ОБЩЕСТВО И ЭКОНОМИКА: ПРОБЛЕМЫ РАЗВИТИЯ

SOCIETY AND ECONOMY: PROBLEMS OF DEVELOPMENT

Вестник НГУЭУ. 2022. № 3. С. 10–25
Vestnik NSUEM. 2022. No. 3. P. 10–25

Научная статья
УДК 330.45 + 51-77
DOI: 10.34020/2073-6495-2022-3-010-025

ОБЩЕСТВЕННАЯ ОПТИМАЛЬНОСТЬ В МОДЕЛЯХ МЕЖРЕГИОНАЛЬНОЙ ТОРГОВЛИ

Быкадоров Игорь Александрович[1], Исмайылова Юлия Николаевна[2], Пудова Марина Владимировна[3], Хрущев Сергей Евгеньевич[4]

[1–4] *Сибирский институт управления – филиал Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации*

[1] bykadorov-ia@ranepa.ru
[2] ismayylova-yn@ranepa.ru
[3] pudova-mv@ranepa.ru
[4] khrushchev-sa@ranepa.ru

Аннотация. Исследуется модель межрегиональной торговли при монополистической конкуренции производителей. Получена локальная сравнительная статика симметричной общественной оптимальности по транспортным издержкам. Особое внимание уделяется ситуациям свободы торговли и автаркии. Для случая двух регионов получены контринтуитивные результаты: (1) при малых транспортных издержках в одном из регионов общественное благосостояние может как увеличиваться, так и уменьшаться; (2) при больших транспортных издержках либерализация торговли ухудшает общественное благосостояние в одном регионе и улучшает в другом.

Ключевые слова: межрегиональная торговля, транспортные издержки типа «iceberg», общественная оптимальность, эластичность

Финансирование. Исследование выполнено в рамках внутреннего гранта СИУ-РАНХиГС, апрель – июнь 2022. Авторы считают своим приятным долгом выразить искреннюю благодарность своим коллегам по НОЦ «Цифровой трансформации экономики» и особенно кафедры бизнес-статистики и аналитики СИУ-РАНХиГС за полезные обсуждения.

Для цитирования: Быкадоров И.А., Исмайылова Ю.Н., Пудова М.В., Хрущев С.Е. Общественная оптимальность в моделях межрегиональной торговли // Вестник НГУЭУ. 2022. № 3. С. 10–25. DOI: 10.34020/2073-6495-2022-3-010-025.

Original article

SOCIAL OPTIMALITY IN INTERREGIONAL TRADE MODELS

Bykadorov Igor A.[1], **Ismaiylova Yuliya N.**[2], **Pudova Marina V.**[3], **Khruschev Sergey E.**[4]

[1–4] *Siberian Institute of Management – branch of the Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration*

[1] bykadorov-ia@ranepa.ru
[2] ismayylova-yn@ranepa.ru
[3] pudova-mv@ranepa.ru
[4] khrushchev-sa@ranepa.ru

Abstract. We study the model of interregional trade under monopolistic competition of producers. We obtain a local comparative statics of symmetric social optimality with respect to transport costs. Particular attention is paid to situations of free trade and autarky. For the case of two regions, counterintuitive results we obtain that (1) with low transport costs in one of the regions, public welfare can either increase or decrease; (2) when transport costs are high, trade liberalization worsens public welfare in one region and improves it in another.

Keywords: interregional trade, transport costs of “iceberg types”, social optimality, elasticity

Financing. The study was carried out within the framework of an internal grant of the SIU RANEPA, April – June 2022. The authors consider it their pleasant duty to express their sincere gratitude to their colleagues at the REC “Digital Transformation of the Economy” and especially the Department of Business Statistics and Analytics of the SIU RANEPA for useful discussions.

For citation: Bykadorov I.A., Ismaiylova Yu.N., Pudova M.V., Khruschev S.E. Social optimality in interregional trade models. *Vestnik NSUEM.* 2022; (3): 10–25. (In Russ.). DOI: 10.34020/2073-6495-2022-3-010-025.

Введение

Работ по изучению монополистической конкуренции сейчас огромное количество. Поэтому представляется, что теперь статью в этой области можно признать интересной только в том случае, если она содержит контринтуитивные (неожиданные) результаты.

Впервые понятие монополистической конкуренции было введено в [15, 16]. Изучение монополистической конкуренции дает возможность исследовать поведение большого числа производителей и потребителей. Результаты, изложенные в [5, 21, 25, 26, 35], дали возможность математического моделирования этого феномена.

Обычно модели монополистической конкуренции изучают рыночное равновесие (см., напр., [5, 6, 14, 19, 22, 27, 35]). Одна из наиболее интересных тем в этих исследованиях – влияние параметров моделей (размер рынка, транспортные издержки и т.д.) на общественное благосостояние [3, 4, 13, 24, 29, 30, 32, 33]. В частности, в [3, 4, 30] авторы утверждают, что выгода от торговли «не так уж и велика». Кроме того, в [24] тщательно изучаются случаи свободной торговли и автаркии. Результатом является то, что общественное благосостояние как функция транспортных расходов возрастает вблизи полной автаркии.

В предлагаемой статье, являющейся продолжением [2], изучается случай общественной оптимальности [1, 7, 8, 20]. Это можно интерпретировать как задачу социального планировщика, который оптимизирует некоторую скаляризацию множества критериев для нахождения оптимального по Парето решения. Показано, что общее благосостояние уменьшается. Исследование ограничивается случаем двух регионов: малого (по числу потребителей) и большого. Изучаются две важные «предельные» ситуации: свободы торговли и автаркии [24]. Кроме того, вблизи свободной торговли благосостояние в меньшем регионе снижается; для большего региона построены примеры, когда (1) благосостояние уменьшается и (2) растет (вопреки ожидаемому!). Что касается полной автаркии, то ограничим наше исследование случаем линейных издержек производства и покажем, что общее благосостояние достигает минимума, увеличиваясь в одном и уменьшаясь в другом регионе.

1. Основные предположения монополистической конкуренции

В [2] уже описывались предположения монополистической конкуренции [7, 8, 13]. Здесь же сформулируем их применительно к задаче общественной оптимальности. Итак, предполагается следующее:

– все потребители идентичны, каждый обладает одной единицей труда;

– ***труд является единственным производственным фактором***; потребление, выпуск и т.д. измеряются в труде;

– все производители («фирмы») идентичны, но производят «товарные разнообразия» («varieties», почти одинаковые) товары;

– каждая фирма производит только одно товарное разнообразие («variety»), каждое variety производится только одной фирмой;

– функция спроса определяется аддитивно-сепарабельной функцией полезности;

– число («масса») фирм достаточно велико, поэтому влияние каждой фирмы на всю экономику региона (регионов) игнорируется;

– транспортные межрегиональные издержки $\tau \geq 1$ имеют вид «iceberg»: для того, чтобы продать 1 единицу товара в другом регионе, требуется произвести $\tau \cdot 1$ единиц товара;

– спрос и предложение на труд в каждом регионе сбалансированы.

2. Модель торговли двух регионов

Пусть

N_k – число (масса) фирм в регионе $k \in \{1, 2\}$ (определяется ***эндогенно***);

L_k – число потребителей (жителей) в регионе $k \in \{1. 2\}$, $L_1 \geq L_2$.

2.1. Потребители

Введем индивидуальные потребления [2]. Пусть

$x_{11}^{(i)}$ – количество товара, производимого фирмой $i \in \{0, N_1\}$ в регионе 1 и потребленного в регионе 1 одним потребителем (внутреннее потребление);

$x_{12}^{(i)}$ – количество товара, производимого фирмой $i \in \{0, N_1\}$ в регионе 1 и потребленного в регионе 2 одним потребителем (импортное потребление);

$x_{21}^{(i)}$ – количество товара, производимого фирмой $i \in \{0, N_2\}$ в регионе 2 потребленного в регионе 1 одним потребителем (импортное потребление);

$x_{22}^{(i)}$ – количество товара, производимого фирмой $i \in \{0, N_2\}$ в регионе 2 и потребленного в регионе 2 одним потребителем (внутреннее потребление).

2.2. Производители

Пусть $\tau \geq 1$ – транспортные (торговые) издержки «iceberg type».

Выпуск (размер) фирмы $i \in \{0, N_1\}$ региона 1:

$$Q_1^{(i)} = L_1 x_{11}^{(i)} + L_2 \tau x_{12}^{(i)}, \ \ i \in [0, N_1].$$

Выпуск (размер) фирмы $i \in \{0, N_1\}$ региона 2:

$$Q_2^{(i)} = L_1 \tau x_{21}^{(i)} + L_2 x_{22}^{(i)}, \ \ i \in [0, N_2].$$

Баланс по труду в регионе 1:

$$\int_0^{N_1} V(Q_1^{(i)}) di = L_1.$$

Баланс по труду в регионе 2:

$$\int_0^{N_2} V(Q_2^{(i)}) di = L_2.$$

2.3. Симметричный случай

В симметричном случае индивидуальные потребления, размеры фирм и балансы по труду имеют вид

$$x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_{21},$$

$$Q_1 = L_1 x_{11} + L_2 \tau x_{12}, \ \ Q_2 = L_1 \tau x_{21} + L_2 x_{22},$$

$$N_1 V(Q_1) = L_1, \ \ N_2 V(Q_2) = L_2.$$

Функция общественного благосостояния в регионе 1:

$$W_1 = (N_1 u(x_{11}) + N_2 u(x_{21})) L_1.$$

Функция общественного благосостояния в регионе 2:

$$W_2 = (N_1 u(x_{12}) + N_2 u(x_{22})) L_2.$$

Поэтому общая функция общественного благосостояния:

$$W = W_1 + W_2 = (N_1 u(x_{11}) + N_2 u(x_{21}))L_1 + (N_1 u(x_{12}) + N_2 u(x_{22}))L_2 =$$
$$= (L_1 u(x_{11}) + L_2 u(x_{12}))N_1 + (L_1 u(x_{21}) + L_2 u(x_{22}))N_2.$$

Далее, в силу балансов по труду:

$$W_1 = \left(\frac{u(x_{11})L_1}{V(Q_1)} + \frac{u(x_{21})L_2}{V(Q_2)} \right) L_1, \quad W_2 = \left(\frac{u(x_{12})L_1}{V(Q_1)} + \frac{u(x_{22})L_2}{V(Q_2)} \right) L_2,$$

$$W = \frac{(L_1 u(x_{11}) + L_2 u(x_{12}))L_1}{V(Q_1)} + \frac{(L_1 u(x_{21}) + L_2 u(x_{22}))L_2}{V(Q_2)}.$$

Симметричная общественная оптимальность – это набор

$$(x_{11}^{opt}, x_{12}^{opt}, x_{22}^{opt}, x_{21}^{opt}, N_1^{opt}, N_2^{opt}),$$

удовлетворяющий следующим условиям:

максимизация общественного состояния

$$\frac{\partial W}{\partial x_{ij}} = 0, \; i \in \{1, 2\}, \;\; j \in \{1, 2\}, \; W'' < 0;$$

балансы по труду

$$N_1 \cdot V(Q_1) = L_1;$$
$$N_2 \cdot V(Q_2) = L_2.$$

2.4. Локальная сравнительная статика по транспортным издержкам. Симметричный случай

Система уравнений симметричной общественной оптимальности имеет вид

$$W' \equiv \begin{pmatrix} \dfrac{\partial W}{\partial x_{11}} \\ \dfrac{\partial W}{\partial x_{12}} \\ \dfrac{\partial W}{\partial x_{22}} \\ \dfrac{\partial W}{\partial x_{21}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Полное дифференцирование этой системы по транспортным издержкам τ дает

$$\frac{dW'}{d\tau} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

т.е.

$$W'' \equiv \begin{pmatrix} \dfrac{dx_{11}}{d\tau} \\ \dfrac{dx_{12}}{d\tau} \\ \dfrac{dx_{22}}{d\tau} \\ \dfrac{dx_{21}}{d\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 W}{\partial x_{11}\partial\tau} \\ \dfrac{\partial^2 W}{\partial x_{12}\partial\tau} \\ \dfrac{\partial^2 W}{\partial x_{22}\partial\tau} \\ \dfrac{\partial^2 W}{\partial x_{21}\partial\tau} \end{pmatrix}.$$

Прежде всего установим следующий простой факт.

Утверждение 1. *В симметричной ситуации общественной оптимальности полное общественное благосостояние*

$$W^{opt} = W_1^{opt} + W_2^{opt}$$

убывает с ростом транспортных издержек, т.е.

$$\frac{dW^{opt}}{d\tau} \le 0.$$

Таким образом, в отличие от симметричного рыночного равновесия, в симметричной общественной оптимальности *общее* общественное благосостояние *всегда убывает с ростом транспортных издержек*.

Что касается общественной оптимальности в каждом регионе, то здесь дело обстоит значительно сложнее. Более того, в общем случае исследовать не удается. Поэтому рассматриваются два «предельных» и важных случая: свободы торговли и автаркии.

2.4.1. Симметричная оптимальность: случай свободы торговли

Напоминаем, что в ситуации свободы торговли, т.е. когда $\tau = 1$, имеем

$$x_{11}^{opt} = x_{12}^{opt} = x_{22}^{opt} = x_{21}^{opt},$$
$$Q_1^{opt} = Q_2^{opt} = (L_1 + L_2)x_{11}^{opt}.$$

Утверждение 2. *В симметричной ситуации общественной оптимальности в случае свободы торговли*

1) эластичность общественного благосостояния W_1^{opt} в регионе 1 равна

$$E_{W_1^{opt}} = -\frac{L_2}{(L_1 + L_2)^2}(2L_1 r_u + L_2 - L_1)\frac{\varepsilon_u}{r_u};$$

2) эластичность общественного благосостояния W_2^{opt} в регионе 2 отрицательна и равна

$$E_{W_2^{opt}} = -\frac{L_2}{(L_1 + L_2)^2}(2L_2 r_u + L_1 - L_2)\frac{\varepsilon_u}{r_u} < 0;$$

3) эластичность общего общественного благосостояния $W^{opt} = W_1^{opt} + W_2^{opt}$ *отрицательна и равна*

$$E_{W^{opt}} = -\frac{2L_1L_2}{(L_1+L_2)^2}\varepsilon_u \in (-\varepsilon_u, 0) \subseteq (-1, 0).$$

Замечание. *В формулах Утверждения 2 нет в явном виде производственных издержек* $V(\cdot)$. *Поэтому они верны не только для линейных производственных издержек, но и для нелинейных.*

Таким образом, в регионе 2 общественное благосостояние убывает вблизи свободы торговли, что согласуется с интуицией. Однако Утверждение 2 не дает исчерпывающей информации о поведении общественного благосостояния в регионе 1. Более того, нижеследующий пример показывает, что Утверждение 2 является «неулучшаемым», поскольку в регионе 1 общественное благосостояние может как убывать, так и возрастать.

Пример. *Пусть* $L_1 = 3$, $L_2 = 1$,

$$u(\xi) = 4(1+\xi)^{0,5} - \xi - 4,$$
$$V(\eta) = c \cdot \eta + 1.$$

Тогда $Q_1^{opt} = 4x_{11}^{opt}$, *а условие первого порядка дает*

$$\frac{2(1+x_{11}^{opt})^{-0,5}-1}{4(1+x_{11}^{opt})^{0,5}-x_{11}^{opt}-4}x_{11}^{opt} = \frac{4cx_{11}^{opt}}{4cx_{11}^{opt}+1}.$$

Более того,

$$r_u(x_{11}^{opt}) = \frac{(1+x_{11}^{opt})^{-0,5}x_{11}^{opt}}{2(1+x_{11}^{opt})^{-0,5}-1},$$

$$E_{W_1^{opt}} \ge 0 \Leftrightarrow r_u(x_{11}^{opt}) \le \frac{1}{3}.$$

Пусть

$$c = \frac{21}{4},$$

тогда

$$x_{11}^{opt} = \frac{15}{49},\ \sqrt{1+x_{11}^{opt}} = \frac{8}{7},\ r_u(x_{11}^{opt}) = \frac{35}{128} < \frac{1}{3}.$$

Пусть

$$c = \frac{5}{2},$$

тогда

$$x_{11}^{opt} = \frac{11}{25},\ \sqrt{1+x_{11}^{opt}} = \frac{6}{5},\ r_u(x_{11}^{opt}) = \frac{55}{144} > \frac{1}{3}.$$

2.4.2. Симметричная оптимальность при линейных производственных издержках: случай автаркии

Прежде всего напомним, что в ситуации рыночного равновесия *предполагается выполнение торгового баланса*. Поэтому если регион 1 не ввозит товары в регион 2, то регион 2 не ввозит товары в регион 1. Иными словами, при некотором τ регион 1 перестает ввозить товары в регион 2, а регион 2 перестает ввозить товары в регион 1.

Совсем другая ситуация возникает при общественной оптимальности. Здесь *не предполагается выполнение торгового баланса*. Поэтому в каждом из регионов сальдо торгового баланса может быть как отрицательным, так и положительным. Это приводит к различным ситуациям так называемой «предавтаркии»: при некотором τ

1) регион 1 продолжает ввозить товары в регион 2, а регион 2 перестает ввозить товары в регион 1;

2) регион 1 перестает ввозить товары в регион 2, а регион 2 продолжает ввозить товары в регион 1;

3) регион 1 перестает ввозить товары в регион 2, а регион 2 перестает ввозить товары в регион 1.

Формально эти случаи могут быть записаны так:

1) существуют такие τ_1 и τ_2, что $1 < \tau_1 < \tau_2$ и

$$x_{21}^{opt}(\tau) > 0,\ \ \tau < \tau_1,\ \ x_{21}^{opt}(\tau_1) = 0,\ \ x_{12}^{opt}(\tau) > 0,\ \ \tau < \tau_2,\ x_{21}^{opt}(\tau_2) = 0;$$

2) существуют такие τ_1 и τ_2, что $1 < \tau_1 < \tau_2$ и

$$x_{12}^{opt}(\tau) > 0,\ \ \tau < \tau_1,\ \ x_{12}^{opt}(\tau_1) = 0,\ \ x_{21}^{opt}(\tau) > 0,\ \ \tau < \tau_2,\ x_{21}^{opt}(\tau_2) = 0;$$

3) существует τ_{aut}, такое что

$$x_{12}^{opt}(\tau) > 0,\ \ \tau < \tau_{aut},\ \ x_{12}^{opt}(\tau) > 0,\ \ \tau < \tau_{aut},\ \ x_{12}^{opt}(\tau_{aut}) = x_{21}^{opt}(\tau_{aut}) = 0.$$

Утверждение 3. *Рассмотрим ситуацию симметричной общественной оптимальности.*

1. Пусть существуют такие τ_1 *и* τ_2, *что* $1 < \tau_1 < \tau_2$ *и*

$$x_{21}^{opt}(\tau) > 0,\ \ \tau < \tau_1,\ \ x_{21}^{opt}(\tau_1) = 0,\ \ x_{12}^{opt}(\tau) > 0,\ \ \tau < \tau_2,\ x_{21}^{opt}(\tau_2) = 0.$$

Тогда при $\tau = \tau_2$

$$\frac{dW_1^{opt}}{d\tau} = -\frac{dW_2^{opt}}{d\tau} > 0.$$

2. Пусть существуют такие τ_1 *и* τ_2, *что* $1 < \tau_1 < \tau_2$ *и*

$$x_{12}^{opt}(\tau) > 0,\ \ \tau < \tau_1,\ \ x_{12}^{opt}(\tau_1) = 0,\ \ x_{21}^{opt}(\tau) > 0,\ \ \tau < \tau_2,\ x_{21}^{opt}(\tau_2) = 0.$$

Тогда при $\tau = \tau_2$

$$\frac{dW_1^{opt}}{d\tau} = -\frac{dW_2^{opt}}{d\tau} < 0.$$

3. Пусть существует τ_{aut}, *такое что*

$$x_{12}^{opt}(\tau) > 0,\ \ \tau < \tau_{aut},\ \ x_{12}^{opt}(\tau) > 0,\ \ \tau < \tau_{aut},\ \ x_{12}^{opt}(\tau_{aut}) = x_{21}^{opt}(\tau_{aut}) = 0.$$

Тогда при $\tau = \tau_{aut}$

$$\frac{dW_1^{opt}}{d\tau} = -\frac{dW_2^{opt}}{d\tau} = 0.$$

Таким образом, вблизи *полной* автаркии:

в случаях 1 и 2 (которые возможны лишь при ненулевом сальдо торгового баланса) общественное состояние в одном регионе возрастает, а в другом убывает;

в случае 3 общественное благосостояние в каждом регионе достигает своего минимума;

во всех случаях полное общественное благосостояние достигает своего минимума.

3. Доказательства

3.1. Доказательство утверждения 1

Поскольку в ситуации симметричной общественной оптимальности

$$\frac{\partial W^{opt}}{\partial x_{11}} \equiv \frac{L_1^2}{V(Q_1^{opt})}\left(u'(x_{11}^{opt}) - \frac{V'(Q_1^{opt})}{V(Q_1^{opt})}\left(L_1 u(x_{11}^{opt}) + L_2 u(x_{12}^{opt}) \right) \right) = 0;$$

$$\frac{\partial W^{opt}}{\partial x_{12}} \equiv \frac{L_1 L_2}{V(Q_1^{opt})}\left(u'(x_{12}^{opt}) - \frac{\tau V'(Q_1^{opt})}{V(Q_1^{opt})}\left(L_1 u(x_{11}^{opt}) + L_2 u(x_{12}^{opt}) \right) \right) = 0;$$

$$\frac{\partial W^{opt}}{\partial x_{22}} \equiv \frac{L_2^2}{V(Q_2^{opt})}\left(u'(x_{22}^{opt}) - \frac{V'(Q_2^{opt})}{V(Q_2^{opt})}\left(L_2 u(x_{22}^{opt}) + L_1 u(x_{21}^{opt}) \right) \right) = 0;$$

$$\frac{\partial W^{opt}}{\partial x_{21}} \equiv \frac{L_1 L_2}{V(Q_2^{opt})}\left(u'(x_{21}^{opt}) - \frac{\tau V'(Q_2^{opt})}{V(Q_2^{opt})}\left(L_2 u(x_{22}^{opt}) + L_1 u(x_{21}^{opt}) \right) \right) = 0;$$

$$Q_1^{opt} = L_1 x_{11}^{opt} + \tau L_2 x_{12}^{opt}, \; Q_2^{opt} = L_2 x_{22}^{opt} + \tau L_1 x_{21}^{opt},$$

то

$$\frac{dW^{opt}}{d\tau} = \frac{\partial W^{opt}}{\partial \tau} = -L_1 V'(Q_1^{opt}) \frac{L_1 u(x_{11}^{opt}) + L_2 u(x_{12}^{opt})}{\left(V(Q_1^{opt}) \right)^2} \cdot \frac{\partial Q_1^{opt}}{\partial \tau} -$$

$$-L_2 V'(Q_2^{opt}) \frac{L_2 u(x_{22}^{opt}) + L_1 u(x_{21}^{opt})}{\left(V(Q_2^{opt}) \right)^2} \cdot \frac{\partial Q_2^{opt}}{\partial \tau} =$$

$$= -L_1 L_2 \frac{L_1 u(x_{11}^{opt}) + L_2 u(x_{12}^{opt})}{\left(V(Q_1^{opt}) \right)^2} V'(Q_1^{opt}) x_{12}^{opt} -$$

$$-L_1 L_2 \frac{L_2 u(x_{22}^{opt}) + L_1 u(x_{21}^{opt})}{\left(V(Q_2^{opt}) \right)^2} V'(Q_{21}^{opt}) x_2^{opt} =$$

$$= -\frac{L_1 L_2}{\tau}\left(\frac{u'(x_{12}^{opt}) x_{12}^{opt}}{V(Q_1^{opt})} + \frac{u'(x_{21}^{opt}) x_{21}^{opt}}{V(Q_2^{opt})} \right) \le 0.$$

Утверждение 1 доказано.

3.2. Доказательство утверждения 2

Обозначим

$$u = u(x_{11}^{opt}),\ \ V = V(Q_1^{opt}).$$

Тогда в ситуации симметричной общественной оптимальности

$$\frac{\partial W^{opt}}{\partial x_{11}} = \frac{L_1^2 u}{V}\left(\frac{u'}{u} - \frac{(L_1+L_2)V'}{V}\right) = \frac{L_1}{L_2}\cdot\frac{\partial W^{opt}}{\partial x_{12}} = \frac{L_1^2}{L_2^2}\cdot\frac{\partial W^{opt}}{\partial x_{22}} = \frac{L_1}{L_2}\cdot\frac{\partial W^{opt}}{\partial x_{22}}.$$

Поэтому все условия первого порядка – это одно условие

$$\varepsilon_u = \varepsilon_V.$$

Что касается условий второго порядка, то

$$\frac{\partial^2 W^{opt}}{\partial x_{11}^2} = \frac{L_1^2 u'}{VQ_1^{opt}}(L_1 r_V - (L_1+L_2) r_u) = \frac{L_1}{L_2}\cdot\frac{\partial^2 W^{opt}}{\partial x_{21}^2};$$

$$\frac{\partial^2 W^{opt}}{\partial x_{12}^2} = \frac{L_1 L_2 u'}{VQ_1^{opt}}(L_2 r_V - (L_1+L_2) r_u) = \frac{L_1}{L_2}\cdot\frac{\partial^2 W^{opt}}{\partial x_{22}^2};$$

$$\frac{\partial^2 W^{opt}}{\partial x_{11}\partial x_{12}} = L_1^2 L_2\,\frac{u' r_V}{VQ_1^{opt}} = \frac{L_1}{L_2}\cdot\frac{\partial^2 W^{opt}}{\partial x_{22}\partial x_{21}};$$

$$\frac{\partial^2 W^{opt}}{\partial x_{11}^2}\cdot\frac{\partial^2 W^{opt}}{\partial x_{12}^2} - \left(\frac{\partial^2 W^{opt}}{\partial x_{11}\partial x_{12}}\right)^2 = L_1^3 L_2 (r_u - r_V)\left(\frac{u'}{Vx_{11}^{opt}}\right)^2 r_u;$$

$$\frac{\partial^2 W^{opt}}{\partial x_{22}^2}\cdot\frac{\partial^2 W^{opt}}{\partial x_{21}^2} - \left(\frac{\partial^2 W^{opt}}{\partial x_{22}\partial x_{21}}\right)^2 = L_1 L_2^3 (r_u - r_V)\left(\frac{u'}{Vx_{11}^{opt}}\right)^2 r_u.$$

Поэтому условия второго порядка – это условие

$$r_u = r_V.$$

Кроме того,

$$\frac{\partial^2 W^{opt}}{\partial x_{11}\partial \tau} = \frac{L_1^2 L_2}{L_1+L_2}\cdot\frac{\varepsilon_u u'}{V} = \frac{L_1}{L_2}\cdot\frac{\partial^2 W^{opt}}{\partial x_{22}\partial \tau};$$

$$\frac{\partial^2 W^{opt}}{\partial x_{12}\partial \tau} = \frac{L_1 L_2^2}{L_1+L_2}\cdot\frac{u'}{V}\left(\varepsilon_u - \frac{L_1+L_2}{L_2}\right) = \frac{L_2}{L_1}\cdot\frac{\partial^2 W^{opt}}{\partial x_{21}\partial \tau};$$

Поэтому

$$E_{x_{11}^{opt}} = \frac{L_2}{L_1+L_2}\cdot\frac{\varepsilon_u r_u - r_V}{(r_u - r_V) r_u} = \frac{L_2}{L_1} E_{x_{22}^{opt}};$$

$$E_{x_{12}^{opt}} = \frac{1}{(L_1+L_2) r_u}\left(L_2\frac{(\varepsilon_u - 1) r_u}{r_u - r_V} - L_1\right) < \frac{L_2}{L_1+L_2}\cdot\frac{\varepsilon_u - 1}{r_u - r_V} < 0;$$

$$E_{x_{21}^{opt}} = \frac{1}{(L_1+L_2) r_u}\left(L_1\frac{(\varepsilon_u - 1) r_u}{r_u - r_V} - L_2\right) < \frac{L_1}{L_1+L_2}\cdot\frac{\varepsilon_u - 1}{r_u - r_V} < 0;$$

$$E_{Q_1^{opt}} = \frac{L_2}{L_1 + L_2} \cdot \frac{1 - \varepsilon_u - r_u + r_V}{r_u - r_V} = \frac{L_2}{L_1} E_{Q_2^{opt}};$$

$$E_{N_1^{opt}} = \frac{L_2}{L_1 + L_2} \cdot \frac{1 - \varepsilon_u - r_u + r_V}{r_u - r_V} \varepsilon_u = \frac{L_2}{L_1} E_{N_2^{opt}};$$

$$\frac{dW_1^{opt}}{d\tau} = -\frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \cdot \frac{u' x_{11}^{opt}}{V r_u} (2L_1 r_u + L_2 - L_1);$$

$$\frac{dW_2^{opt}}{d\tau} = -\frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \cdot \frac{u' x_{11}^{opt}}{V r_u} (2L_2 r_u + L_1 - L_2) < 0;$$

$$\frac{dW^{opt}}{d\tau} = -2L_1 L_2 \frac{u \varepsilon_u}{V} < 0.$$

В терминах эластичностей:

$$E_{W_1^{opt}} = -\frac{L_2}{(L_1 + L_2)^2} (2L_1 r_u + L_2 - L_1) \frac{\varepsilon_u}{r_u},$$

$$E_{W_2^{opt}} = -\frac{L_1}{(L_1 + L_2)^2} (2L_2 r_u + L_1 - L_2) \frac{\varepsilon_u}{r_u} < 0,$$

$$E_{W^{opt}} = -\frac{2L_1 L_2}{(L_1 + L_2)^2} \varepsilon_u \in (-\varepsilon_u, 0) \subseteq (-1, 0).$$

Утверждение 2 доказано.

3.3. Доказательство утверждения 3

В случае 1 непосредственными вычислениями получаем при $\tau = \tau_2$:

$$\frac{dW_1^{opt}}{d\tau} = -L_1 L_2 \frac{u'(0)}{V(Q_1^{opt})} \cdot \frac{dx_{12}^{opt}}{d\tau} = -\frac{dW_2^{opt}}{d\tau} > 0.$$

В случае 2 непосредственными вычислениями получаем при $\tau = \tau_2$:

$$\frac{dW_1^{opt}}{d\tau} = -L_1 L_2 \frac{u'(0)}{V(Q_2^{opt})} \cdot \frac{dx_{21}^{opt}}{d\tau} = -\frac{dW_2^{opt}}{d\tau} < 0.$$

Случай 3 является «пограничным» между случаями 1 и 2.

Утверждение 3 доказано.

Заключение

В статье изучается однородная модель межрегиональной торговли между двумя регионами в рамках монополистической конкуренции. Функция полезности для каждого потребителя предполагается аддитивно-сепарабельной. Рассматривается ситуация общественной оптимальности и исследуются два предельных случая: свободы торговли и автаркии.

Хотя полное общественное благосостояние уменьшается (ожидаемо) относительно транспортных издержек, установлены два контринтуитивных результата – с увеличением транспортных издержек расходы увеличиваются:

вблизи свободы торговли общественное благосостояние возрастает в большом регионе;

вблизи полной автаркии общественное благосостояние может возрастать как в большом, так и в малом регионе.

Отметим, что представляет интерес исследование более сложных случаев: неаддитивные функции полезности [9, 34]; нелинейные производственные издержки [13,14]; гетерогенный случай [17, 18, 28].

Список источников

1. *Антощенкова И.В., Быкадоров И.А.* Модель монополистической конкуренции: влияние технологического прогресса на равновесие и общественную оптимальность // Математическая теория игр и ее приложения. 2014. Т. 6. Вып. 2. С. 3–31.
2. *Быкадоров И.А., Исмайылова Ю.Н., Пудова М.В.* Рыночное равновесие в моделях межрегиональной торговли при монополистической конкуренции // Вестник НГУЭУ. 2022. № 3. С. 183–203.
3. *Arkolakis C., Costinot A., Donaldson D., Rodreguez-Clare A.* The Elusive Pro-Competitive Effects of Trade // The Review of Economic Studies. 2019. Vol. 86. P. 46–80.
4. *Arkolakis C., Costinot A., Rodreguez-Clare A.* New Trade Models, Same Old Gains? // American Economic Review. 2012. Vol. 102. P. 94–130.
5. *Behrens K., Murata Y.* General Equilibrium Models of Monopolistic Competition: a New Approach // Journal of Economic Theory. 2007. Vol. 136. P. 776–787.
6. *Brander J., Krugman P.* A `Reciprocal Dumping' Model of International Trade // Journal of international economics. 1983. Vol. 15. No. 3-4. P. 313–321.
7. *Bykadorov I.* Monopolistic Competition Model with Different Technological Innovation and Consumer Utility Levels // CEUR Workshop Proceeding. 2017. Vol. 1987. P. 108–114.
8. *Bykadorov I.* Monopolistic competition with investments in productivity // Optimization Letters. 2019. Vol. 13. Iss. 8. P. 1803–1817.
9. *Bykadorov I., Ellero A. Funari S., Kokovin S., Pudova M.* Chain Store Against Manufacturers: Regulation Can Mitigate Market Distortion // Lecture Notes in Computer Science. 2016. Vol. 9869. P. 480–493.
10. *Bykadorov I., Ellero A., Funari S., Moretti E.* Dinkelbach Approach to Solving a Class of Fractional Optimal Control Problems // Journal of Optimization Theory and Applications. 2009. Vol. 142. No. 1. P. 55–66.
11. *Bykadorov I., Ellero A., Moretti E.* Minimization of communication expenditure for seasonal products // RAIRO Operations Research. 2002. Vol. 36. No. 2. P. 109–127.
12. *Bykadorov I., Ellero A., Moretti E., Vianello S.* The role of retailer's performance in optimal wholesale price discount policies // European Journal of Operational Research. 2009. Vol. 194. No. 2. P. 538–550.
13. *Bykadorov I., Gorn A., Kokovin S., Zhelobodko E.* Why are losses from trade unlikely? // Economics Letters. 2015. Vol. 129. P. 35–38.
14. *Bykadorov I., Kokovin S.* Can a larger market foster R&D under monopolistic competition with variable mark-ups? // Research in Economics. 2017. Vol. 71. No. 4. P. 663–674.
15. *Chamberlin E.H.* The Theory of Monopolistic Competition: A Re-Orientation of the Theory of Value, 1st. ed., Harvard University Press, Cambridge, MA, 1933.

16. *Chamberlin E.H.* The Theory of Monopolistic Competition. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1962.
17. *Demidova S.* Trade Policies, Firm Heterogeneity, and Variable Markups // Journal of International Economics. 2017. Vol. 108. No. 8. P. 260–273.
18. *Demidova S., Rodriguez-Clare A.* Trade Policy under Firm-Level Heterogeneity in a Small Economy // Journal of International Economics. 2009. Vol. 78. No. 1. P. 100–112.
19. *Dhingra S.* Trading Away Wide Brands for Cheap Brands // American Economic Review. 2013. Vol. 103. No. 6. P. 2554–2584.
20. *Dhingra S., Morrow J.* Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity under Firm Heterogeneity // Journal of Political Economy. 2019. Vol. 127. No. 1. P. 196–232.
21. *Dixit A.K., Stiglitz J.E.* Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity // American Economic Review. 1977. Vol. 67. No. 3. P. 297–308.
22. *Feenstra R.C.* A Homothetic Utility Function for Monopolistic Competition Models, without Constant Price Elasticity // Economics Letters. 2003. Vol. 78. No. 1. P. 79–86.
23. *Feldman A.M., Serrano R.* Welfare Economics and Social Choice Theory. 2nd ed. Springer, Brown University, Providence, US, 2006.
24. *Kokovin S., Molchanov P., Bykadorov I.* Increasing Returns, Monopolistic Competition, and International Trade: Revisiting Gains from Trade // Journal of International Economics. 2022. Vol. 137. No. 103595.
25. *Krugman P.* Increasing Returns, Monopolistic Competition, and International Trade // Journal of International Economics. 1979. Vol. 9. No. 4. P. 469–479.
26. *Krugman P.* Scale Economies, Product Differentiation, and the Pattern of Trade // American Economic Review. 1980. Vol. 70. No. 5. P. 950–959.
27. *Melitz M.J., Ottaviano G.I.P.* Market Size, Trade, and Productivity // Review of Economic Studies. 2008. Vol. 75. No. 1. P. 295–316.
28. *Melitz M.J.* The Impact of Trade on Intra-Industry Reallocations and Aggregate Industry Productivity // Econometrica. 2003. Vol. 71. No. 6. P. 1695–1725.
29. *Melitz M.J., Redding S.J.* Missing Gains from Trade? // American Economic Review. 2014. Vol. 104. No. 5. P. 317–321.
30. *Melitz M.J., Redding S.J.* New Trade Models, New Welfare Implications // American Economic Review. 2015. Vol. 105. No. 3. P. 1105–1146.
31. *Moulin H.* Fair Division and Collective Welfare. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 2004.
32. *Mrazova M., Neary J.P.* Together at Last: Trade Costs, Demand Structure, and Welfare // American Economic Review. 2014. Vol. 104. No. 5. P. 298–303.
33. *Mrazova M., Neary J.P.* Not so demanding: Demand Structure and Firm Behavior // American Economic Review. 2017. Vol. 107. No. 12. P. 3835–3874.
34. *Ottaviano G.I.P., Tabuchi T., Thisse J.-F.* Agglomeration and trade revised // International Economic Review. 2002. Vol. 43. P. 409–436.
35. *Zhelobodko E., Kokovin S., Parenti M., Thisse J.-F.* Monopolistic competition in general equilibrium: Beyond the Constant Elasticity of Substitution // Econometrica. 2012. Vol. 80. No. 6. P. 2765–2784.

References

1. Antoshhenkova I.V., Bykadorov I.A. Model’ monopolisticheskoj konkurencii: vlijanie tehnologicheskogo progressa na ravnovesie i obshhestvennuju optimal’nost’ [Model of monopolistic competition: the impact of technological progress on equilibrium and social optimality], *Matematicheskaja teorija igr i ee prilozhenija* [Mathematical game theory and its applications], 2014, vol. 6, Iss. 2, pp. 3–31.
2. Bykadorov I.A., Ismajylova Ju.N., Pudova M.V. Rynochnoe ravnovesie v modelyakh mezhregional’noj torgovli pri monopolisticheskoj konkurencii [Market equilibrium in

interregional trade models under monopolistic competition], *Vestnik NGUJeU* [Vestnik NSUEM]. 2022, no. 3, pp. 183–203.
3. Arkolakis C., Costinot A., Donaldson D., Rodreguez-Clare A. The Elusive Pro-Competitive Effects of Trade // The Review of Economic Studies. 2019. Vol. 86. P. 46–80.
4. Arkolakis C., Costinot A., Rodreguez-Clare A. New Trade Models, Same Old Gains? // American Economic Review. 2012. Vol. 102. P. 94–130.
5. Behrens K., Murata Y. General Equilibrium Models of Monopolistic Competition: a New Approach // Journal of Economic Theory. 2007. Vol. 136. P. 776–787.
6. Brander J., Krugman P. A `Reciprocal Dumping' Model of International Trade // Journal of international economics. 1983. Vol. 15. No. 3-4. P. 313–321.
7. Bykadorov I. Monopolistic Competition Model with Different Technological Innovation and Consumer Utility Levels // CEUR Workshop Proceeding. 2017. Vol. 1987. P. 108–114.
8. Bykadorov I. Monopolistic competition with investments in productivity // Optimization Letters. 2019. Vol. 13. Iss. 8. P. 1803–1817.
9. Bykadorov I., Ellero A. Funari S., Kokovin S., Pudova M. Chain Store Against Manufacturers: Regulation Can Mitigate Market Distortion // Lecture Notes in Computer Science. 2016. Vol. 9869. P. 480–493.
10. Bykadorov I., Ellero A., Funari S., Moretti E. Dinkelbach Approach to Solving a Class of Fractional Optimal Control Problems // Journal of Optimization Theory and Applications. 2009. Vol. 142. No. 1. P. 55–66.
11. Bykadorov I., Ellero A., Moretti E. Minimization of communication expenditure for seasonal products // RAIRO Operations Research. 2002. Vol. 36. No. 2. P. 109–127.
12. Bykadorov I., Ellero A., Moretti E., Vianello S. The role of retailer's performance in optimal wholesale price discount policies // European Journal of Operational Research. 2009. Vol. 194. No. 2. P. 538–550.
13. Bykadorov I., Gorn A., Kokovin S., Zhelobodko E. Why are losses from trade unlikely? // Economics Letters. 2015. Vol. 129. P. 35–38.
14. Bykadorov I., Kokovin S. Can a larger market foster R&D under monopolistic competition with variable mark-ups? // Research in Economics. 2017. Vol. 71. No. 4. P. 663–674.
15. Chamberlin E.H. The Theory of Monopolistic Competition: A Re-Orientation of the Theory of Value, 1st. ed., Harvard University Press, Cambridge, MA, 1933.
16. Chamberlin E.H. The Theory of Monopolistic Competition. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1962.
17. Demidova S. Trade Policies, Firm Heterogeneity, and Variable Markups // Journal of International Economics. 2017. Vol. 108. No. 8. P. 260–273.
18. Demidova S., Rodriguez-Clare A. Trade Policy under Firm-Level Heterogeneity in a Small Economy // Journal of International Economics. 2009. Vol. 78. No. 1. P. 100–112.
19. Dhingra S. Trading Away Wide Brands for Cheap Brands // American Economic Review. 2013. Vol. 103. No. 6. P. 2554–2584.
20. Dhingra S., Morrow J. Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity under Firm Heterogeneity // Journal of Political Economy. 2019. Vol. 127. No. 1. P. 196–232.
21. Dixit A.K., Stiglitz J.E. Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity // American Economic Review. 1977. Vol. 67. No. 3. P. 297–308.
22. Feenstra R.C. A Homothetic Utility Function for Monopolistic Competition Models, without Constant Price Elasticity // Economics Letters. 2003. Vol. 78. No. 1. P. 79–86.
23. Feldman A.M., Serrano R. Welfare Economics and Social Choice Theory. 2nd ed. Springer, Brown University, Providence, US, 2006.
24. Kokovin S., Molchanov P., Bykadorov I. Increasing Returns, Monopolistic Competition, and International Trade: Revisiting Gains from Trade // Journal of International Economics. 2022. Vol. 137. No. 103595.

25. Krugman P. Increasing Returns, Monopolistic Competition, and International Trade // Journal of International Economics. 1979. Vol. 9. No. 4. P. 469–479.
26. Krugman P. Scale Economies, Product Differentiation, and the Pattern of Trade // American Economic Review. 1980. Vol. 70. No. 5. P. 950–959.
27. Melitz M.J., Ottaviano G.I.P. Market Size, Trade, and Productivity // Review of Economic Studies. 2008. Vol. 75. No. 1. P. 295–316.
28. Melitz M.J. The Impact of Trade on Intra-Industry Reallocations and Aggregate Industry Productivity // Econometrica. 2003. Vol. 71. No. 6. P. 1695–1725.
29. Melitz M.J., Redding S.J. Missing Gains from Trade? // American Economic Review. 2014. Vol. 104. No. 5. P. 317–321.
30. Melitz M.J., Redding S.J. New Trade Models, New Welfare Implications // American Economic Review. 2015. Vol. 105. No. 3. P. 1105–1146.
31. Moulin H. Fair Division and Collective Welfare. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 2004.
32. Mrazova M., Neary J.P. Together at Last: Trade Costs, Demand Structure, and Welfare // American Economic Review. 2014. Vol. 104. No. 5. P. 298–303.
33. Mrazova M., Neary J.P. Not so demanding: Demand Structure and Firm Behavior // American Economic Review. 2017. Vol. 107. No. 12. P. 3835–3874.
34. Ottaviano G.I.P., Tabuchi T., Thisse J.-F. Agglomeration and trade revised // International Economic Review. 2002. Vol. 43. P. 409–436.
35. Zhelobodko E., Kokovin S., Parenti M., Thisse J.-F. Monopolistic competition in general equilibrium: Beyond the Constant Elasticity of Substitution // Econometrica. 2012. Vol. 80. No. 6. P. 2765–2784.

Сведения об авторах:

И.А. Быкадоров – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры бизнес-аналитики и статистики, Сибирский институт управления – филиал Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации, Новосибирск, Российская Федерация.

Ю.Н. Исмайылова – кандидат экономических наук, доцент кафедры бизнес-аналитики и статистики, Сибирский институт управления – филиал Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации, Новосибирск, Российская Федерация.

М.В. Пудова – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры бизнес-аналитики и статистики, Сибирский институт управления – филиал Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации, Новосибирск, Российская Федерация.

С.Е. Хрущев – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры бизнес-аналитики и статистики, Сибирский институт управления – филиал Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации, Новосибирск, Российская Федерация.

Information about the authors:

I.A. Bykadorov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Business Analytics and Statistics, Siberian Institute of Management – branch of the Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration, Novosibirsk, Russian Federation.

Yu. N. Ismaiylova – Candidate of Economic Sciences, Associate Professor of the Department of Business Analytics and Statistics, Siberian Institute of Management – branch of the Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration, Novosibirsk, Russian Federation.

M.V. Pudova – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Business Analytics and Statistics, Siberian Institute of Management – branch of the Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration, Novosibirsk, Russian Federation.

S.E. Khruschev – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Business Analytics and Statistics, Siberian Institute of Management – branch of the Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration, Novosibirsk, Russian Federation.

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.
Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article.
The authors declare no conflicts of interests.

Статья поступила в редакцию	*16.06.2022*	*The article was submitted*	*16.06.2022*
Одобрена после рецензирования	*27.07.2022*	*Approved after reviewing*	*27.07.2022*
Принята к публикации	*12.08.2022*	*Accepted for publication*	*12.08.2022*