

ТЕЧЕНИЕ В ГИПЕРЗВУКОВОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НА ТРЕУГОЛЬНОМ КРЫЛЕ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ ПРИ НАЛИЧИИ УГЛА АТАКИ

Г. Н. Дудин

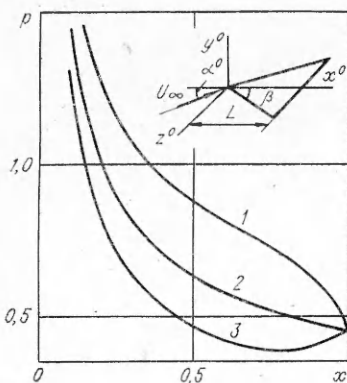
(Москва)

Исследование пространственных течений вязкого газа при гиперзвуковых скоростях полета имеет важное значение для определения аэродинамических характеристик. В многочисленных экспериментальных исследованиях (см., например, [1]) установлено, что характер течения в пограничном слое на плоских треугольных крыльях существенно зависит от величины параметра гиперзвукового взаимодействия $\chi = M_\infty^2 \text{Re}^{-1/2}$, где M_∞ — число Маха набегающего потока, $\text{Re} = \rho_\infty U_\infty L / \mu_0$ — число Рейнольдса, определяемое по значениям плотности и скорости в невозмущенном потоке, L — длине крыла и коэффициенту вязкости при температуре торможения. При этом можно рассмотреть два предельных режима течения. На режиме слабого взаимодействия ($\chi \sim 0,1$) даже при небольшом угле атаки на подветренной стороне треугольного крыла внутри пограничного слоя возникают вихри [2], которые сносятся вниз по потоку, а их взаимодействие с поверхностью тела приводит к увеличению трения и теплового потока. На режиме сильного вязкого взаимодействия ($\chi \geq 1$) [3], по крайней мере до умеренных углов атаки, на всем крыле реализуется присоединенное течение. Следует, однако, отметить, что в области вблизи вершины крыла характер течения в обоих случаях одинаков, так как в ней параметр $\chi \geq 1$ (число Рейнольдса следует вычислять по длине рассматриваемой области). Обтекание тонкой треугольной пластины на режиме сильного вязкого взаимодействия под нулевым углом атаки исследовалось теоретически в [4—7]. Рассмотрение течения около полубесконечной треугольной пластины позволяло свести краевую задачу к автомодельной, для решения которой применимы методы, развитые для двумерных задач. Однако при рассмотрении обтекания треугольного крыла под углом атаки на режиме сильного вязкого взаимодействия система уравнений остается трехмерной. В [8] получено решение системы уравнений Навье — Стокса около полубесконечного треугольного крыла под углом атаки, но при этом сделано предположение, что градиенты в радиальном направлении много меньше, чем в других, и краевая задача сведена к автомодельной.

1. В данной работе рассматривается обтекание гиперзвуковым потоком вязкого газа треугольного крыла конечной длины под углом атаки α° в предположении, что возмущенная часть течения содержит невязкий в первом приближении поток, который описывается гиперзвуковой теорией малых возмущений [9], и вязкий пограничный слой. Предполагается, что угол атаки мал ($\alpha^\circ < \tau$) и такой, что всегда выполняется предположение гиперзвуковой теории малых возмущений

$$(1.1) \quad M_\infty(\tau \pm \alpha^\circ) \geq O(1),$$

где $\tau = (s/\text{Re})^{1/4}$ — характерная безразмерная толщина пограничного слоя ($s = \text{tg } \beta$, β — полуугол при вершине крыла). Знак плюс в выражении (1.1) соответствует течению около нижней (наветренной) поверхности крыла, а знак минус — верхней (подветренной). Декартова система



Ф и г. 1

координат, начало которой расположено в вершине треугольного крыла (ось x^0 направлена вдоль оси симметрии, ось z^0 — по размаху, а ось y^0 — по нормали к поверхности крыла), приведена на фиг. 1. Предполагается, что на всем крыле взаимодействие пограничного слоя с внешним гиперзвуковым потоком является сильным ($\chi > 1$). Решение полной краевой задачи включает учет течения в следе, который образуется за крылом [10], однако в данной работе, чтобы не рассматривать это течение, краевое условие задается на задней кромке треугольного крыла. При этом следует иметь в виду, что при обтекании нехолодной пластины разложение в ряды решения в

окрестности передней кромки содержит произвольную функцию, так как течение докритическое [10], а поэтому для отбора единственного решения краевой задачи на задней кромке необходимо также задавать функцию.

В соответствии с обычными оценками для пограничного слоя в гиперзвуковом потоке [9] вводятся следующие безразмерные переменные: uU_∞ , wU_∞ , $v_w \tau s^{-1} U_\infty$ — проекции полной скорости на оси $x^0 = xL$, $z^0 = zsL$, $y^0 = y\tau L$, $\rho \tau^2 \rho_\infty$ — плотность, $p \tau^2 \rho_\infty U_\infty^2$ — давление, $gU_\infty^2/2$ — энтальпия торможения, $\mu \mu_0$ — динамический коэффициент вязкости, $\delta_e \tau L$ — толщина вытеснения пограничного слоя. Далее рассматривается случай линейной зависимости вязкости от температуры. Подстановка указанных переменных в уравнение Навье — Стокса и совершение предельного перехода $Re \rightarrow \infty$ приводят к уравнениям пространственного пограничного слоя, которые в переменных А. А. Дородницына имеют вид

$$(1.2) \quad \begin{aligned} su \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial \lambda} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{s}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\mu \rho \frac{\partial u}{\partial \lambda} \right), \\ su \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial \lambda} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\mu \rho \frac{\partial w}{\partial \lambda} \right), \\ su \frac{\partial g}{\partial x} + v \frac{\partial g}{\partial \lambda} + w \frac{\partial g}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left\{ \mu \rho \left[\frac{1}{\sigma} \frac{\partial g}{\partial \lambda} - \frac{1-\sigma}{\sigma} \frac{\partial (u^2 + w^2)}{\partial \lambda} \right] \right\}, \\ s \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \lambda} + \frac{\partial w}{\partial z} &= \bar{U}, \quad \rho = \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{g - u^2 - w^2}, \quad \mu = \bar{g} - \bar{u}^2 - \bar{w}^2, \\ \lambda &= \int_0^y \rho dy, \quad v = \rho v_w + w \frac{\partial \lambda}{\partial z} + su \frac{\partial \lambda}{\partial x}, \end{aligned}$$

где σ — число Прандтля; γ — отношение удельных теплоемкостей. Граничные условия при $|z| \leq x$, $0 \leq x \leq 1$: $u = v = w = 0$, $g = g_w$ ($\lambda = 0$); $u \rightarrow 1$, $w \rightarrow 0$, $g \rightarrow 1$ ($\lambda \rightarrow \infty$). Для решения этой системы уравнений необходимо знать распределение давления, которое не задано и должно определяться в процессе решения краевой задачи (1.2) совместно с уравнениями для внешнего невязкого течения, которое описывается гиперзвуковой теорией малых возмущений. Одновременное решение этих двух систем уравнений для вязкого и невязкого течений связано с большими трудностями. Так как в данной работе рассматривается обтекание крыла с удлинением $s \sim O(1)$ и для внешнего невязкого течения справедлива теория полос [9], то для определения давления можно использовать приближенную формулу касательного клина [9], например, в форме, справедливой при $M_\infty(\tau + \alpha^\circ) \gg 1$ ($\alpha^\circ = \alpha\tau$, $0 \leq d < 1$):

$$(1.3) \quad p = \frac{\gamma+1}{2} \left(\frac{\partial \delta_e}{\partial x} \pm \alpha \right)^2,$$

где δ_e — толщина вытеснения пограничного слоя, которая определяется выражением [4]:

$$(1.4) \quad \delta_e = \frac{\gamma-1}{2\gamma p} \int_0^\infty (g - u^2 - w^2) d\lambda.$$

2. Для численного решения краевой задачи (1.2) — (1.4) следует учесть особенности поведения функций течения в окрестности вершины треугольного крыла. Для этого вводятся следующие переменные:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} x &= x, \quad z = x\theta, \quad \lambda = x^{1/4} \lambda^*, \quad p = x^{-1/2} p^*(x, \theta), \\ \rho &= x^{-1/2} \rho^*(x, \lambda^*, \theta), \quad \delta_e = x^{3/4} \delta_e^*(x, \theta), \quad v = x^{-3/4} \left(v^* - xus \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Не приводя полную систему уравнений в переменных (2.1), заметим, что выражение для давления (1.3) принимает вид

$$p^*(x, \theta) = \frac{\gamma+1}{2} \left(\frac{3}{4} \delta_e^* + x \frac{\partial \delta_e^*}{\partial x} - \theta \frac{\partial \delta_e^*}{\partial \theta} \pm \alpha x^{1/4} \right)^2.$$

На поверхности крыла при $\alpha \neq 0$ и $x > 0$ из-за наличия члена $\alpha x^{1/4}$ в этом выражении давление оказывается функцией от x и θ , а функции течения в пограничном слое зависят от трех переменных: x , θ и λ . Таким образом, при наличии угла атаки система уравнений (1.2) — (1.4) в переменных (2.1) даже для полубесконечного крыла остается трехмерной в отличие от случая обтекания крыла под нулевым углом атаки, когда система уравнений трехмерного пограничного слоя (1.2) — (1.4) сводилась к системе, зависящей только от двух независимых переменных: θ и λ^* [7]. Для учета особенностей поведения функций течения на режиме сильного вязкого взаимодействия в окрестности передних кромок треугольного крыла ($\theta = \pm 1$) вводятся переменные:

$$(2.2) \quad \lambda^* = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} (1-\theta^2)^{1/2} \eta, \quad p^* = (1-\theta^2)^{-1/2} p_0(x, \theta),$$

$$\delta_e^* = (1-\theta^2)^{3/4} \Delta_e(x, \theta), \quad v^* = \left[v_0 \frac{p_0}{1-\theta^2} - (w - su\theta) \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right] \times$$

$$\times \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} (1-\theta^2)^{1/2}.$$

Система уравнений (1.2) — (1.4) с учетом (2.1) и (2.2) принимает вид

$$(2.3) \quad sux \frac{1-\theta^2}{p_0} \frac{\partial f}{\partial x} + (w - su\theta) \frac{1-\theta^2}{p_0} \frac{\partial f}{\partial \theta} + v_0 \frac{\partial f}{\partial \eta} = G,$$

$$f = \begin{Bmatrix} u \\ w \\ g \end{Bmatrix}, \quad G = \begin{cases} -s \frac{\gamma-1}{2\gamma p_0} (g - u^2 - w^2) \left[(1-\theta^2) \left(\frac{\partial \ln p_0}{\partial \ln x} - \frac{1}{2} \right) - \right. \\ \left. - \theta \left(\theta + \frac{1-\theta^2}{p_0} \frac{\partial p_0}{\partial \theta} \right) \right] + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \\ - \frac{\gamma-1}{2\gamma p_0} (g - u^2 - w^2) \left(\theta + \frac{1-\theta^2}{p_0} \frac{\partial p_0}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}, \\ \frac{1}{\sigma} \frac{\partial^2 g}{\partial \eta^2} - \frac{1-\sigma}{\sigma} \frac{\partial^2 (u^2 + w^2)}{\partial \eta^2} \end{cases}$$

$$\frac{\partial v_0}{\partial \eta} = (w - su\theta) \frac{\theta}{2p_0} \frac{1-\theta^2}{p_0} \left(sx \frac{\partial u}{\partial x} - s\theta \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{su}{4} \right),$$

$$p_0 = \frac{\gamma+1}{2} \left\{ \frac{3}{4} (1-\theta^2) \Delta_e + x(1-\theta^2) \frac{\partial \Delta_e}{\partial x} - \theta \left[(1-\theta^2) \frac{\partial \Delta_e}{\partial \theta} - \frac{3}{2} \theta \Delta_e \right] \pm \right.$$

$$\left. \pm \alpha x^{1/4} (1-\theta^2)^{1/4} \right\}^2,$$

$$\Delta_e = \sqrt{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \frac{1}{p_0} \int_0^\infty (g - u^2 - w^2) d\eta.$$

Граничные условия при $|\theta| \leq 1$ и $0 \leq x \leq 1$:

$$u = w = v_0 = 0, \quad g = g_w (\eta = 0); \quad u \rightarrow 1, \quad w \rightarrow 0, \quad g \rightarrow 1 (\eta \rightarrow \infty).$$

Система уравнений в частных производных (2.3) описывает течение в трехмерном пограничном слое на треугольном крыле конечной длины под углом атаки на режиме сильного вязкого взаимодействия. Следует отметить, что в вершине крыла ($x = 0$) в системе (2.3) члены, содержащие переменную x , выпадают и краевая задача оказывается зависящей только от двух независимых переменных θ и η . На передних кромках крыла при значениях поперечной координаты $\theta = \pm 1$ система (2.3) вырождается в системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Область интегрирования системы уравнений (2.3) представляет собой прямоугольный параллелепипед. Для решения краевой задачи (2.3) необходимо сначала решить системы обыкновенных дифференциальных уравнений на передних кромках крыла, затем, используя эти решения в

качестве краевых условий, решить систему уравнений в частных производных, зависящую от двух переменных и описывающую течение в вершине треугольного крыла. Наконец, с учетом краевого условия на задней кромке крыла, например распределения давления, и с учетом полученного решения в вершине крыла и на его передних кромках решается система уравнений трехмерного пограничного слоя (2.3). Заметим, что на задней кромке крыла при заданном распределении давления на ней $p_0^1(\theta)$ толщина вытеснения $\Delta_e(x, \theta)$, полученная в результате решения полной краевой задачи, должна удовлетворять соотношению

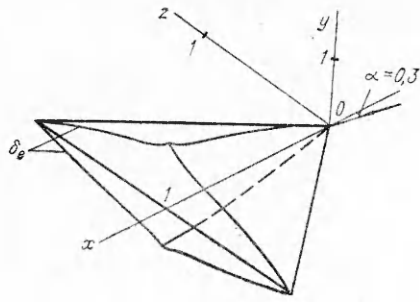
$$(2.4) \quad \frac{\gamma+1}{2} \left\{ \frac{3}{4} (1-\theta^2) \Delta_e + (1-\theta^2) \frac{\partial \Delta_e}{\partial x} - \theta \left[(1-\theta^2) \frac{\partial \Delta_e}{\partial \theta} - \frac{3}{2} \theta \Delta_e \right] \pm \right. \\ \left. \pm \alpha (1-\theta^2)^{1/4} \right\}^2 = p_0^1(\theta)$$

при значении продольной координаты $x = 1$. При решении полной краевой задачи, включая след, отбор единственного решения следует производить из условия выполнения некоторых соотношений, приведенных в [10], на «звуковой» поверхности, на которой происходит переход к закритическому режиму.

Для решения указанных систем дифференциальных уравнений используется метод конечных разностей. Для аппроксимации уравнений применяются разностные схемы второго порядка по $\Delta \eta$ и первого или второго порядка по $\Delta \theta$ и Δx , где $\Delta \eta$, $\Delta \theta$, Δx — шаги по координатам η , θ , x . Производные по координатам θ и x в уравнениях аппроксимируются в разностном виде с учетом знака коэффициента перед ними. Системы разностных уравнений для функций u , w и g решаются методом скалярной прогонки последовательно одна за другой. Причем система нелинейных уравнений заменяется линейной системой разностных уравнений на каждой итерации, для линеаризации используются релаксированные значения с предыдущей итерации [11]. Разностный аналог уравнения неразрывности приводит к разностному уравнению первого порядка, которое всегда аппроксимировалось со вторым порядком точности.

Итерационный процесс организован следующим образом. При некотором приближенном распределении давления $p_0(x, \theta)$, которое при $x = 1$ совпадает с заданным $p_0^1(\theta)$, решаются уравнения движения и энергии (2.3). Поскольку для учета передачи возмущений вверх по потоку для аппроксимации величин $\partial p_0 / \partial x$ использовались центральные разности при $x > 0$, то на последнем слое при $x = 1$ этот градиент давления не известен и подбирается в процессе решения полной краевой задачи (2.3) из условия выполнения соотношения (2.4). Полученные значения функций течения u , w и g и давление $p_0(x, \theta)$ используются для определения толщины вытеснения Δ_e . Затем из формулы касательного клина находится новое давление, и итерационный процесс продолжается, пока не будет достигнута требуемая точность. Как показали численные расчеты, для устойчивости разностной краевой задачи необходимо релаксировать как функции течения u , w и g , так и давление p_0 , причем коэффициенты релаксации оказались порядка $\varphi_1 = 0,2 - 0,5$ соответственно для u , w и g и $\varphi_2 = 0,02 - 0,05$ для p_0 . Следует отметить, что давление при значении $x = 1$, естественно, не релаксировалось. Итерации заканчивались, когда максимальное отличие на двух последующих итерациях для величин $p_0(x, \theta)$ (как наиболее медленно сходящейся величины) и отличие заданного давления на задней кромке $p_0^1(\theta)$ от давления, вычисленного на ней $p_0(x = 1, \theta)$, становились меньше, чем 10^{-4} . Для этого требовалось 300—400 итераций.

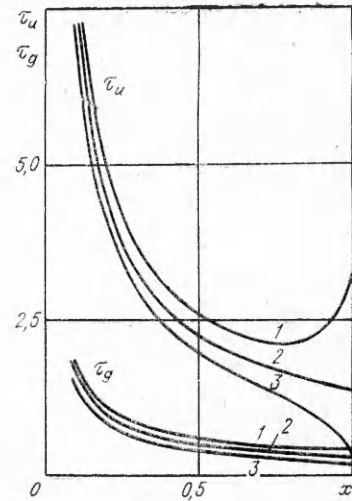
3. В данной работе в качестве примера рассматривается обтекание треугольного крыла, давление на задней кромке которого тождественно равняется давлению, соответствующему обтеканию полубесконечного треугольного крыла при значении координаты $x = 1$ и нулевом угле атаки [7].



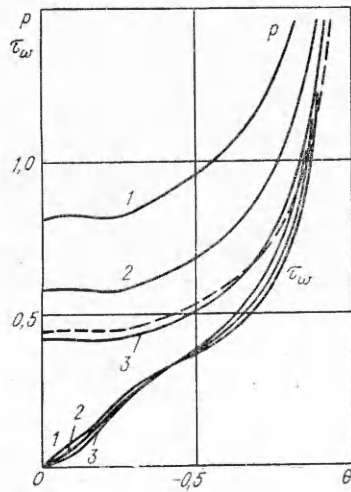
Ф и г. 2

В численных расчетах предполагалось, что $s = 2$ (угол стреловидности $\sim 27^\circ$), $\gamma = 1,4$, $\sigma = 0,71$, $g_w = 0,5$ и $\alpha = 0; 0,3$. На фиг. 1 представлены результаты расчета давления вдоль оси симметрии крыла ($z = 0$).

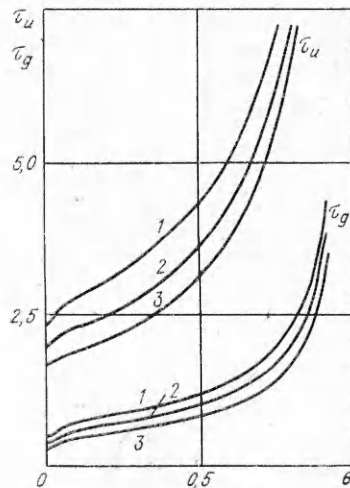
Значения p с $\alpha = -0,3$ соответствуют распределению давления на верхней поверхности крыла (кривая 3), а с $\alpha = 0,3$ — на нижней (кривая 1). Кривая 2 ($\alpha = 0$) соответствует обтеканию при нулевом угле атаки. Как и следовало ожидать, значения давления на наветренной поверхности крыла значительно больше, чем на подветренной; так, при $x = 0,5$ давление на нижней стороне почти в 2 раза больше, чем на верхней. Как показали численные расчеты, изменение величины давления на задней кромке оказывает влияние на течение вверх по потоку примерно на 30—40% хорды крыла. Таким образом, на поверхности крыла от вершины до значений продольной координаты $x = 0,6$ распределение давления зависит только от угла атаки (а также величин s , γ , σ и g_w), но не зависит от распределения давления, заданного на задней кромке, если это заданное давление не слишком велико, чтобы вызвать отрыв пограничного слоя на крыле. На фиг. 2 представлено распределение толщины вытеснения пограничного слоя $\delta_e(x, z)$ на крыле, обтекаемом под углом атаки $\alpha = 0,3$. На подветренной стороне происходит, как отмечалось и в экспериментальных исследованиях течений на режиме сильного вязкого взаимодействия [3], значительное возрастание $\delta_e(x, z)$ и уменьшение ее на наветренной стороне. Особенно сильные изменения толщины вытеснения происходят в окрестности плоскости симметрии. Результаты расчета коэффициента напряжения трения в продольном направлении $\tau_u = du/\partial y|_w$



Ф и г. 3



Ф и г. 4



Ф и г. 5

и теплового потока $\tau_g = \partial g / \partial y|_w$ на поверхности крыла вдоль оси симметрии $z = 0$ приведены на фиг. 3. Значения теплового потока и коэффициента напряжения трения на наветренной стороне крыла ($\alpha = 0,3$) значительно превышают их величины на подветренной стороне крыла ($\alpha = -0,3$). На нижней поверхности крыла в окрестности задней кромки наблюдается резкое возрастание величины τ_u , что связано с разгоном потока. Следует также отметить слабое влияние величины заданного на задней кромке давления на распределение теплового потока.

На фиг. 4, 5 представлены распределения p , τ_u , τ_g и коэффициента напряжения трения в поперечном направлении $\tau_w = \partial w / \partial y|_w$ по размаху крыла при значении продольной координаты $x = 0,6$. Это значение координаты x выбрано из условий, отмеченных выше. На фиг. 4 штриховой линией отмечено значение давления $p(x = 1)$ на задней кромке, при котором проведены все представленные в данной работе расчеты. Необходимо отметить, что влияние величины угла атаки на коэффициент напряжения трения в поперечном направлении τ_w сравнительно слабое, по крайней мере для значений $|\theta| > 0,2$. Однако вблизи плоскости симметрии $|\theta| \leq 0,1$ величина τ_w на наветренной стороне значительно превышает ее значение на подветренной.

Поступила 14 V 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Whitehead A. H., Jr., Hefner J. N., Rao D. M. Lee-surface vortex effects over configurations in hypersonic flow. AIAA Pap. N 72-77, 1972.
2. Rao D. M., Whitehead A. H., Jr. Leeward vortices on delta wings at hypersonic speeds. — AIAA J., 1972, vol. 10, N 11.
3. Cross E. J., Jr., Hankey W. L. Investigation of the leeward side of a delta wing at hypersonic speeds. AIAA Pap. N 68-675, 1968.
4. Ладыженский М. Д. О пространственном гиперзвуковом течении около тонких крыльев. — ПММ, 1964, т. 28, вып. 5.
5. Козлова И. Г., Михайлов В. В. О сильном вязком взаимодействии на треугольном и скользящем крыльях. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1970, № 6.
6. Нейланд В. Я. К теории взаимодействия гиперзвукового потока с пограничным слоем для отрывных двумерных и пространственных течений. Ч. 2. Двумерные течения и треугольное крыло. — Учен. зап. ЦАГИ, 1974, т. 5, № 3.
7. Дудин Г. Н. К расчету пограничного слоя на треугольной пластине на режиме сильного вязкого взаимодействия. — Учен. зап. ЦАГИ, 1978, т. 9, № 5.
8. Bluford G. S., Jr. Numerical solution of the supersonic and hypersonic viscous flow around thin delta wings. AIAA Pap. N 78-1136, 1978.
9. Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф. Теория гиперзвуковых течений. М.: ИЛ, 1962.
10. Нейланд В. Я. К теории взаимодействия гиперзвукового потока с пограничным слоем для отрывных двумерных и пространственных течений. Ч. 1. Пространственные течения. — Учен. зап. ЦАГИ, 1974, т. 5, № 2.
11. Шевелев Ю. Д. Трехмерные задачи теории ламинарного пограничного слоя. М.: Наука, 1977.

УДК 532.78 : 536.421.4

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКОГО ФРОНТА КРИСТАЛЛИЗАЦИИ, ДВИЖУЩЕГОСЯ С ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ

Л. Г. Бадратинова

(Новосибирск)

1. В системе координат x, y, z , связанной с плоским невозмущенным фронтом (ось x направлена внутрь расплава, а оси y, z — вдоль поверхности раздела), процесс кристаллизации разбавленного бинарного сплава описывается уравнениями

$$(1.1) \quad \text{при } x > f(y, z, t) \quad \partial T_1 / \partial t + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla T_1 = \chi_1 \Delta T_1, \\ \partial c_1 / \partial t + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla c_1 = D \Delta c_1, \quad \nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0,$$

$$(1.2) \quad \partial \mathbf{v}_1 / \partial t + (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \mathbf{v}_1 = \nu \Delta \mathbf{v}_1 - \nabla p / \rho_1 + \mathbf{g}, \quad \mathbf{g} = (-g, 0, 0); \\ \text{при } x < f(y, z, t) \quad \partial T_2 / \partial t - V_2 (\partial T_2 / \partial x) = \chi_2 \Delta T_2$$