1^0 + S_2^0 + S_3^0 = 0$ и равна

$$S_{2j}^0 = -0,5S_{1j}^0 = -0,25(S_{1j+1/2}^* + S_{1j-1/2}^*).$$

Такой выбор величин позволяет устранить эффект перекачки части кинетической энергии во внутреннюю энергию и обеспечивает аппроксимацию уравнения внутренней энергии

$$\frac{\partial E}{\partial t} - Q\sigma_1 \frac{\partial u}{\partial q} = \sigma_1 u \frac{\partial Q}{\partial q} - u(S_1 - S_2) \frac{\partial Q}{\partial q}$$

в разностной схеме (2).

Процесс разрушения. Процесс высокоскоростного взаимодействия твердых тел сопровождается разнообразными физическими явлениями, зависящими от геометрии взаимодействующих тел, их прочностных характеристик, скорости удара и других факторов. В частности, происходит механическое разрушение материалов под действием растягивающих напряжений. Для учета разрушения в численных методах используются различные критерии разрушения. Моделирование процессов разрушения вещества в ячейке можно осуществить различными способами [9]. В работе используются две модели. В первой модели исходный материал в ячейке заменяется веществом типа порошка, который не испытывает сопротивления на сдвиг и растяжение. Давление и касательные напряжения полагаются равными нулю. Во второй образование трещины моделируется в ячейке, в

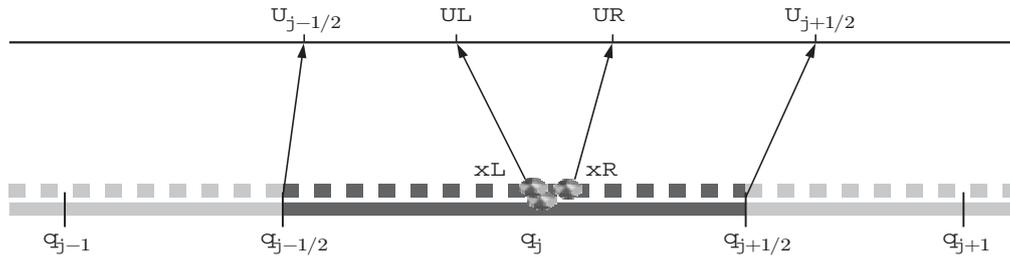


Рис. 1. Модель трещины в ячейке

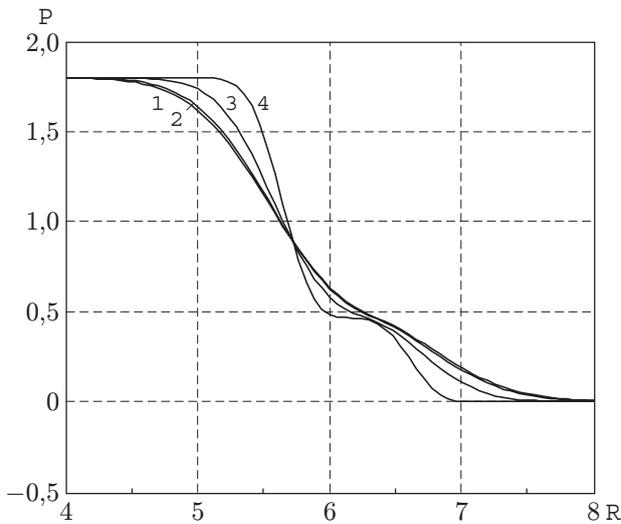


Рис. 2

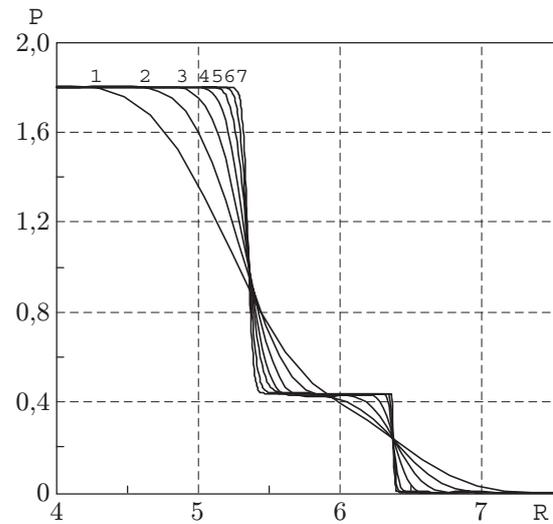


Рис. 3

Рис. 2. Распределение давления по пространственной координате:

1 — $\mu = 0$; 2 — $\mu = 0,1$; 3 — $\mu = 0,5$; 4 — $\mu = 0,9$

Рис. 3. Распределение давления в зависимости от числа точек разбиения N ($\mu = 0,9$; $C = 0,9$):

1 — $N = 62$; 2 — $N = 125$; 3 — $N = 250$; 4 — $N = 500$; 5 — $N = 1000$; 6 — $N = 2000$; 7 — $N = 4000$

которой произошло разрушение вещества, а именно: ячейка разбивается на две подячейки, у которых левые и правые границы $q_j = \{xL, xR\}$ соответствуют берегам трещины (рис. 1).

Если $xR > xL$, то трещина существует. Если $xR < xL$, то трещина закрылась. На этих границах ставится граничное условие типа свободной поверхности, и далее расчет подячеек идет обычным образом.

Результаты расчетов модельных задач. Приведем результаты численных расчетов. **ЗАДАЧА 1.** Сравнение результатов численных расчетов с аналитическим решением. Для баротропных процессов движения среды рассматривается уравнение состояния вида [10] $P = A(\rho/\rho_0 - 1)$. Приняты следующие константы материала: $A = 75$ ГПа, $\rho_0 = 2,7$ г/см³, $\nu = 0,333$, $\sigma_s = 0,3$ ГПа, $G = 26$. Граничные условия:

$$p(t)|_{R=0} = 2 \text{ ГПа}, \quad p(t)|_{R=12} = 0.$$

Результаты расчетов представлены на рис. 2, 3.

ЗАДАЧА 2. Моделирование откольного разрушения урана в условиях высокоскоростного нагружения. В расчете задана система ударник — мишень. Материал ударника и

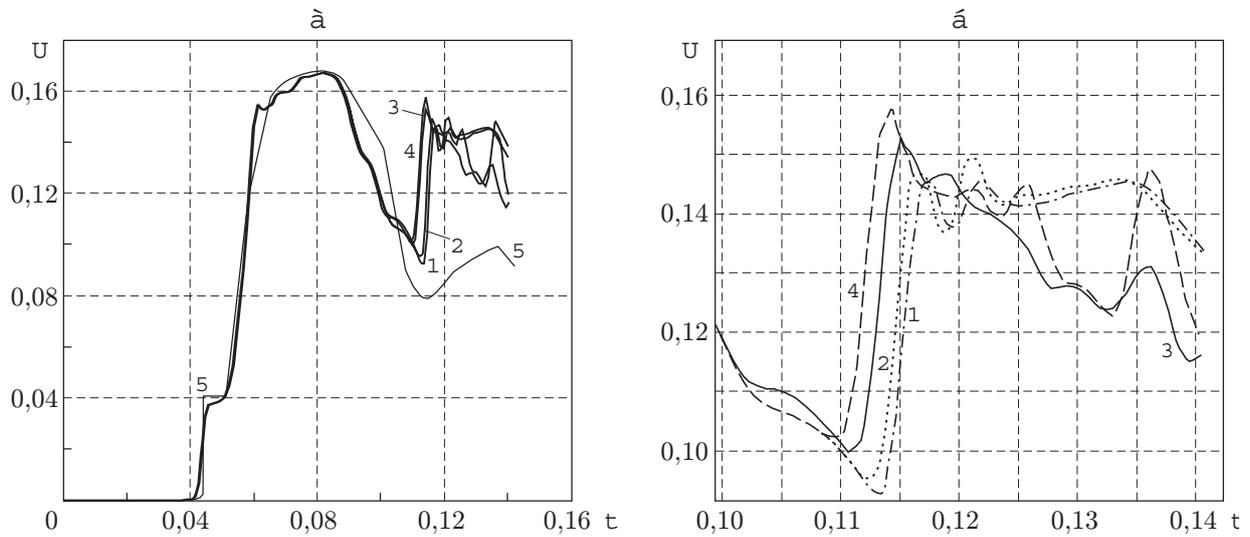


Рис. 4. Расчетные зависимости скорости свободной поверхности урана от времени:

1 — модель мгновенного откола с трещинами; 2 — модель мгновенного откола с цельной ячейкой; 3 — кинетическая модель с трещинами; 4 — кинетическая модель с цельной ячейкой; 5 — экспериментальные данные [11]

мишени — уран. Скорость ударника $w_{уд} = 0,1750$ км/с. В начальном состоянии плотность ударника $\rho = \text{const}$, $P = 0$. Мишень покоится, в начальном состоянии ее плотность $\rho = \text{const}$, $P = 0$. Толщина мишени $\Delta_m = 1,513$ мм в два раза больше толщины ударника $\Delta_{уд} = 0,768$ мм. Требуется провести численное моделирование откола в уране. Уравнения состояния выбраны в форме Ми — Грюнайзена. Константы материала следующие: $\rho_0 = 19,04$ г/см³, $\nu = 0,205$, $\sigma_s = 0,9$ ГПа, $G = 88,0$. Параметр антидиффузии $\mu = 0,9$, число Куранта $C = 0,9$. Количество точек разбиения ударника $N_{уд} = 50$, мишени $N_m = 100$. Экспериментальные данные для этой задачи взяты из [11]. Результаты расчетов представлены на рис. 4. На рис. 4,б показан в увеличенном масштабе фрагмент рис. 4,а. Видно, что скорость свободной поверхности зависит от используемой модели разрушения (рис. 4,б). На начальной стадии движения численные результаты согласуются с экспериментальными данными, а после прохождения первого минимума наблюдается различие (рис. 4,а).

Из представленных результатов решения тестовых задач следует, что численные решения, полученные по описанной выше математической модели, согласуются с аналитическими решениями и экспериментальными данными. Анализ результатов также показывает, что кинетическая модель разрушения вещества может быть использована при решении задач ударного и высокоскоростного нагружения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сб. 1959. Т. 47, № 3. С. 271–306.
2. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
3. Уилкинс М. С. Расчет упругопластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике: Пер. с англ. / Под ред. С. С. Григоряна, Ю. Д. Шмыглевского. М.: Мир, 1967. С. 212–263.
4. Колмогоров В. Л. Механика обработки металлов давлением. Екатеринбург: Изд-во Урал. гос. техн. ун-та, 2001.

5. **Моисеев Н. Я.** Антидиффузия для модифицированного метода Годунова // Тез. докл. X Юбил. Междунар. конф. “Вычислительная механика и современные прикладные программные системы”, Переславль-Залесский, 7–12 июня 1999 г. М.: МГИУ, 1999. С. 74.
6. **Моисеев Н. Я.** Согласованная аппроксимация в разностных схемах типа С. К. Годунова для решения одномерных задач газовой динамики // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1996. Т. 36. С. 149.
7. **Демидов В. Н., Корнеев А. И.** Численный метод расчета упругопластических течений с использованием подвижных разностных сеток / Том. ун-т. Томск, 1983. Деп. в ВИНТИ 01.06.83, № 2924.
8. **Абузяров М. Х., Баженов В. Г., Котов В. Л. и др.** Метод распада разрывов в динамике упругопластических сред // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2000. Т. 40, № 6. С. 940–953.
9. **Фомин В. М., Гулидов А. И., Сапожников Г. А. и др.** Высокоскоростное взаимодействие тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999.
10. **Баталов В. А., Свидинский В. А., Селин В. И., Софронов В. Н.** Программа УП для решения одномерных газодинамических и упругопластических задач механики сплошных сред // Вопр. атом. науки и техники. Сер. Методики и программы числ. решения задач мат. физики. 1978. Вып. 1. С. 21–28.
11. **Cochran S., Banner D.** Spall studies in uranium // J. Appl. Phys. 1977. V. 48, N 7. P. 2729–2737.

*Поступила в редакцию 11/X 2002 г.,
в окончательном варианте — 6/V 2003 г.*
