

УДК 532.546

Устойчивость одномерного течения в пористом наклонном слое, насыщенном водой и паром с межфазной границей*

М.М. Рамазанов¹, Н.С. Булгакова^{1,2}

¹*Институт проблем геотермии и возобновляемой энергетики ОИВТ РАН,
Махачкала*

²*Дагестанский государственный университет народного хозяйства,
Махачкала*

E-mail: mukamay-ipg@mail.ru, ipgnatali@mail.ru

Сформулирована задача об одномерном течении воды и пара с межфазной границей в наклонном пористом слое с учетом притока тепла через боковые поверхности. Найдено стационарное решение задачи в аналитическом виде и исследованы его свойства. Показано, что в определенной области параметрического пространства стационарное решение неустойчиво. Определен характер неустойчивости.

Ключевые слова: устойчивость течений, пористый слой, межфазная граница, фазовый переход.

Введение

Явление неустойчивости двухфазного потока необходимо учитывать при проектировании и эксплуатации многих промышленных систем и оборудования, таких как парогенераторы, кипящие водяные реакторы, термосифоны, ребойлеры, холодильные установки, геотермальные скважины и некоторые системы химической обработки. Устойчивость потока особенно важна для работы ядерных реакторов, а также парогенераторов. В настоящее время механизмы устойчивости двухфазных течений теплоносителя в теплообменниках и других технических устройствах хорошо изучены [1–4]. При этом исследований течений пароводяной смеси в пористых и трещиноватых средах значительно меньше, чем в трубах и других полостях. К ним относятся, например, работы [5–8]. В статье [9] было представлено точное стационарное решение неизотермической задачи о течении пароводяной смеси в пористом слое. В работе [10] изучалось неизотермическое течение пароводяной смеси в системе пласт–скважина. При этом был рассмотрен случай, когда фазовый переход теплоносителя начинается уже в пласте. В работе [11] изучалось нестационарное двухскоростное неизотермическое течение пароводяной смеси в пласте с учетом теплообмена с окружающими породами. Численные эксперименты показали, что решение выходит на стационарный режим колебательным образом.

* Работа выполнена в рамках государственного задания Института проблем геотермии и возобновляемой энергетики — филиала ОИВТ РАН (тема №. АААА-А19-119111390085-7).

Это означает, что в определенном диапазоне параметров неустойчивости таких течений вполне возможны.

Одно из направлений исследований по данной тематике связано с устойчивостью межфазной границы. Впервые этот вопрос рассматривался в работе [12]. Авторами на основе математической модели было показано, что граница раздела вода–пар при, казалось бы, неустойчивой стратификации, когда слой воды располагается над слоем пара в пористой среде, может быть устойчива, если проницаемость среды достаточно мала. При этом предполагалось, что в невозмущенном состоянии фазы неподвижны, а фазовый переход отсутствует. Эта работа опиралась на натурные исследования, которые показали, что в пародоминирующих геотермальных системах слой воды может существовать над слоем пара [13, 14]. В дальнейшем эти исследования были продолжены в работах ряда авторов [15–18]. В них допускались движение фаз и фазовый переход в невозмущенном состоянии и учитывались некоторые осложняющие факторы, например, капиллярный эффект.

Другое направление исследований связано с термически индуцированной неустойчивостью вынужденных и естественно конвективных одно- и двухфазных течений или механического равновесия теплоносителя с учетом фазовых переходов. Авторы работы [12] в этой серии исследований стали также одними из первых. Эту проблему они изучали в работе [19]. Данные исследования связаны с моделированием циркуляции пароводяной смеси в высокотемпературных геотермальных системах и попытками объяснения механизмов функционирования гейзеров и других проявлений указанных систем. В этом направлении работ, связанных с устойчивостью режимов течений, крайне мало. В качестве близких исследований можно отметить статьи [20, 21], в которых, однако, непосредственно задача на устойчивость не решалась. Во второй из этих работ гейзер представлен как автоколебательная система.

1. Постановка задачи

Предположим, что наклонный пористый слой насыщен в нижней части водой, а в верхней — паром, они разделены межфазной границей (рис. 1). Вода течет снизу вверх и при пересечении межфазной границы, которая в стационарном режиме покоится, переходит в пар. Через боковые границы пласта в области воды подводится тепло с постоянной интенсивностью. В области пара процесс для простоты считаем изотермическим с температурой, равной температуре межфазной границы, которая определяется из решения задачи. Предполагаем, что в первом приближении течение можно считать одномерным, т.е. что соответствующие условия выполнены. Требуется найти стационарное решение задачи и исследовать его на устойчивость.

Математическую формулировку описанной задачи запишем в следующем виде.

Для области пласта, насыщенной водой (рис. 1), уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_w}{\partial z} &= -\frac{\mu_w}{k\rho_w} Q_w - \frac{\beta}{\sqrt{k\rho_w}} Q_w^2 - \rho_w [1 - \beta_w (T_w - T_{vx})] g \sin \varphi, \\ Q_w &= Q_w(t), \\ C_{mw} \frac{\partial T_w}{\partial t} + C_w Q_w \frac{\partial T_w}{\partial z} &= Q_{T_w}. \end{aligned} \tag{1}$$

Аналогично, для области, насыщенной паром, уравнения запишутся как

$$\frac{\partial P_v}{\partial z} = -\frac{\mu_v}{k\rho_v} Q_v - \frac{\beta}{\sqrt{k\rho_v}} Q_v^2 - \rho_v g \sin \varphi,$$

Рис. 1. Модель задачи: наклонный пласт, насыщенный водой и паром с межфазной границей.

$$m \frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \frac{\partial Q_v}{\partial z} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T_v}{\partial z} = 0.$$

В системах (1), (2) первые уравнения — это обобщенные уравнения Дарси, вторые — уравнения баланса массы в приближении несжимаемости воды и пористой среды. Третье равенство в (1) — это уравнение баланса энергии, где пренебрегается теплопроводностью по сравнению с конвективным переносом тепла. В системе (2) третье уравнение выражает условие изотермичности течения.

Граничные условия имеют вид

$$\Delta \rho \frac{d\xi}{dt} = Q_w - Q_v,$$

$$P_w = P_v = P_\xi, \quad T_w = T_v = T_\xi, \quad T_\xi = T_*(P_\xi). \quad (3)$$

В уравнениях использованы обозначения: индексами w, v обозначены величины, относящиеся к воде и пару соответственно, $z = \xi$ — координата межфазной границы; индексом ξ обозначены значения на межфазной границе, ρ, P, T, Q — плотность, давление, температура и удельный массовый расход, т.е. массовая скорость теплоносителя; μ — динамическая вязкость теплоносителя, β_w — коэффициент теплового расширения воды, k — коэффициент проницаемости пористой среды, Q_{T_w} — плотность притока тепла в пласт через боковые границы, β — эмпирический коэффициент инерционного сопротивления пористой среды, g — ускорение свободного падения, φ — угол отклонения пласта от горизонтали, m — пористость, L — длина пласта, T_* — температура фазового перехода, C_{mw} — теплоемкость единицы объема пористой среды, насыщенной водой, C_w — удельная теплоемкость воды.

Перейдем к безразмерному виду путем введения следующих масштабов:

$$[z] = L, \quad [T] = T_{vx}, \quad [P] = \rho_w g L, \quad [Q] = k \rho_w^2 g / \mu_w, \quad [t] = \rho_w L / [Q],$$

$$\text{Re} = \frac{\beta \sqrt{k} [Q]}{\mu_w} = \frac{\beta k^{3/2} \rho_w^2 g}{\mu_w^2}.$$

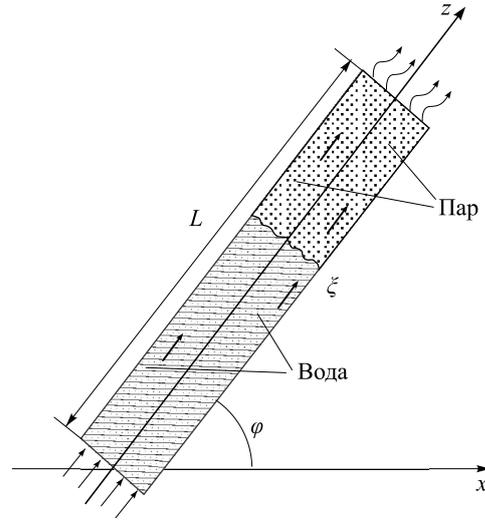
Тогда задача (1)–(3) примет вид

для воды:

$$\frac{\partial P_w}{\partial z} = -Q_w - \text{Re} Q_w^2 - \sin \varphi + \beta_w T_{vx} (T_w - 1) \sin \varphi,$$

$$Q_w = Q_w(t), \quad (4)$$

$$b_1 \frac{\partial T_w}{\partial t} + Q_w \frac{\partial T_w}{\partial z} = b_2, \quad b_1 = \frac{C_{mw} L}{[t][Q]C_w}, \quad b_2 = \frac{Q_{T_w} L}{[Q][T]C_w};$$



для пара:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_v}{\partial z} &= -a_1 Q_v - a_1 \operatorname{Re} Q_v^2 - a_2 \sin \varphi, & a_1 &= \frac{\mu_v \rho_w}{\mu_w \rho_v}, & a_2 &= \frac{\rho_v}{\rho_w}, & \rho_v &= \frac{P_\xi}{RT_\xi}, \\ a_3 \frac{\partial P_\xi}{\partial t} + \frac{\partial Q_v}{\partial z} &= 0, & a_3 &= \frac{m g L}{RT_{vx} T_\xi} \left(1 - \frac{P_\xi \rho_w g L}{T_\xi T_{vx}} \frac{dT_*}{dP} \right), \\ \frac{\partial T_v}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Граничные условия запишутся как

$$(1 - a_2) \frac{d\xi}{dt} = Q_w - Q_v, \quad (6)$$

$$P_w = P_v = P_\xi, \quad T_w = T_v = T_\xi, \quad T_\xi = T_*(P_\xi).$$

2. Стационарное решение

Из уравнений (4)–(6), полагая производную по времени равной нулю, получим следующее стационарное решение:

для воды:

$$\begin{aligned} P_w &= P_{\text{вх}} - \left(Q_0 + \operatorname{Re} Q_0^2 + \sin \varphi \right) z + \frac{1}{2} \beta_w T_{\text{вх}} \gamma_w z^2 \sin \varphi, \\ Q_0 &= \text{const}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$T_w = 1 + \gamma_w z, \quad \gamma_w = b_2 / Q_0,$$

здесь $T_{\text{вх}}$ и $P_{\text{вх}}$ — температура и давление на входе в пласт, Q_0 — стационарный (невозмущенный) удельный массовый расход теплоносителя через единицу площади сечения пласта;

для пара:

$$\begin{aligned} P_v &= P_\xi - a_1 \left(Q_0 + \operatorname{Re} Q_0^2 + \frac{a_2}{a_1} \sin \varphi \right) (z - \xi_0), \\ Q_0 &= \text{const}, \\ T_v &= T_\xi. \end{aligned} \quad (8)$$

Из граничных условий получим

$$\begin{aligned} P_{\xi_0} &= P_{\text{вх}} - \left(Q_0 + \operatorname{Re} Q_0^2 + \sin \varphi \right) \xi_0 + \frac{1}{2} \beta_w T_{\text{вх}} \gamma_w \xi_0^2 \sin \varphi, \\ P_a &= P_{\xi_0} - a_1 \left(Q_0 + \operatorname{Re} Q_0^2 + \frac{a_2}{a_1} \sin \varphi \right) (1 - \xi_0), \end{aligned} \quad (9)$$

$$T_{\xi_0} = 1 + \gamma_w \xi_0, \quad T_{\xi_0} = T_*(P_{\xi_0}), \quad \gamma_w = b_2 / Q_0, \quad P_\xi = P_a e^{\frac{A_0 + B_0}{T_{\text{вх}}(1 + \gamma_w \xi_0)}},$$

здесь ξ_0 — невозмущенное положение границы фазового перехода, P_a — атмосферное давление, A_0, B_0 — постоянные параметры кривой фазового перехода.

Из уравнений (9) найдем неизвестные ξ_0 и Q_0 , а вместе с ними и определим все стационарное решение (7)–(8).

3. Устойчивость решения

Исследуем устойчивость полученного решения относительно малых возмущений. Для этого представим решение нестационарной задачи в виде суммы стационарного решения и малых поправок:

$$P = P_0 + e^{\lambda t} P, \quad T = T_0 + e^{\lambda t} T, \quad Q = Q_0 + e^{\lambda t} Q, \quad \xi = \xi_0 + e^{\lambda t} \xi,$$

где T_0, P_0 — невозмущенные значения температуры и давления, λ — декремент роста (затухания) возмущений. Подставим эти выражения в формулы (4)–(6) и, линеаризуя последние относительно малых поправок, получим:

для воды:

$$\frac{dP_w}{dz} = -Q_w - 2\text{Re}Q_0 Q_w + \beta_w T_{\text{BX}} T_w \sin \varphi, \\ Q_w = \text{const}, \quad (10)$$

$$\lambda b_1 T_w + Q_0 \frac{dT_w}{dz} + Q_w \frac{dT_0}{dz} = 0;$$

для пара:

$$\frac{dP_v}{dz} = -a_1 (1 + 2\text{Re}Q_0) Q_v - a_4 P_\xi, \\ \lambda c_v^2 P_\xi = \frac{d^2 P_v}{dz^2}, \quad c_v^2 = \frac{d\rho_v}{dP_\xi} a_1 (1 + 2\text{Re}Q_0), \\ a_1 = \frac{\mu_v \rho_w}{\mu_w \rho_v}, \quad a_2 = \frac{\rho_v}{\rho_w}, \quad \rho_v = \frac{P_\xi}{RT_\xi}, \quad a_3 = \frac{1}{\rho_w} \frac{d\rho_v}{dP_\xi} = \frac{m g L}{RT_{\text{BX}} T_\xi} \left(1 - \frac{P_\xi \rho_w g L}{T_\xi T_{\text{BX}}} \frac{dT_*}{dP} \right), \\ a_4 = \frac{da_1}{dP_\xi} (1 + \text{Re}Q_0) Q_0 + \frac{da_2}{dP_\xi} \sin \varphi. \quad (11)$$

$$T_v = T_\xi,$$

здесь $d\rho_v / dP_\xi$ — полная производная.

Граничные условия примут вид

$$\lambda(1 - a_2)\xi = Q_w - Q_v, \\ P_w - \xi \sin \varphi = P_v - a_2 \xi \sin \varphi = P_\xi, \quad T_w + \gamma_w \xi = T_v = T_\xi, \quad T_\xi = \frac{dT_*}{dP} P_\xi. \quad (12)$$

Найдем решение уравнений (10)–(12) относительно малых возмущений. Тогда для воды имеем

$$P_w = -(1 + 2\text{Re}Q_0) Q_w z + \beta_w T_{\text{BX}} \frac{Q_w \gamma_w}{\lambda \alpha_T Q_0} \left[\frac{1}{\lambda \alpha_T} (1 - e^{-\lambda \alpha_T z}) - z \right] \sin \varphi,$$

$$Q_w = \text{const},$$

$$T_w = \frac{Q_w \gamma_w}{\lambda \alpha_T Q_0} (e^{-\lambda \alpha_T z} - 1), \quad \alpha_T = \frac{b_1}{Q_0}, \quad \gamma_w = \frac{b_2}{Q_0};$$

соответственно для пара имеем

$$P_v = P_\xi - \frac{P_\xi}{1-\xi_0}(z-\xi_0) + \frac{\lambda c_v^2 P_\xi}{2}(z-\xi_0)(z-1) + \frac{(a_1 Q_0 + a_2 \sin \varphi)(1-z)}{1-\xi_0} \xi,$$

$$\frac{dP_v}{dz} = -a_1(1+2\text{Re}Q_0)Q_v - a_4 P_\xi,$$

$$a_1(1+2\text{Re}Q_0)Q_v = -\frac{dP}{dz} - a_4 P_\xi = \frac{P_\xi}{1-\xi_0} - \frac{\lambda c_v^2 P_\xi}{2}(2z-\xi_0-1) + \frac{a_1 Q_0 + a_2 \sin \varphi}{1-\xi_0} \xi - a_4 P_\xi,$$

$$Q_v = \frac{1}{a_1(1+2\text{Re}Q_0)} \left[\left(\frac{1}{1-\xi_0} - \frac{\lambda c_v^2}{2}(2z-\xi_0-1) - a_4 \right) P_\xi + \frac{a_1 Q_0 + a_2 \sin \varphi}{1-\xi_0} \xi \right],$$

$$T_v = T_\xi.$$

Граничные условия запишутся следующим образом:

$$\lambda(1-a_2)\xi = Q_w - Q_v,$$

$$P_w - (Q_0 + \sin \varphi)\xi = P_v - (a_1 Q_0 + a_2 \sin \varphi)\xi = P_\xi, \quad T_w + \gamma_w \xi = T_v = T_\xi, \quad T_\xi = \frac{dT_*}{dP} P_\xi,$$

$$P_\xi = -(1+2\text{Re}Q_0)Q_w \xi_0 - (Q_0 + \sin \varphi)\xi + \beta_w T_{\text{вх}} \frac{Q_w \gamma_w}{\lambda \alpha_T Q_0} \left[\frac{1}{\lambda \alpha_T} (1 - e^{-\lambda \alpha_T \xi_0}) - \xi_0 \right] \sin \varphi,$$

$$\alpha_T = \frac{b_1}{Q_0}, \quad \gamma_w = \frac{b_2}{Q_0},$$

$$P_\xi = \frac{T_{\text{вх}}}{\rho_w g L} \frac{dP_*}{dT} \frac{Q_w \gamma_w}{\lambda \alpha_T Q_0} (e^{-\lambda \alpha_T \xi_0} - 1) + \frac{T_{\text{вх}}}{\rho_w g L} \frac{dP_*}{dT} \gamma_w \xi \equiv A_p Q_w + B_p \xi,$$

$$A_p = \frac{T_{\text{вх}}}{\rho_w g L} \frac{dP_*}{dT} \frac{\gamma_w}{\lambda \alpha_T Q_0} (e^{-\lambda \alpha_T \xi_0} - 1), \quad B_p = \frac{T_{\text{вх}}}{\rho_w g L} \frac{dP_*}{dT} \gamma_w,$$

$$P_v = P_\xi - \frac{P_\xi}{1-\xi_0}(z-\xi_0) + \frac{\lambda c_v^2 P_\xi}{2}(z-\xi_0)(z-1) + \frac{1-z}{1-\xi_0}(a_1 Q_0 + a_2 \sin \varphi) \xi,$$

здесь dP_*/dT — наклон кривой фазового перехода. Отсюда, исключая давления P_w и P_v , получим

$$\lambda(1-a_2)\xi = Q_w - Q_v,$$

$$Q_w = -\frac{Q_0 + \sin \varphi + B_p}{A_w} \xi, \quad P_\xi = A_p Q_w + B_p \xi,$$

$$Q_v = \frac{1}{a_1(1+2\text{Re}Q_0)} \left(\frac{P_\xi}{1-\xi_0} - \frac{\lambda c_v^2 P_\xi}{2}(\xi_0-1) - a_4 P_\xi + \frac{a_1 Q_0 + a_2 \sin \varphi}{1-\xi_0} \xi \right),$$

$$Q_v = \frac{1}{a_1(1+2\text{Re}Q_0)} \left[\left(\frac{1}{1-\xi_0} - \frac{\lambda c_v^2}{2}(\xi_0-1) - a_4 \right) \left(-\frac{A_p(Q_0 + \sin \varphi + B_p)}{A_w} + B_p \right) + \frac{a_1 Q_0 + a_2 \sin \varphi}{1-\xi_0} \xi \right],$$

$$A_w = A_p + (1 + 2\text{Re}Q_0)\xi_0, \quad A_p = \frac{B_p}{\lambda\alpha_T Q_0} (e^{-\lambda\alpha_T \xi_0} - 1), \quad B_p = \frac{T_{\text{вх}}}{\rho_w g L} \frac{dP_*}{dT} \gamma_w,$$

$$a_1 = \frac{\mu_v \rho_w}{\mu_w \rho_v}, \quad a_2 = \frac{\rho_v}{\rho_w}, \quad \rho_v = \frac{P_\xi}{R_g T_\xi}, \quad a_3 = \frac{d\rho_v}{dP_\xi} = \frac{mgL}{RT_{\text{вх}} T_\xi} \left(1 - \frac{P_\xi \rho_w g L}{T_\xi T_{\text{вх}}} \frac{dT_*}{dP} \right),$$

$$a_4 = - \left(\frac{\mu_v \rho_w}{\mu_w \rho_v^2} (1 + 2\text{Re}Q_0) Q_0 + \frac{\sin \varphi}{\rho_w} \right) \frac{d\rho_v}{dP_\xi}.$$

Выразив все неизвестные через ξ , окончательно перепишем эту систему в виде

$$\lambda(1 - a_2)\xi = Q_w - Q_v,$$

$$Q_w = - \frac{Q_0 + \sin \varphi + B_p}{A_w} \xi, \quad P_\xi = - \left(\frac{A_p(Q_0 + \sin \varphi + B_p)}{A_w} - B_p \right) \xi,$$

$$Q_v = \frac{1}{a_1(1 + 2\text{Re}Q_0)} \left[\left(\frac{1}{1 - \xi_0} - \frac{\lambda c_v^2}{2} (\xi_0 - 1) - a_4 \right) \left(- \frac{A_p(Q_0 + \sin \varphi + B_p)}{A_w} + B_p \right) + \frac{a_1 Q_0 + a_2 \sin \varphi}{1 - \xi_0} \right] \xi,$$

$$A_w = A_p + (1 + 2\text{Re}Q_0)\xi_0, \quad A_p = \frac{B_p}{\lambda\alpha_T Q_0} (e^{-\lambda\alpha_T \xi_0} - 1), \quad B_p = \frac{T_{\text{вх}}}{\rho_w g L} \frac{dP_*}{dT} \gamma_w,$$

$$a_1 = \frac{\mu_v \rho_w}{\mu_w \rho_v}, \quad a_2 = \frac{\rho_v}{\rho_w}, \quad \rho_v = \frac{P_\xi}{R_g T_\xi}, \quad a_3 = \frac{1}{\rho_w} \frac{d\rho_v}{dP_\xi} = \frac{mgL}{R_g T_{\text{вх}} T_\xi} \left(1 - \frac{P_\xi \rho_w g L}{T_\xi T_{\text{вх}}} \frac{dT_*}{dP} \right),$$

$$a_4 = - \left(\frac{\mu_v \rho_w}{\mu_w \rho_v^2} (1 + \text{Re}Q_0) Q_0 + \frac{\sin \varphi}{\rho_w} \right) \frac{d\rho_v}{dP_\xi}, \quad c_v^2 = a_1 a_3 (1 + 2\text{Re}Q_0).$$

Условие существования нетривиального решения этой линейной однородной алгебраической системы уравнений относительно неизвестных ξ , P_ξ , Q_w , Q_v позволяет найти комплексное значение декремента λ , определяющего временной ход возмущений.

4. Обсуждение результатов

Отметим, что физически похожая задача в вертикальной трубе ранее уже рассматривалась другими авторами. Речь идет о течении воды в трубе вверх с последующим переходом её в пар из-за притока тепла через стенки трубы [2]. В случае наличия пласта результат качественно отличается от течения в трубе, хотя он формально похож тем, что при малых расходах решение неустойчиво. Дело в том, что в случае трубы имеет место неустойчивость типа Леденга, которая обычно является результатом немонотонной рабочей характеристики трубопровода [2]. Для пласта же, как показывают расчеты, рабочая характеристика меняется монотонно при изменении расхода. Кроме того, для неустойчивости в трубе важна инерция, а в случае пласта неустойчивость имеет место и для закона Дарси, когда инерция отсутствует.

Обсудим ряд упрощений, сделанных при постановке задачи: рассматривались одномерные возмущения стационарного течения; вода и пористая среда считались несжимаемыми; наличие переходного пароводяного слоя не учитывалось.

Цель представленной работы заключалась в том, чтобы показать, что в определенной области параметрического пространства стационарное решение неустойчиво.

Как известно, для выявления неустойчивости решения достаточно найти хотя бы одно нарастающее возмущение. Такое возмущение, пусть и одномерное, в настоящем исследовании найдено. Является ли найденное возмущение наиболее «опасным» другой вопрос. Для того, чтобы это выяснить следует рассматривать не только двухмерные, но и трехмерные возмущения. Однако такой задачи пока не ставилось.

Эффект сжимаемости пара в работе учтен. Что касается воды и пористой среды, в общем случае при рассмотрении достаточно длинных пластов необходимо учитывать сжимаемость указанных сред. Однако на первом этапе авторы решили ею пренебречь, чтобы получить аналитическое решение и тем самым облегчить исследование достаточно сложной задачи устойчивости. В дальнейшем, используя численные методы, предполагается уточнить результаты с учетом эффекта сжимаемости сред как в линейной, так и в нелинейной постановке задачи. При этом полученное здесь аналитическое решение будет использовано как тестовое.

В реальности между паровой и водной фазами формируется переходный пароводяной слой. И в общем случае необходимо рассматривать две неизвестные границы, что сильно осложнит задачу. Поэтому на первом этапе в данной модели предполагается, что в области выше фазовой границы ξ поддерживается постоянная температура, равная температуре фазового перехода T_ξ на указанной границе. Это значит, что над границей фазового перехода движется только перегретый пар, поскольку давление падает при движении от границы вверх. Такое предположение позволяет получить аналитическое решение и упростить сложную задачу исследования возможного механизма неустойчивости течений. В дальнейшем предполагается рассмотреть неизотермическое течение в трещиноватой и трещиновато-пористой средах с учетом переходного пароводяного слоя.

Рассмотрим полученные результаты. При расчетах использовались следующие значения параметров: $\mu_w = 1,1 \cdot 10^{-4} \text{ Па} \cdot \text{с}$, $\beta_w = 4 \cdot 10^{-4} \text{ 1/K}$, $C_w = 4,21 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{K)}$, $L = 10^3 \text{ м}$, $\rho_w = 10^3 \text{ кг/м}^3$, $q = 1,85 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}$, $\rho_s = 2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $C_s = 0,9 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{K)}$, $R_g = 461 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{K)}$, $\mu_v = 1,72 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}$, $C_p = 2,3 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{K)}$, $k = 10^{-12} \text{ м}^2$, $m = 0,1$, $A_0 = 12,51$, $B_0 = -4611,7 \text{ K}$, где ρ_s , C_s — плотность и удельная теплоемкость скелета пористой среды, R_g — удельная газовая постоянная, q — удельная теплота фазового перехода вода–пар, входящая в уравнение Клапейрона–Клаузиуса, C_p — удельная теплоемкость пара.

На рис. 1 приведена модель задачи. Свойства стационарного решения и взаимная зависимость различных величин отображены на рис. 2. Рис. 2a иллюстрирует закономерность зависимости входного давления от массовой скорости теплоносителя в пласте для двух значений входной температуры. Согласно рис. 2b и 2c, с ростом массовой скорости или соответственно давления на входе в пласт межфазная граница движется в сторону верхней границы, т.е. к выходу, сокращая область, занятую паром. Таким образом, существует предельное значение этих параметров, при превышении которых вся область будет заполнена водой. Далее, при рассмотрении больших давлений на входе или больших массовых скоростей предполагается, что они не выходят за указанные пределы и пласт содержит как область воды, так и область пара.

Из рис. 2d следует, что с ростом массовой скорости теплоносителя давление P_ξ (а значит температура) на межфазной границе меняется немонотонным образом и имеет локальный максимум. Это объясняется конкуренцией двух факторов. С одной стороны, с ростом массовой скорости должно усилиться падение давления вдоль потока, что спо-

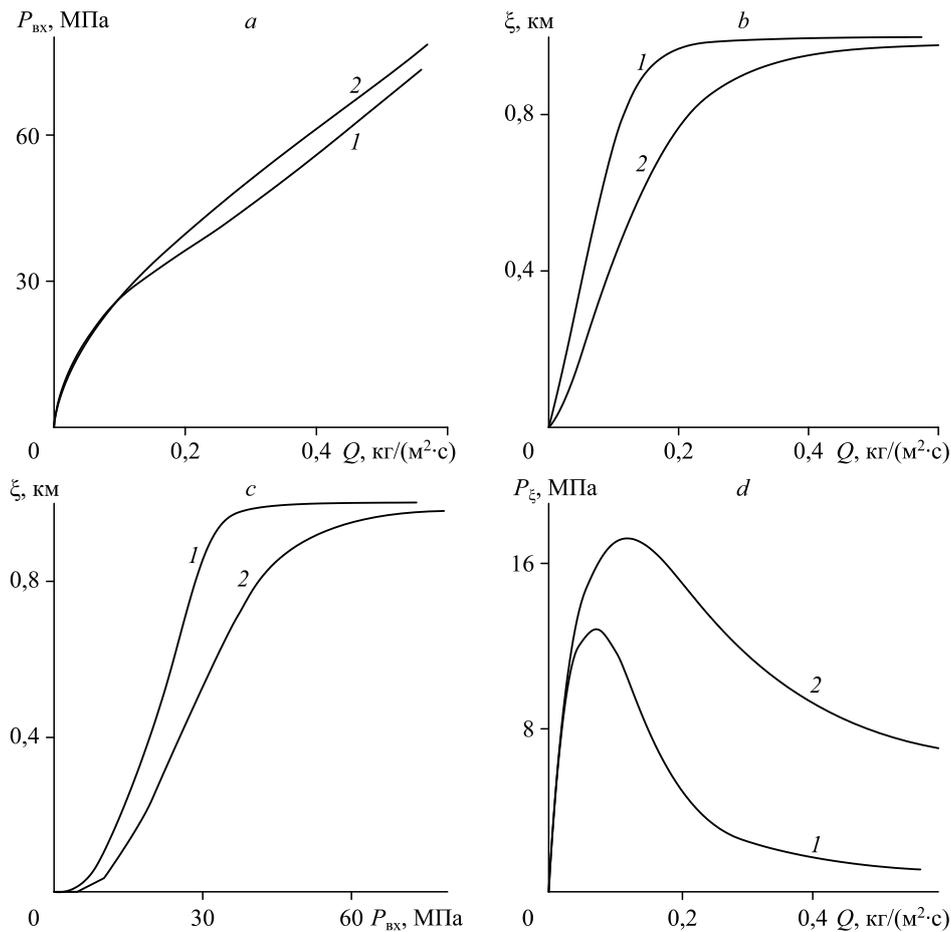


Рис. 2. Стационарное решение при $Q_{T_w} = 100 \text{ Вт/м}^3$ и $T_{\text{вх}} = 400$ (1), 500 К (2):
 зависимость входного давления от массовой скорости (a);
 зависимость межфазной границы от массовой скорости (b) и от входного давления (c);
 зависимость давления на межфазной границе от массовой скорости (d).

способствует уменьшению P_{ξ} и увеличению ξ , а с другой стороны, вместе с ξ (рис. 2b) растет область, занятая водой, что вызывает дополнительный приток тепла в пласт и способствует увеличению температуры (значит и давления P_{ξ}) на межфазной границе. Описанная ситуация и приводит к неустойчивости решения при уменьшении массовой скорости теплоносителя до некоторого критического значения.

Типичный вид зависимости декремента λ от массовой скорости теплоносителя показан на рис. 3a. Аналогичная зависимость от давления на входе приведена на рис. 3b. Из этих рисунков видно, что при больших массовых скоростях Q или больших давлениях на входе в пласт $P_{\text{вх}}$ стационарное решение устойчиво ($\text{Re}(\lambda) < 0$). Однако по мере уменьшения указанных параметров вещественная часть декремента λ становится положительной и, следовательно, стационарное решение теряет устойчивость. Отметим, что, по крайней мере, в окрестности критической точки, разделяющей область устойчивости и неустойчивости стационарного решения, декремент содержит как вещественную, так и мнимую части. Следовательно, при потере устойчивости возмущение нарастает колебательным образом. После потери устойчивости стационарного решения может установиться автоколебательный режим или стационарное течение только воды или только пара.

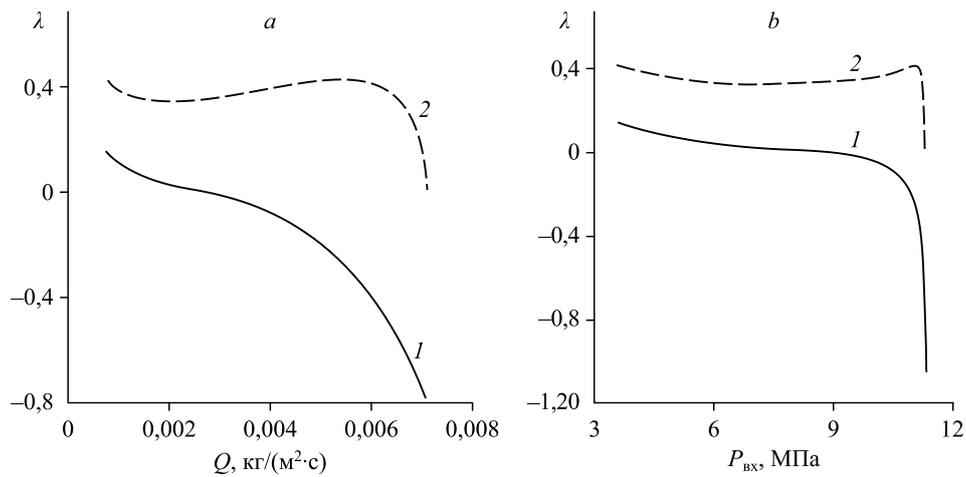


Рис. 3. Зависимость вещественной (1) и мнимой (2) частей декремента λ при заданном притоке тепла через боковые границы $Q_{Тв} = 1 \text{ Вт/м}^3$ от массовой скорости теплоносителя в пласте (а) и от давления на входе в пласт (б).

Однако ответить на этот вопрос в рамках проведенного линейного анализа невозможно, для этого необходимо решать нелинейную нестационарную задачу. Соответствующее решение предполагается найти в ходе дальнейших исследований.

На рис. 4 показано, как связаны между собой критические значения массовой скорости теплоносителя в пласте и его температура на входе для различных значений интенсивности притока тепла через боковую поверхность Q_T . Видно, что с ростом Q_T критическая скорость растет.

На рис. 5 приведены зависимости критических давлений $P_{вх}$ от температуры на входе в пласт для тех же значений Q_T , что и на рис. 4. При пресечении этих кривых (рис. 4, 5) сверху вниз стационарное течение теряет устойчивость и устанавливается новый режим течения. Для изучения возникающих режимов требуются дальнейшие исследования.

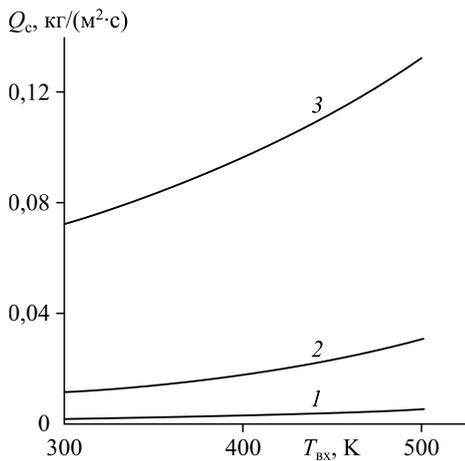


Рис. 4. Зависимость критической массовой скорости от температуры на входе в пласт при $Q_{Тв} = 1$ (1), 10 (2), 10 м² (3) Вт/м³.

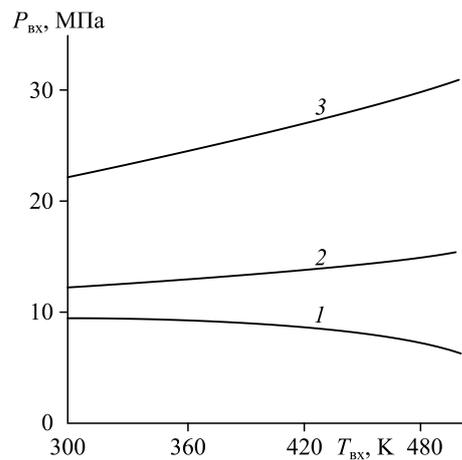


Рис. 5. Зависимость критического входного давления от температуры на входе в пласт при $Q_{Тв} = 1$ (1), 10 (2), 10 м² (3) Вт/м³.

Отметим, что полученные результаты для рассмотренных значений параметров качественно не зависят от угла наклона пласта, при этом имеет место незначительная в процентном отношении количественная зависимость. Если по оси ординат на рис. 2а отложить не само входное давление, а его надгидростатическую часть, то кривые для вертикального и горизонтального пласта практически совпадут. Слабое отличие в этом случае связано с силой плавучести (архимедовой силой), которая для рассмотренных значений параметров мала.

Исследование устойчивости тейлоровского типа самой межфазной границы — это отдельная задача, которая ранее рассматривалась разными авторами в различных постановках (см. введение), и она выходит за рамки настоящего исследования. Однако представляется интересным в дальнейшем выполнить обобщение данной задачи на двухмерный случай. При этом возникнет возможность неустойчивостей обоих типов, что приведет к более сложной картине в параметрическом пространстве.

Заключение

Предложена физическая формулировка и соответствующая математическая постановка задачи об одномерной неизотермической фильтрации в наклонном пористом слое, насыщенном в нижней части водой, а в верхней — паром, которые разделены межфазной границей (рис. 1). Предполагается, что в области пласта, насыщенной водой, имеет место приток тепла с постоянной интенсивностью. Получено стационарное решение и исследована его устойчивость. Выявлено, что давление, а вместе с ним и температура на межфазной границе меняются с ростом массовой скорости теплоносителя немонотонным образом и имеют локальный максимум. Показано, что при уменьшении входного давления (или массовой скорости теплоносителя) при некотором критическом значении стационарное течение становится неустойчивым. При этом неустойчивость носит колебательный характер, т.е. возмущения при потере устойчивости нарастают колебательным образом. Какой именно режим установится (автоколебание рассматриваемой системы вода–пар или стационарное течение только пара или только воды) при потере устойчивости, линейная теория определить не позволяет и требуется дальнейшее исследование.

Список литературы

1. Kakac S., Bon B. A review of two-phase flow dynamic instabilities in tube boiling systems // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 2008. Vol. 51, No. 3–4. P. 399–433.
2. Brennen C.E. Fundamentals of multiphase flow. Cambridge University Press, 2005. 410 p.
3. Ruspini L.C., Marcel C.P., Clausse A. Two-phase flow instabilities: A review // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 2014. Vol. 71. P. 521–548.
4. Шулюпин А.Н., Чермошнцева А.А. Пароводяное течение в геотермальной скважине // Теплофизика и аэромеханика. 2015. Т. 22, № 4. С. 493–499.
5. Donaldson I.G. The flow of steam water mixtures through permeable beds: a simple simulation of a natural undisturbed hydro-thermal region // N. Z. J. Sci. 1968. Vol. 11. P. 3–23.
6. Sheu J.P., Torrance K.E. On the structure of two-phase hydrothermal flows in permeable media // J. Geophysical Research. 1979. Vol. 84, No. B13. P. 7524–7531.
7. Поляев В.М., Майоров В.А., Васильев Л.Л. Гидродинамика и теплообмен в пористых элементах конструкций летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1988. 168 с.
8. Цыпкин Г.Г. Течения с фазовыми переходами в пористых средах. М.: Физматлит, 2009. 230 с.
9. Рамазанов М.М., Алхасова Д.А. Математическая модель тепломассопереноса в геотермальном пласте при извлечении пароводяной смеси // Теплофизика высоких температур. 2017. Т. 55, № 2. С. 284–290.
10. Алхасов А.Б., Булгакова Н.С., Рамазанов М.М. Тепломассоперенос в системе геотермальный пласт–скважина при извлечении пароводяной смеси // Изв. РАН. Энергетика. 2017. № 6. С. 125–134.
11. Рамазанов М. М., Алхасова Д.А., Абасов Г. М. Течения и теплообмен в геотермальном пласте при извлечении пароводяной смеси // Инж.-физ. журн. 2017. Т. 90, № 3. С. 640–647.
12. Schubert G., Straus J.M. Gravitational stability of water over steam in vapor-dominated geothermal system // J. Geoph. Res. 1980. Vol. 85, Iss. B11. P. 6505–6512.

13. **White D.E., Muffler L.J.P., Truesdell A.H.** Vapordominated hydrothermal systems compared with hot water systems // *Econ. Geol.* 1971. Vol. 66, No. 1. P. 75–97.
14. **Grant M.A.** Geothermal reservoir modeling // *Geothermics*. 1983. Vol. 12, No. 4. P. 251–263.
15. **Цыпкин Г.Г., Ильичев А.Т.** Устойчивость стационарного фронта фазовых переходов вода–пар в гидротермальных системах // *Докл. РАН*. 2001. Т. 378, № 2. С. 197–200.
16. **Ильичев А.Т., Цыпкин Г.Г.** Устойчивость поверхности фазового перехода вода–пар в геотермальных системах // *Изв. РАН. МЖГ*. 2012. № 4. С. 82–92.
17. **Одинцова В.Е.** Переход к неустойчивости поверхности раздела фаз в пористой среде в изотермическом приближении // *Изв. РАН. МЖГ*. 2009. № 1. С. 123–133.
18. **Цыпкин Г.Г.** Об устойчивости поверхностей испарения и конденсации в пористой среде // *Изв. РАН. МЖГ*. 2017. № 6. С. 70–78.
19. **Schubert G., Straus J.** Two-phase convection in a porous medium // *J. Geophys. Res.* 1977. Vol. 82, No. 23. P. 3411–3421.
20. **Мержанов А.Г., Штейнберг А.С., Штейнберг Г.С.** К теории гейзерного процесса // *Докл. АН СССР*. 1970. Т. 194, № 2. С. 318–321.
21. **Ланда П.С., Власов Д.А.** Гейзер как автоколебательная система // *Докл. АН*. 2007. Т. 413, № 6. С. 742–747.

*Статья поступила в редакцию 28 марта 2021 г.,
после переработки — 8 июня 2021 г.,
принята к публикации 30 июля 2021 г.*