

УДК 532.62

ВЛИЯНИЕ ВЯЗКОЙ ДИССИПАЦИИ И ТЕПЛООВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ НА МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ И ТЕПЛООБМЕН ВБЛИЗИ РАСТЯГИВАЮЩЕГОСЯ ТОНКОГО ЦИЛИНДРА

М. Калтех, С. Гхорбани, Т. Хадеминеждад*

Гилянский университет, 3756 Решт, Иран

* Технологический институт штата Иллинойс, 60616 Чикаго, США

E-mails: mkalteh@guilan.ac.ir, ghorbanisaba@gmail.com, tkhademi@hawk.iit.edu

С учетом вязкой диссипации, теплового излучения и поперечной кривизны численно исследовано осесимметричное магнитогидродинамическое течение в пограничном слое вблизи тонкого цилиндра при наличии теплообмена. Для этого с использованием преобразования подобия дифференциальные уравнения в частных производных преобразованы к обыкновенным, которые с соответствующими граничными условиями решены методом Рунге — Кутты четвертого порядка. Изучено влияние различных параметров на скорость, температуру, коэффициент локального поверхностного трения и число Нуссельта.

Ключевые слова: осесимметричный поток, растягивающийся цилиндр, вязкая диссипация, тепловое излучение, метод Рунге — Кутты.

DOI: 10.15372/PMTF20160310

Введение. Интерес к исследованию течения жидкости и теплообмена вблизи растягивающегося цилиндра обусловлен их использованием в таких технологических процессах, как горячая раскатка, полимерная экструзия, покрытие проволоки, производство пищевых продуктов и др.

Впервые течение жидкости вблизи растягивающейся пластины исследовалось в [1]. В [2] изучалось влияние отсоса и вдува на тепло- и массообмен в жидкости. В [3, 4] проблема течения и теплообмена вблизи непрерывно растягивающейся поверхности решалась с учетом скорости линейного растяжения и температуры стенки. В [5] анализировалось течение в окрестности нестационарно растягивающейся поверхности. В работе [6] рассматривались неньютоновские жидкости. Авторы [7] изучали течение в тонкой пленке жидкости, изменяющейся по степенному закону, для случая нестационарно растягивающейся поверхности, а проблема теплообмена для этого случая изучена в [8].

Поскольку качество конечного продукта существенно зависит от скорости нагрева или охлаждения жидкости, авторы работы [9] исследовали гидромагнитное течение и теплообмен вблизи растягивающейся поверхности, а авторы [10] рассмотрели влияние вязкой диссипации на теплообмен жидкости при наличии внешнего магнитного поля. Нестационарная конвекция и теплообмен вблизи пористой растягивающейся поверхности при наличии теплового излучения исследованы в [11]. В [12] изучено влияние переменной вязкости и термодиффузии на течение и теплообмен вблизи такой пластины, а в [13] — влияние

неоднородного теплового потока на теплообмен. В работах [14–18] подобные исследования проведены для неньютоновских жидкостей.

Некоторые исследования выполнены для цилиндрических тел вращения. В [19] изучалось течение в пограничном слое в окрестности растягивающегося цилиндра. Автор работы [20] обобщил это исследование на случай течения вязкой жидкости вблизи полого растягивающегося цилиндра в покоящейся жидкости. В [21, 22] изучалось влияние отсоса и вдува и магнитного поля на стационарное течение и теплообмен в жидкости вблизи растягивающегося цилиндра без учета поперечной кривизны, в [23] анализировались нестационарное течение и массообмен сжимающегося цилиндра.

Параметр поперечной кривизны определяется как отношение толщины пограничного слоя к радиусу цилиндра. Для случая очень малого параметра поперечной кривизны задача может рассматриваться в плоской постановке, а в случае тонкого цилиндра задача становится осесимметричной, при этом параметр поперечной кривизны учитывается в определяющих уравнениях. В [24] для решения задачи о течении и теплообмене вдоль растягивающегося тонкого цилиндра предложена переменная подобия. В [25] численно исследовались течение и теплообмен вблизи горизонтального цилиндра с учетом параметра поперечной кривизны и поверхностного теплового потока. В [26] изучалось влияние зависящей от температуры теплопроводности на течение и тепловой пограничный слой вблизи растягивающегося тонкого цилиндра, а также влияние внешнего теплового источника и поперечного магнитного поля для двух случаев тепловых пограничных условий. В [27, 28] исследовалась смешанная конвекция вблизи вертикально растягивающегося тонкого цилиндра.

Из сказанного выше следует, что влияние теплового излучения и вязкой диссипации на течение и теплообмен вблизи растягивающегося тонкого цилиндра исследовано недостаточно. Поэтому в настоящей работе изучались магнитогидродинамическое (МГД) течение в пограничном слое и теплообмен в несжимаемой жидкости вблизи линейно растягивающегося тонкого цилиндра с заданной температурой поверхности, а также влияние теплового излучения, вязкой диссипации и числа Прандтля на температуру, коэффициенты трения и теплообмена.

Постановка задачи. Рассмотрим течение ньютоновской электропроводящей жидкости вблизи тонкого цилиндра с заданной температурой поверхности (рис. 1). Растяжение поверхности вызывает течение пограничного слоя несжимаемой жидкости в направлении оси x . На поток также действует внешнее радиальное магнитное поле. Скорость растяже-

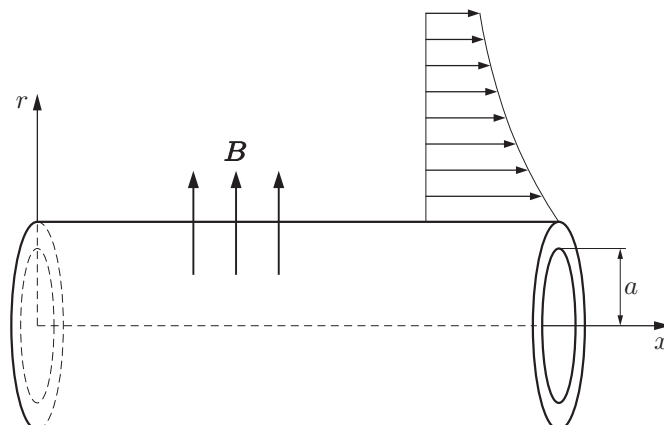


Рис. 1. Схема задачи

ния поверхности U_w и ее температура T_w задаются соотношениями

$$U_w = bx/l, \quad T_w = T_\infty + c(x/l)^s,$$

где b — параметр скорости растяжения; l — характерная длина; T_∞ — температура покоящейся жидкости; s — заданный показатель степени; c — положительная константа; ось x совпадает с осью цилиндра.

Дифференциальные уравнения сохранения массы, количества движения и энергии в осесимметричном потоке жидкости имеют вид

$$\frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial r} = 0;$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{\rho} (\mathbf{j} \times \mathbf{B})_x; \quad (1)$$

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \Phi - \frac{1}{r} \frac{\partial(rqr)}{\partial r}, \quad (2)$$

граничные условия запишем в виде

$$u = U_w, \quad v = 0, \quad r = a, \quad u = 0, \quad r \rightarrow \infty,$$

$$T = T_w, \quad r = a, \quad T = T_\infty, \quad r \rightarrow \infty,$$

где u , v — компоненты скорости в x - и r -направлениях; T — температура жидкости; ν — кинематическая вязкость; в (1) член $(\mathbf{j} \times \mathbf{B})_x$ представляет собой x -компоненту силы Лоренца, обусловленной наличием внешнего радиального магнитного поля $\mathbf{B} = (B_0/r)\mathbf{e}_r$ ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$).

В предположении, что магнитное число Рейнольдса является малым, наведенное магнитное поле несущественно [29], и согласно закону Ома сила электрического тока в направлении \mathbf{e}_θ равна

$$\mathbf{j} = \sigma[\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}]\mathbf{e}_\theta, \quad (3)$$

где \mathbf{E} — напряженность электрического поля, удовлетворяющая уравнениям Максвелла для стационарного магнитного поля и при отсутствии заряда:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = E(r, x)\mathbf{e}_\theta$$

или

$$\mathbf{E} = E(r)\mathbf{e}_\theta = (c'/r)\mathbf{e}_\theta. \quad (4)$$

Здесь c' — константа, которая находится при подстановке (4) в (3) и использовании уравнения (1) для свободного невязкого течения:

$$u \frac{\partial u_\infty}{\partial x} + v \frac{\partial u_\infty}{\partial r} = \nu \left(\frac{\partial^2 u_\infty}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\infty}{\partial r} \right) - \frac{\sigma(c'B_0 + u_\infty B_0^2)}{\rho r^2} \quad \Rightarrow \quad c' = 0.$$

В результате для силы Лоренца получаем $\mathbf{j} \times \mathbf{B} = -(\sigma u B_0^2 / r^2)\mathbf{e}_x$, и уравнение (1) сводится к соотношению

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{\sigma u B_0^2}{\rho r^2}. \quad (5)$$

Член Φ в уравнении (2) описывает вклад вязкой диссипации, который можно найти из выражения

$$\Phi = \mu \left[2 \left(\left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{v}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 \right]. \quad (6)$$

В приближении пограничного слоя уравнение (6) сводится к уравнению

$$\Phi = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2. \quad (7)$$

Согласно приближению Росселанда [30] тепловое излучение представляет собой радиационный тепловой поток в r -направлении

$$q_r = -\frac{4\sigma^*}{3k^*} \frac{\partial T^4}{\partial r}, \quad (8)$$

где σ^* , k^* — степень черноты и постоянная Больцмана. Величина T^4 вблизи T_∞ разлагается в ряд Тейлора

$$T^4 \simeq T_\infty^4 + 4T_\infty^3(T - T_\infty) + 6T_\infty^2(T - T_\infty)^2 + \dots,$$

который в пренебрежении членами высоких порядков $T - T_\infty$ сводится к уравнению

$$T^4 \simeq 4T_\infty^3 T - 3T_\infty^4. \quad (9)$$

Подставляя (9) в (8), получаем

$$q_r = -\frac{16T_\infty^3 \sigma^*}{3k^*} \frac{\partial T}{\partial r}, \quad (10)$$

а подставляя (7), (10) в уравнение (2), получаем уравнение баланса энергии

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial r} \right) = k \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \frac{16T_\infty^3 \sigma^*}{3k^*} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right). \quad (11)$$

Безразмерная переменная подобия, имеющая вид [24]

$$\eta = \frac{r^2 - a^2}{2a} \left(\frac{U_w}{\nu x} \right)^{1/2}, \quad (12)$$

используется для преобразования дифференциальных уравнений в частных производных к дифференциальным уравнениям первого порядка. Функция тока задается уравнением

$$\psi = (\nu x U_w)^{1/2} a f(\eta). \quad (13)$$

Компоненты скорости имеют вид

$$u = U_w f'(\eta), \quad v = -\frac{a}{r} \left(\frac{\nu b}{l} \right)^{1/2} f(\eta). \quad (14)$$

При заданной температуре поверхности профиль температуры θ задается уравнением

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}. \quad (15)$$

Подставляя (12)–(15) в уравнения (5), (11), которые можно решить численно методом Рунге — Кутты четвертого порядка, получаем уравнения

$$f f'' - (f')^2 - \frac{M}{1 + 2\gamma\eta} f' + 2\gamma f'' + (1 + 2\gamma\eta) f''' = 0; \quad (16)$$

$$s f' \theta - f \theta' - \frac{1}{\text{Pr}'} [2\gamma \theta' + (2\gamma\eta + 1) \theta''] - \text{Ec} [(2\gamma\eta + 1) (f'')^2] = 0 \quad (17)$$

с соответствующими граничными условиями для преобразованных скорости и температуры

$$\begin{aligned} f'(0) &= 1, & f(0) &= 0, & f'(\infty) &= 0, \\ \theta(0) &= 1, & \theta(\infty) &= 0. \end{aligned}$$

Здесь $\gamma = \sqrt{l\nu/(ba^2)}$ — параметр поперечной кривизны; $M = \sigma B_0^2 l / (\rho a^2 b)$ — параметр магнитного поля; $Ec = (U_w)^2 / (c_p(T_w - T_\infty))$ — число Эккерта; $Pr' = (1 + N) / Pr$ — модифицированное число Прандтля; $Pr = \rho c_p \nu / k$ — число Прандтля; $N = 16T_\infty^3 \sigma^* / (3kk^*)$ — параметр теплового излучения; локальные коэффициент трения и число Нуссельта определяются выражениями

$$C_{fx} = -2\tau_w / (\rho U_w^2) = -2f''(0)(Re_x)^{-1/2}, \quad Nu_x = \frac{\partial \theta}{\partial (r/a)} \Big|_{r=a} = \frac{a}{x} (Re_x)^{1/2} \theta'(0),$$

$Re_x = U_w x / \nu$ — локальное число Рейнольдса.

В частных случаях уравнения (16), (17) можно упростить. Например, в случае $\gamma = 0$ задача сводится к задаче о течении и теплообмене вблизи горизонтальной растягивающейся поверхности, а при допущении $M = N = 0$ задача сводится к задаче Крейна [1].

Тестовые расчеты. Для того чтобы использовать метод Рунге — Кутты, уравнения (16), (17) необходимо свести к системе нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{df_0}{d\eta} &= f_1, & \frac{df_1}{d\eta} &= f_2, & \frac{df_2}{d\eta} &= \frac{(M/(1+2\gamma\eta))f_1 + (f_1)^2 - f_0f_2 - 2\gamma f_2}{1+2\gamma\eta}, \\ \frac{d\theta_0}{d\eta} &= \theta_1, & \frac{d\theta_1}{d\eta} &= \frac{Pr' [s f_1 \theta_0 - f_0 \theta_1 - Ec(1+2\gamma\eta)(f_2)^2] - 2\gamma \theta_1}{1+2\gamma\eta}, \\ f_0(0) &= 0, & f_1(0) &= 1, & \theta_0(0) &= 1, \\ f_1(\eta_\infty) &= 0, & \theta_0(\eta_\infty) &= 0. \end{aligned}$$

Проведенное для проверки достоверности сравнение полученных численных результатов с данными работ [3, 4, 24, 26] показало, что они хорошо согласуются (различие не превышает 10^{-4}) (табл. 1, 2).

Результаты исследования и их обсуждение. Задача о течении и теплообмене в ньютоновской жидкости вблизи тонкого растягивающегося цилиндра решается численно. Результаты решения приведены на рис. 2–8 и в табл. 3–5.

На рис. 2 представлены профили осевой $f'(\eta)$ и поперечной $f(\eta)$ скоростей при различных значениях параметров магнитного поля M и поперечной кривизны γ . Видно, что при увеличении параметра магнитного поля толщина пограничного слоя уменьшается. Это обусловлено влиянием магнитного поля на силу Лоренца. Также видно, что на кромке пограничного слоя $f(\eta) \neq 0$ (см. рис. 2, б).

В табл. 3 приведены значения поверхностного трения $-f''(0)$ при различных значениях параметров магнитного поля и поперечной кривизны. Из табл. 3 следует, что при увеличении параметра магнитного поля коэффициент поверхностного трения также увеличивается. Это показано на рис. 3 для всех чисел Рейнольдса и двух значений параметра поперечной кривизны. Например, при $\gamma = 1$ увеличение параметра магнитного поля от 0 до 2 приводит к увеличению $-f''(0)$ на 38,78 %, при $\gamma = 0$ — приблизительно на 73,2 %. Результаты показывают, что при $M = 0 \div 2$ имеет место регрессивная скорость увеличения поверхностного трения $-f''(0)$. Такое поведение поверхностного трения обусловлено тем, что увеличение параметра магнитного поля уменьшает осевую скорость, которая, в свою очередь, уменьшает силу Лоренца, вследствие чего влияние параметра магнитного поля уменьшается.

Согласно рис. 2 в случае $\gamma = 1$ толщина пограничного слоя больше, чем в случае $\gamma = 0$, что свидетельствует об увеличении скорости при увеличении поперечной кривизны. Следует отметить, что влияние поперечной кривизны и параметра магнитного поля на коэффициент поверхностного трения одинаково.

Таблица 1

Значения локального поверхностного трения $-f''(0)$
при различных значениях параметров M и γ

M	$-f''(0)$					
	Работа [26]			Настоящая работа		
	$\gamma = 0$	$\gamma = 0,5$	$\gamma = 1$	$\gamma = 0$	$\gamma = 0,5$	$\gamma = 1$
0	1,000 001	1,182 410	1,358 198	1,000 001	1,182 410	1,358 203
0,5	1,224 745	—	—	1,224 745	1,354 751	1,499 818
1,0	1,414 214	—	—	1,414 214	1,513 473	1,634 410
1,5	1,581 139	—	—	1,581 138	1,660 637	1,762 612
2,0	1,732 051	—	—	1,732 050	1,797 992	1,884 995

Таблица 2

Значения градиента температуры $-\theta'(0)$ при $\gamma = M = Ec = N = 0$, $s = 1$
и различных значениях числа Прандтля

Pr	$-\theta'(0)$			
	Работа [3]	Работа [4]	Работа [24]	Настоящая работа
0,10	—	—	—	0,2090
0,72	0,8086	0,8058	0,8086	0,8086
1,00	1,0000	0,9961	1,0000	1,0000
2,00	—	—	—	1,5231
3,00	1,9237	1,9144	1,9237	1,9236
5,00	—	—	—	2,5575
10,00	3,7207	3,7006	3,7207	3,7206

Таблица 3

Значения локального поверхностного трения $-f''(0)$
при различных значениях параметров поперечной кривизны и магнитного поля

M	$-f''(0)$				
	$\gamma = 0$	$\gamma = 0,25$	$\gamma = 0,50$	$\gamma = 0,75$	$\gamma = 1,00$
0	1,000 001	1,091 825	1,182 410	1,271 146	1,358 203
0,5	1,224 745	1,286 865	1,354 751	1,426 281	1,499 818
1,0	1,414 214	1,460 675	1,513 473	1,571 918	1,634 410
1,5	1,581 138	1,690 141	1,660 637	1,709 124	1,762 612
2,0	1,732 050	1,818 930	1,797 992	1,838 857	1,884 995

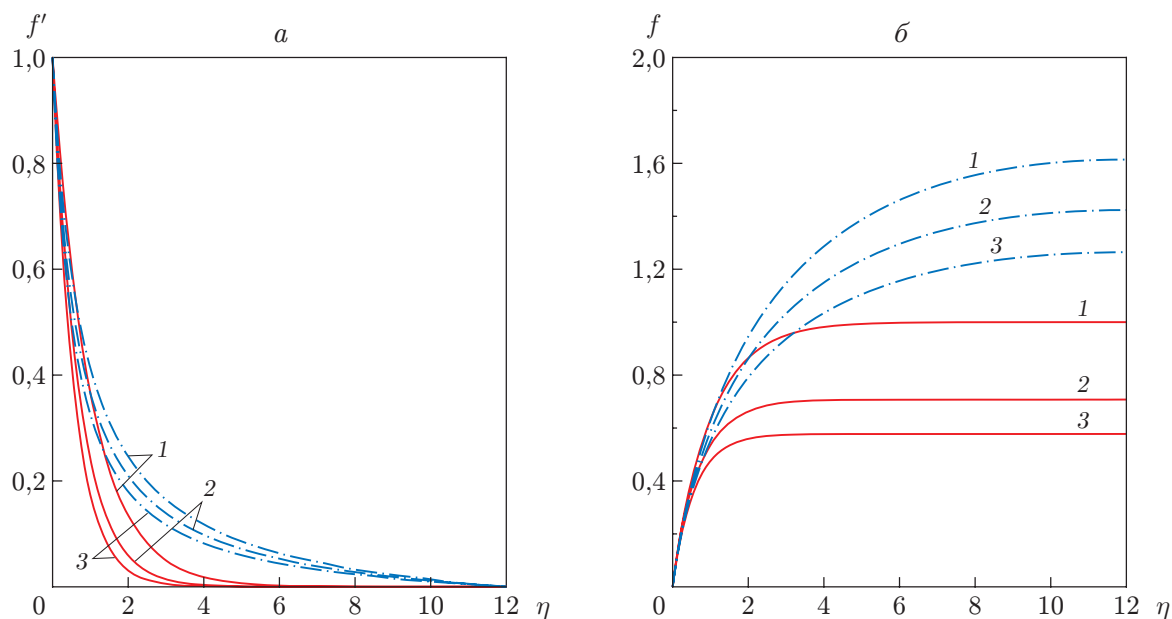


Рис. 2. Профили осевой (*a*) и поперечной (*б*) скоростей при различных значениях параметров γ и M :

сплошные линии — $\gamma = 0$, штрихпунктирные — $\gamma = 1$; 1 — $M = 0$, 2 — $M = 1$, 3 — $M = 2$

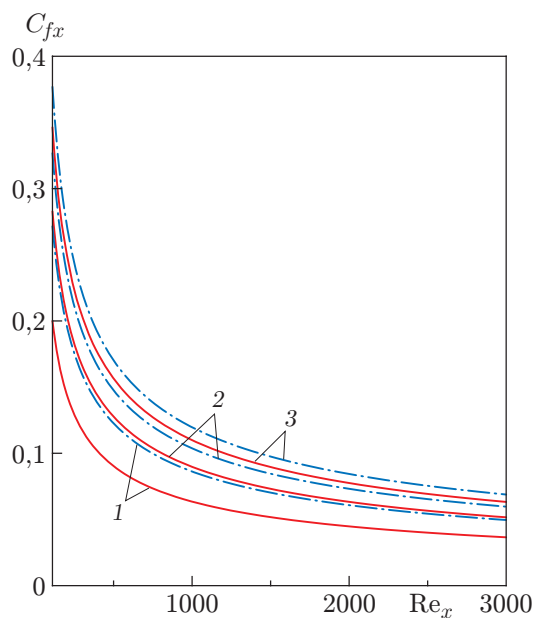


Рис. 3

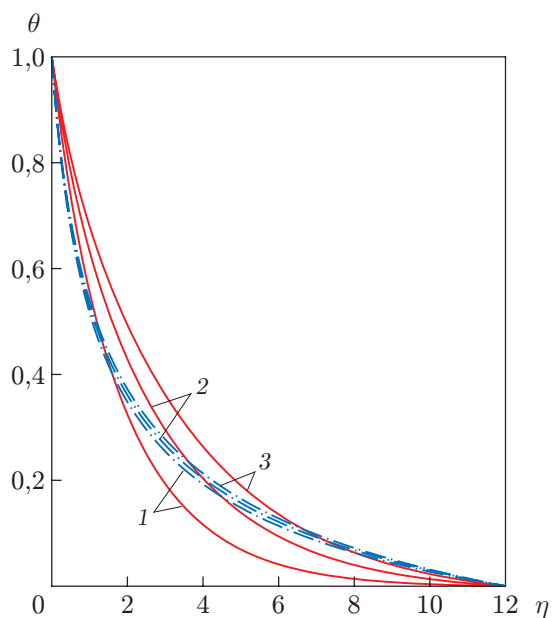


Рис. 4

Рис. 3. Зависимость локального коэффициента трения от локального числа Рейнольдса при различных значениях параметров γ и M (обозначения те же, что на рис. 2)

Рис. 4. Профили температуры при $s = 1$, $Pr = 1$, $N = 1$, $Ec = 0,02$ и различных значениях γ и M (обозначения те же, что на рис. 2)

Таблица 4
Значения градиента температуры $-\theta'(0)$ при различных значениях параметров

M	Ec	N	s	Pr	$-\theta'(0)$	
					$\gamma = 0$	$\gamma = 1$
0	0,02	1,0	1,0	1,0	0,6273	1,0231
0,5	0,02	1,0	1,0	1,0	0,5723	1,0084
1,0	0,02	1,0	1,0	1,0	0,5302	0,9945
1,5	0,02	1,0	1,0	1,0	0,4968	0,9815
2,0	0,02	1,0	1,0	1,0	0,4691	0,9694
1,0	0	1,0	1,0	1,0	0,5364	1,0015
1,0	1,00	1,0	1,0	1,0	0,2244	0,6518
1,0	2,00	1,0	1,0	1,0	-0,0876	0,3020
1,0	3,00	1,0	1,0	1,0	-0,3997	-0,0478
1,0	4,00	1,0	1,0	1,0	-0,7119	-0,3976
1,0	0,02	0	1,0	1,0	0,8806	1,3035
1,0	0,02	0,5	1,0	1,0	0,6578	1,1036
1,0	0,02	1,0	1,0	1,0	0,5302	0,9945
1,0	0,02	1,5	1,0	1,0	0,4476	0,9258
1,0	0,02	2,0	1,0	1,0	0,3901	0,8784
1,0	0,02	2,5	1,0	1,0	0,3479	0,8438
1,0	0,02	3,0	1,0	1,0	0,3157	0,8175
1,0	0,02	1,0	1,0	1,0	0,5302	0,9945
1,0	0,02	1,0	2,0	1,0	0,7424	1,2025
1,0	0,02	1,0	3,0	1,0	0,9311	1,3878
1,0	0,02	1,0	4,0	1,0	1,1016	1,5558
1,0	0,02	1,0	5,0	1,0	1,2577	1,7098
1,0	0,02	1,0	1,0	0,1	0,1299	0,6622
1,0	1,00	1,0	1,0	1,0	0,5302	0,9945
1,0	1,00	1,0	1,0	2,0	0,8806	1,3035
1,0	1,00	1,0	1,0	3,0	1,1584	1,5670
1,0	1,00	1,0	1,0	5,0	1,6002	2,0029
1,0	1,00	1,0	1,0	10,0	2,4082	2,8115

Влияние параметра магнитного поля на поле температуры показано на рис. 4. При увеличении параметра магнитного поля градиент температуры уменьшается, следовательно, большая часть тепла передается жидкости вблизи кромки пограничного слоя, что приводит к увеличению температуры. Согласно данным, представленным в табл. 4, увеличение параметра магнитного поля от 0 до 2 приводит к уменьшению $-\theta'(0)$ на 5,25 % при $\gamma = 1$, на 25,22 % при $\gamma = 0$.

На рис. 5 показано влияние вязкой диссипации на поле температуры при различных значениях числа Эккерта. Видно, что температура увеличивается при увеличении числа Эккерта. Из табл. 4 следует, что при увеличении числа Эккерта градиент температуры уменьшается, а температура увеличивается. Увеличение числа Эккерта приводит к смене знака температурного градиента. Фактически при увеличении числа Эккерта до некоторого значения вязкая диссипация генерирует тепловую энергию в потоке, что и приводит к изменению знака градиента температуры. Это значение числа Эккерта зависит от параметра магнитного поля M , числа Прандтля Pr , параметра теплового излучения N и показателя степени в выражении для температуры поверхности s (табл. 5). Согласно табл. 5 при увеличении параметра магнитного поля и числа Прандтля число Эккерта уменьшается. При увеличении параметра теплового излучения число Эккерта увеличивается.

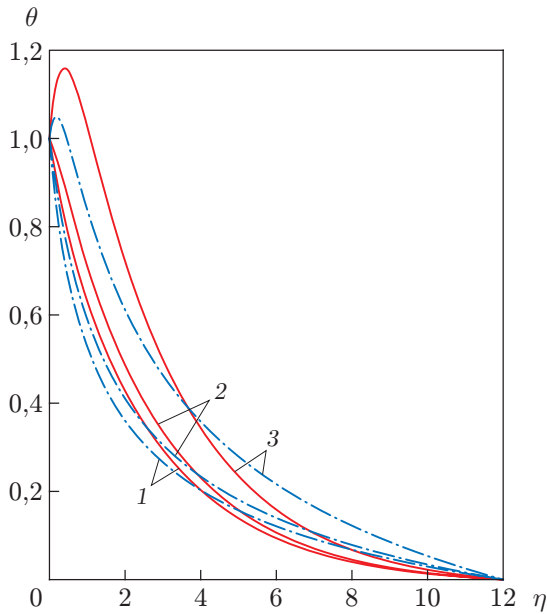


Рис. 5

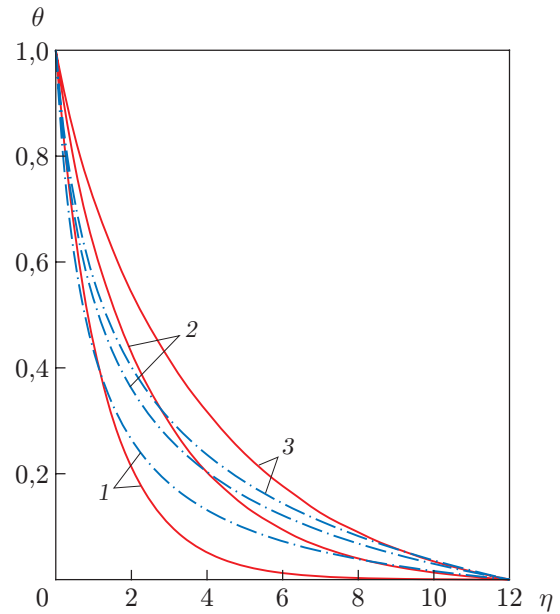


Рис. 6

Рис. 5. Профили температуры при $M = 1, s = 1, Pr = 1, N = 1$ и различных значениях параметров γ и Ec :

сплошные линии — $\gamma = 0$, штрихпунктирные — $\gamma = 1$; 1 — $Ec = 0$, 2 — $Ec = 1$, 3 — $Ec = 5$

Рис. 6. Профили температуры при $M = 1, s = 1, Pr = 1, Ec = 0,02$ и различных значениях параметров γ и N :

сплошные линии — $\gamma = 0$, штрихпунктирные — $\gamma = 1$; 1 — $N = 0$, 2 — $N = 1$, 3 — $N = 2$

Таблица 5

Значения числа Эккерта при $\theta'(0) = 0$ и различных значениях параметров

M	Pr	N	s	Ec	
				$\gamma = 0$	$\gamma = 1$
1,0	1,0	1,0	1,0	1,7190	2,8634
2,0	1,0	1,0	1,0	1,2076	2,4319
1,0	2,0	1,0	1,0	1,5438	1,9936
1,0	1,0	2,0	1,0	1,8379	3,7070
1,0	1,0	1,0	2,0	2,5187	3,6159

На рис. 6 показано влияние теплового излучения на профиль температуры: с увеличением параметра излучения температура увеличивается. Согласно табл. 4 при увеличении параметра излучения от 0 до 2 градиент температуры уменьшается на 55,7 % в случае $\gamma = 0$, а в случае $\gamma = 1$ это уменьшение составляет 32,61 %.

На рис. 7 показано влияние экспоненты s на профиль температуры. Видно, что при увеличении показателя экспоненты градиент температуры на поверхности увеличивается. Согласно табл. 4 градиент температуры увеличивается на 75,63 и 39,55 % соответственно при $\gamma = 0, \gamma = 1$ и увеличении показателя степени s от 1 до 3.

Влияние числа Прандтля на профиль температуры показано на рис. 8. Использование жидкостей с большими числами Прандтля приводит к уменьшению температуры. Данные, приведенные в табл. 4, подтверждают известное представление, что жидкости с большим числом Прандтля имеют большие градиенты температуры и как следствие более низкую температуру.

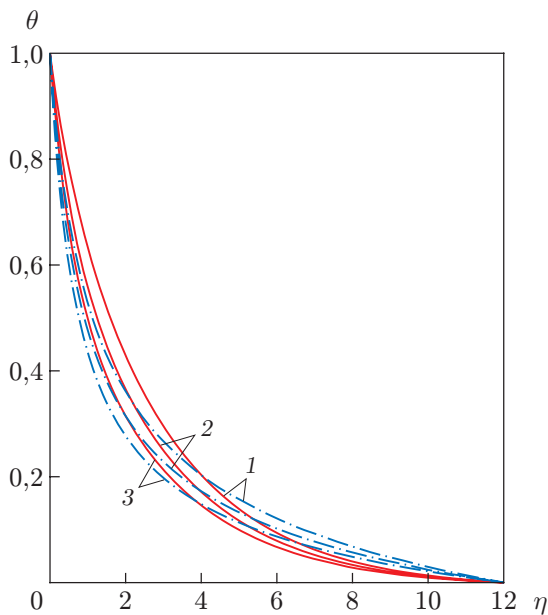


Рис. 7

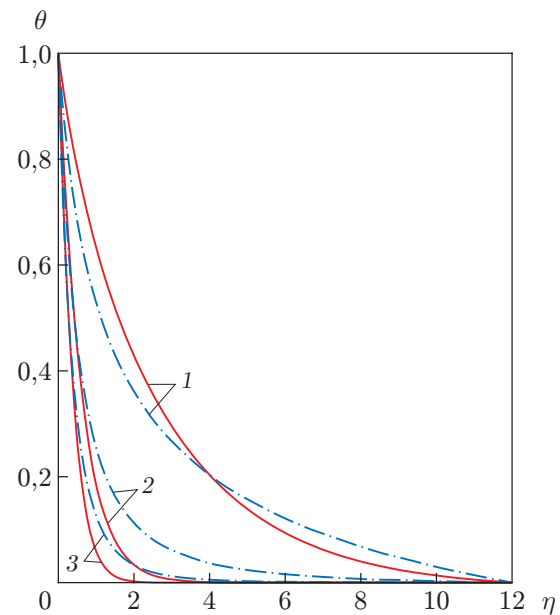


Рис. 8

Рис. 7. Профили температуры при $M = 1$, $Pr = 1$, $N = 1$, $Es = 0,02$ и различных значениях параметров γ и s :

сплошные линии — $\gamma = 0$, штрихпунктирные — $\gamma = 1$; 1 — $s = 1$, 2 — $s = 2$, 3 — $s = 3$

Рис. 8. Профили температуры при $M = 1$, $s = 1$, $N = 1$, $Es = 0,02$ и различных значениях параметров γ и Pr :

сплошные линии — $\gamma = 0$, штрихпунктирные — $\gamma = 1$; 1 — $Pr = 1$, 2 — $Pr = 5$, 3 — $Pr = 10$

На рис. 4–8 и в табл. 4 приведены зависимости температуры от параметра поперечной кривизны γ . Во всех случаях увеличение кривизны увеличивает не только градиент температуры, но и температуру. Это может быть обусловлено тем, что при увеличении кривизны увеличивается толщина пограничного слоя и как следствие температура и скорость.

Выводы. Результаты проведенного численного исследования течения и теплообмена в жидкости вблизи растягивающегося тонкого цилиндра при наличии внешнего радиального магнитного поля и различных значениях параметра поперечной кривизны, а также влияния вязкой диссипации, теплового излучения, числа Прандтля и различных заданных показателей степени в выражении для температуры на профиль температуры позволяют сделать следующие выводы.

Увеличение параметра магнитного поля от 0 до 2 приводит к уменьшению скорости, в то время как коэффициент трения увеличивается на 38,78 % при $\gamma = 1$ и на 73,2 % при $\gamma = 0$.

Увеличение параметра магнитного поля от 0 до 2 приводит к увеличению температуры и уменьшению градиента температуры на 5,25 и 25,22 % для случаев $\gamma = 1$ и $\gamma = 0$ соответственно.

При увеличении числа Эккерта градиент температуры уменьшается, а температура увеличивается. Имеется частное значение числа Эккерта, при котором градиент температуры равен нулю.

Увеличение параметра теплового излучения от 0 до 3 приводит к увеличению температуры и уменьшению градиента температуры.

При увеличении показателя степени от 1 до 5 температура уменьшается, а градиент температуры увеличивается.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Crane L. J.** Flow past a stretching plate // *Z. angew. Math. Phys.* 1970. Bd 21. S. 645–647.
2. **Gupta P. S., Gupta A. S.** Heat and mass transfer on a stretching sheet with suction or blowing // *Canad. J. Chem. Engng.* 1977. V. 55. P. 744–746.
3. **Grubka L. J., Bobba K. M.** Heat transfer characteristics of a continuous, stretching surface with variable temperature // *J. Heat Transfer.* 1985. V. 107. P. 248–250.
4. **Ali M. E.** Heat transfer characteristics of a continuous stretching surface // *Heat Mass Transfer.* 1994. V. 29. P. 227–234.
5. **Wang C. Y.** Liquid film on an unsteady stretching surface // *Quart. Appl. Math.* 1990. V. 48. P. 601–610.
6. **Andersson H. I., Dandapat B. S.** Flows of a power law fluid over a stretching sheet // *Stability Appl. Anal. Continuous Media.* 1991. V. 1. P. 339–347.
7. **Andersson H. I., Aarseth J. B., Braud N., Dandapat B. S.** Flow of a power-law fluid film on an unsteady stretching surface // *J. Non-Newton. Fluid Mech.* 1996. V. 62. P. 1–8.
8. **Chen C. H.** Heat transfer in a power-law fluid film over a unsteady stretching sheet // *Heat Mass Transfer.* 2003. V. 39. P. 791–796.
9. **Chamkha A. J.** Unsteady hydromagnetic flow and heat transfer from a non-isothermal stretching sheet immersed in a porous medium // *Intern. Comm. Heat Mass Transfer.* 1998. V. 25. P. 899–906.
10. **Abel M. S., Mahesha N., Tawade J.** Heat transfer in a liquid film over an unsteady stretching surface with viscous dissipation in presence of external magnetic field // *Appl. Math. Model.* 2009. V. 33. P. 3430–3441.
11. **Mukhopadhyay S.** Effect of thermal radiation on unsteady mixed convection flow and heat transfer over a porous stretching surface in porous medium // *Intern. J. Heat Mass Transfer.* 2009. V. 52. P. 3261–3265.
12. **Mukhopadhyay S.** Unsteady boundary layer flow and heat transfer past a porous stretching sheet in presence of variable viscosity and thermal diffusivity // *Intern. J. Heat Mass Transfer.* 2009. V. 52. P. 5213–5217.
13. **Tsai R., Huang K. H., Huang J. S.** Flow and heat transfer over an unsteady stretching surface with non-uniform heat source // *Intern. Comm. Heat Mass Transfer.* 2008. V. 35. P. 1340–1343.
14. **Chen C.-H.** Effect of viscous dissipation on heat transfer in a non-Newtonian liquid film over an unsteady stretching sheet // *J. Non-Newton. Fluid Mech.* 2006. V. 135. P. 128–135.
15. **Chen C.-H.** Effects of magnetic field and suction/injection on convection heat transfer of non-Newtonian power-law fluids past a power-law stretched sheet with surface heat flux // *Intern. J. Thermal. Sci.* 2008. V. 47. P. 954–961.
16. **Cortell R.** Effects of viscous dissipation and radiation on the thermal boundary layer over a nonlinearly stretching sheet // *Phys. Lett. A.* 2008. V. 372. P. 631–636.
17. **Huang K. H., Tsai R., Huang C. H.** Chebyshev finite difference approach to modeling the thermoviscosity effect in a power-law liquid film on an unsteady stretching surface // *Non-Newton. Fluid Mech.* 2010. P. 165. P. 1351–1356.
18. **Vajravelu K., Prasad K. V., Ng C.-O.** Unsteady flow and heat transfer in a thin film of Ostwald — de Waele liquid over a stretching surface // *Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 2012. V. 17. P. 4163–4173.

19. **Crane L. J.** Boundary layer flow due to a stretching cylinder // *Z. angew. Math. Phys.* 1975. Bd 26. S. 619–622.
20. **Wang C. Y.** Fluid flow due to a stretching cylinder // *Phys. Fluids.* 1988. V. 31. P. 466–468.
21. **Ishak A., Nazar R., Pop I.** Uniform suction/blowing effect on flow and heat transfer due to a stretching cylinder // *Appl. Math. Model.* 2008. V. 32. P. 2059–2066.
22. **Ishak A., Nazar R., Pop I.** Magnetohydrodynamic (MHD) flow and heat transfer due to a stretching cylinder // *Energy Convers Manag.* 2008. V. 49. P. 3265–3269.
23. **Wan Zaimi W. M. K. A., Ishak A., Pop I.** Unsteady viscous flow over a shrinking cylinder // *J. King Saud Univ. Science.* 2013. V. 25. P. 143–148.
24. **Ishak A., Nazar R.** Laminar boundary layer flow along a stretching cylinder // *Europ. J. Sci. Res.* 2009. V. 36. P. 22–29.
25. **Bachok N., Ishak A.** Flow and heat transfer over a stretching cylinder with prescribed surface heat flux // *Malays. J. Math. Sci.* 2010. V. 4. P. 159–169.
26. **Vajravelu K., Prasad K. V., Santhi S. R.** Axisymmetric magneto-hydrodynamic (MHD) flow and heat transfer at a non-isothermal stretching cylinder // *Appl. Math. Comput.* 2012. V. 219. P. 3993–4005.
27. **Mukhopadhyay S.** Mixed convection boundary layer flow along a stretching cylinder in porous medium // *J. Petroleum Sci. Engng.* 2012. V. 96/97. P. 73–78.
28. **Patil P. M., Roy S., Pop I.** Unsteady effects on mixed convection boundary layer flow from a permeable slender cylinder due to non-linearly power law stretching // *Comput. Fluids.* 2012. V. 56. P. 17–23.
29. **Shercliff J. A.** *A textbook of magnetohydrodynamics.* S. l.: Pergamon Press, 1965.
30. **Brewster M. Q.** *Thermal radiative transfer and properties.* N. Y.: John Wiley, 1992.

*Поступила в редакцию 26/II 2014 г.,
в окончательном варианте — 18/V 2014 г.*
