

УДК 532

ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ НЕКРАСОВА

Т. А. Боднарь

Технологический институт Алтайского государственного технического университета,
659305 Бийск

E-mail: bta@bti.secna.ru

Получено приближенное решение нелинейного интегрального уравнения Некрасова $\omega = A[\omega, \mu]$ методом последовательной замены ядра интегрального оператора на близкое. Решение ищется непосредственно в точке бифуркации $\mu_1 = 3$ линеаризованного уравнения $\omega = \mu L[\omega]$, а в точке $\mu = 1$, в которой оператор $A[\omega, \mu]$, оставаясь нелинейным по ω , линеен по μ .

Ключевые слова: интегральное уравнение, нелинейный оператор, метод итераций, неподвижная точка.

1. Постановка задачи. Известная задача А. И. Некрасова о свободных нелинейных волнах на поверхности жидкости бесконечной глубины [1] представляет собой систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{d\theta} = -\frac{\lambda}{2\pi} R(\theta) \cos \omega(\theta); \quad (1.1)$$

$$\frac{dy}{d\theta} = -\frac{\lambda}{2\pi} R(\theta) \sin \omega(\theta); \quad (1.2)$$

$$\frac{d}{d\theta} \ln R(\theta) = -\frac{1}{3} \mu \sin \omega(\theta) \left(1 + \int_0^\theta \sin \omega(\sigma) d\sigma \right)^{-1}. \quad (1.3)$$

Здесь λ — длина волны; μ — параметр, зависящий от длины волны λ , скорости волны c и ускорения свободного падения g ; координата x направлена горизонтально, y — вертикально вверх, а начало координат O находится на гребне волны (рис. 1); нечетная функция $\omega(\theta)$, обращающаяся в нуль в точке $\theta = 0$, удовлетворяет интегральному уравнению Некрасова в теории установившихся нелинейных периодических волн:

$$\omega(\theta) = \int_0^{2\pi} K(\theta, \sigma) \mu \sin \omega(\sigma) \left(1 + \mu \int_0^\sigma \sin \omega(s) ds \right)^{-1} d\sigma. \quad (1.4)$$

Здесь ядро

$$K(\theta, \sigma) = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta \sin n\sigma}{n\pi}$$

представляет собой функцию Грина задачи Неймана для оператора Лапласа в единичном круге. Выражение в правой части уравнения (1.4) обозначим через $A[\omega, \mu]$ и рассмотрим как нелинейный оператор, действующий в пространстве 2π -периодических функций на отрезке $[0, 2\pi]$. Существование нетривиального решения интегрального уравнения

$$\omega(\theta) = A[\omega, \mu] \quad (1.5)$$

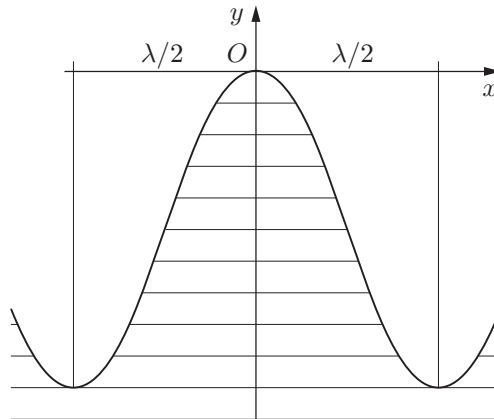


Рис. 1. Профиль волны

доказано в работе [1], а также в работах [2, 3]. В [1–3] показано, что оператор $A[\omega, \mu]$ непрерывен и компактен в малом шаре в малой окрестности нуля. Дифференцируя по Фреше правую часть уравнения (1.5) в нуле, получим линеаризованное уравнение

$$\omega(\theta) = \mu L[\omega], \quad (1.6)$$

где

$$L[\omega] = \int_0^{2\pi} K(\theta, \sigma) \omega(\sigma) d\sigma.$$

Спектр уравнения (1.6) состоит из простых собственных значений $\mu_k = 3k$ ($k = 1, 2, \dots$), которым соответствуют собственные функции $e_k = \sin k\theta$. Значения μ_k являются точками бифуркации уравнения (1.5), при которых возникают волны. В действительности физический смысл имеет только первая точка бифуркации [4].

Решение операторного уравнения (1.5) сопряжено с большими трудностями, обусловленными сложной зависимостью оператора $A[\omega, \mu]$ от параметра μ . В работах [5, 6] доказана справедливость представления

$$A[\omega, \mu] = \mu L[\omega] + T[\omega, \mu]$$

($T[\omega, \mu]$ — некоторый непрерывный нелинейный оператор), а также возможность построения приближенных решений операторного уравнения (1.5) в окрестности точек бифуркации методом Ляпунова — Шмидта. Непосредственное применение метода Ляпунова — Шмидта для решения уравнения (1.5) приводит к выражению [1, 5]

$$\begin{aligned} \omega(\theta, \varepsilon) = & \left(\frac{1}{9} \varepsilon - \frac{8}{243} \varepsilon^2 + \frac{115}{13122} \varepsilon^3 + \dots \right) \sin \theta + \\ & + \left(\frac{1}{54} \varepsilon^2 - \frac{8}{729} \varepsilon^3 + \dots \right) \sin 2\theta + \frac{17}{4374} \varepsilon^3 \sin 3\theta + O(\varepsilon^4). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Параметр ε , характеризующий амплитуду волны, определяется из соотношения $\mu = \mu_1 + \varepsilon$, где μ — решение нелинейного уравнения (1.5) в окрестности точки μ_1 . В данной работе решение нелинейного интегрального уравнения (1.5) находится другим способом, суть которого изложена в [7]. Это решение строится только в окрестности точки μ_1 , с учетом того что тем же способом могут быть найдены решения в окрестностях любых точек бифуркации μ_n ($n \geq 1$). При использовании данного способа вычисляется параметр ε , а с его помощью — решение $\omega(\theta, \varepsilon)$ по формуле (1.7), полученной методом Ляпунова — Шмидта.

2. Решение интегрального уравнения Некрасова. Для решения уравнения (1.5) используем метод замены ядра на близкое [8. С. 552]. В данном случае ядро $K(\theta, \sigma)$ уравнения (1.5) заменяется на укороченное ядро $K_n(\theta, \sigma)$. В результате получаем уравнение

$$\omega_n(\theta) = A_n[K_n(\theta, \sigma), \omega_n, \mu_{1n}], \quad (2.1)$$

где

$$A_n[K_n(\theta, \sigma), \omega_n, \mu_{1n}] = \int_0^{2\pi} K_n(\theta, \sigma) \mu_{1n} \sin \omega_n(\sigma) \left(1 + \mu_{1n} \int_0^\sigma \sin \omega_n(s) ds\right)^{-1} d\sigma,$$

$$K_n(\theta, \sigma) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin k\theta \sin k\sigma}{3k\pi},$$

μ_{1n} — решение уравнения (1.5) относительно параметра μ при укороченном ядре $K_n(\theta, \sigma)$ в окрестности первой точки бифуркации μ_1 . Сходимость решения уравнения (2.1) к решению интегрального уравнения (1.5) следует из условия сходимости $\|K(\theta, \sigma) - K_n(\theta, \sigma)\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Скорость сходимости последовательности $\omega_k(\theta)$ ($k = 1, 2, \dots$) может быть оценена с помощью нормы

$$\rho(\omega_n^\infty(\theta) - \omega_n(\theta)) = \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |\omega_n^\infty(\theta) - \omega_n(\theta)|,$$

где

$$\omega_n^\infty(\theta) = A_n[K(\theta, \sigma), \omega_n, \mu_{1n}]. \quad (2.2)$$

Для удобства дальнейшего изложения введем обозначения

$$f_n(\sigma) = \sin \omega_n(\sigma), \quad g_n(\sigma) = \int_0^\sigma \sin \omega_n(s) ds.$$

С учетом этих обозначений уравнение (2.1) можно записать в виде

$$\omega_n(\theta) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin k\theta}{3k\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\mu_{1n} \sin k\sigma f_n(\sigma)}{1 + \mu_{1n} g_n(\sigma)} d\sigma, \quad (2.3)$$

откуда следует, что его решением является тригонометрический полином

$$\omega_n(\theta) = \sum_{k=1}^n a_k \sin k\theta \quad (2.4)$$

с коэффициентами a_k ($k = 1, 2, \dots, n$), удовлетворяющими интегральным уравнениям

$$a_k = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_{1n} \sin k\sigma f_n(\sigma)}{3k\pi(1 + \mu_{1n} g_n(\sigma))} d\sigma. \quad (2.5)$$

Уравнение (2.1) представим в виде

$$\omega_n(\theta) = \mu_{1n} B_n[\omega_n] + C[\omega_n, \mu_{1n}], \quad (2.6)$$

где

$$B_n[\omega_n] = \int_0^{2\pi} K_n(\theta, \sigma) \frac{f_n(\sigma)}{1 + g_n(\sigma)} d\sigma, \quad C[\omega_n, \mu_{1n}] = \int_0^{2\pi} K_n(\theta, \sigma) \frac{f_n(\sigma) g_n(\sigma) \mu_{1n} (1 - \mu_{1n})}{(1 + g_n(\sigma))(1 + \mu_{1n} g_n(\sigma))} d\sigma.$$

При $n = 1$ в качестве нулевого приближения примем значение $\mu_{11} = 1$, при котором нелинейный оператор $C[\omega_n, \mu_{1n}] = 0$ и уравнение (2.6) эквивалентно линейному по μ уравнению

$$\omega_1^0(\theta) = \mu_{11}^0 B_1[\omega_1^0(\theta)]. \quad (2.7)$$

Решением этого уравнения является функция $\omega_1^0 = a_1^0 \sin \theta$.

Для вычисления параметров a_1^0, μ_{11}^0 , при которых уравнение (2.7) имеет нетривиальное решение, определим последовательности функций $\omega_{1m}^0 = a_{1m}^0 \sin \theta$, $m \geq 1$ и чисел μ_{1m}^0 из рекуррентных соотношений

$$\omega_{1m}^0 = B_1[\omega_{1m-1}^0], \quad \mu_{11m}^0 = \|\omega_{1m-1}^0\| / \|\omega_{1m}^0\|, \quad (2.8)$$

где $\|\omega_{1m}^0\|$ — норма функции ω_{1m}^0 . Выполнение принципа неподвижной точки Шаудера [6], применимость которого к операторному уравнению (1.5) доказана в [1, 2], гарантирует сходимость последовательности ω_{1m}^0 к точному решению ω_1^0 при $m \rightarrow \infty$. Второе уравнение (2.8) может быть представлено в виде $\mu_{11m}^0 = \|\omega_{1m-1}^0\| (\|B_1 \omega_{1m-1}^0\|)^{-1}$, откуда следует, что $\mu_{11m}^0 \rightarrow \mu_{11}^0 = \text{const}$ при $m \rightarrow \infty$. Численно решая уравнения (2.8), получаем $a_1^0 = 0,047452$, $\mu_{11}^0 = \pi$ [7]. Фиксируем коэффициент $a_1^0 = 0,047452$, а значение параметра $\mu_{11}^0 = \pi$ рассматриваем в качестве первого приближения μ_{11} (выше в качестве нулевого приближения принималось значение $\mu_{11} = 1$).

Прежде чем перейти к решению уравнения (2.6) при $n = 1$, докажем следующую теорему [9].

Теорема. Пусть $\omega_1^0 = a_1^0 \sin \theta$, μ_{11}^0 являются решением уравнения (2.7) и $a_1^0 \in [0, \pi)$, $\mu_{11}^0 \in [0, A_1[\omega_1^0, \infty] B_1^{-1}[\omega_1^0])$, где

$$A_1[\omega_1^0, \infty] = \int_0^{2\pi} K_1(\theta, \sigma) \frac{f_1(\sigma)}{g_1(\sigma)} d\sigma, \quad B_1[\omega_1^0] = \int_0^{2\pi} K_1(\theta, \sigma) \frac{f_1(\sigma)}{1 + g_1(\sigma)} d\sigma.$$

Тогда при $n = 1$ уравнение (2.1) в точке $\omega_1 = \omega_1^0$ имеет единственное решение относительно параметра μ_{11} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция ω_1^0 является решением уравнения (2.1) при $n = 1$, если

$$A_1[\omega_1^0, \mu_{11}] - \mu_{11}^0 B_1[\omega_1^0] = 0, \quad (2.9)$$

где

$$A_1[\omega_1^0, \mu_{11}] = \int_0^{2\pi} K_1(\theta, \sigma) \frac{\mu_{11} f_1(\sigma)}{1 + \mu_{11} g_1(\sigma)} d\sigma, \quad \mu_{11}^0 B_1[\omega_1^0] = \int_0^{2\pi} K_1(\theta, \sigma) \frac{\mu_{11}^0 f_1(\sigma)}{1 + g_1(\sigma)} d\sigma.$$

В этом уравнении подынтегральные выражения являются непрерывными положительными (в силу условий теоремы) функциями σ на интервале $(0, 2\pi)$. Подынтегральная функция интеграла $A_1[\omega_1^0, \mu_{11}]$ является монотонно возрастающей функцией $\mu_{11} \in [0, \infty)$ с наименьшим и наибольшим значениями интеграла соответственно:

$$A_1[\omega_1^0, 0] = 0, \quad A_1[\omega_1^0, \infty] = \lim_{\mu_{11} \rightarrow \infty} A_1[\omega_1^0, \mu_{11}].$$

Следовательно, уравнение (2.9) имеет единственное решение, если $\mu_{11}^0 \in [0, A_1[\omega_1^0, \infty] \times B_1^{-1}[\omega_1^0])$. Теорема доказана.

В результате вычислений получены неравенства $A_1[\omega_1^0, \infty] < 2,09426$, $B_1^{-1}[\omega_1^0] < 21,07392$. Таким образом, можно указать замкнутый интервал значений μ_{11}^0 , удовлетворяющих условиям теоремы: $\mu_{11}^0 \in [0; 44,13426]$. Решая уравнение (2.3) при $n = 1$,

$\omega_1 = \omega_1^0$ методом последовательных приближений в окрестности точки $\mu_{11}^0 = \pi$, находим $\mu_{11} = 3,478\,41$. Подставляя в правую часть уравнения (2.2) $\omega_1(\theta)$, μ_{11} , находим тригонометрический ряд

$$\omega_1^\infty(\theta) = 0,047\,452 \sin \theta + 0,001\,688\,9 \sin 2\theta + 0,000\,081\,627 \sin 3\theta + \dots$$

Норма $\rho(\omega_1^\infty(\theta) - \omega_1(\theta)) \simeq 0,0017$ показывает, что при $n = 1$ решение (2.4) близко к точному решению. Для уменьшения погрешности вычислим $\omega_2(\theta) = a_1 \sin \theta + a_2 \sin 2\theta$. Сначала положим в (2.5) $\mu_{12}^0 = \mu_{11}$ и вычислим a_2 , решая методом последовательных приближений уравнение

$$a_2 = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_{12}^0 \sin(2\sigma) f_2(\sigma)}{6\pi(1 + \mu_{12}^0 g_2(\sigma))} d\sigma.$$

Затем при известных коэффициентах a_1 , a_2 и $n = 2$ из уравнения (2.3) находим параметр μ_{12} . В результате получаем $a_2 = 0,003\,368\,33$; $\mu_{12} = 3,488\,56$. Следовательно, при укороченном ядре $K_2(\theta, \sigma)$ решение уравнения (2.1) принимает вид $\omega_2 = 0,047\,452 \sin 2\theta + 0,003\,368\,33 \sin 2\theta$. Подставив это решение в правую часть уравнения (2.2), находим

$$\begin{aligned} \omega_2^\infty(\theta) &= 0,047\,452 \sin \theta + 0,003\,368\,33 \sin 2\theta + 0,000\,201\,158 \sin 3\theta + \dots, \\ \rho(\omega_2^\infty(\theta) - \omega_2(\theta)) &\simeq 0,000\,20. \end{aligned}$$

Аналогично для $n = 3$ находим значения следующего приближения:

$$\begin{aligned} a_3 &= 0,000\,302\,041, \quad \mu_{13} = 3,489\,71; \\ \omega_3(\theta) &= 0,047\,452 \sin \theta + 0,003\,368\,33 \sin 2\theta + 0,000\,302\,041 \sin 3\theta + \dots; \\ \rho(\omega_3^\infty(\theta) - \omega_3(\theta)) &\simeq 0,000\,022. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Точность решения (2.10), полученного в рамках приближенного метода, достаточно высока, поэтому вычисление слагаемых суммы в правой части (2.4) с номером $k > 3$ не имеет смысла.

Коэффициенты a_1, a_2, \dots в уравнении (2.1) независимы и определяют неподвижную точку уравнения (1.5). Действительно, последовательно умножая левую и правую части уравнения (2.1) скалярно на функции $\sin k\theta$ ($k = 1, 2, \dots$) с учетом (2.4), (2.5), получим систему независимых уравнений

$$\delta_k = a_k - \int_0^{2\pi} \frac{\mu_{1n} \sin(k\sigma) f_n(\sigma)}{3k\pi(1 + \mu_{1n} g_n(\sigma))} d\sigma = 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

определяющую положение неподвижной точки в пространстве ортогональных на интервале $[0, 2\pi]$ функций $\sin k\theta$ ($k = 1, 2, \dots$). На рис. 2 представлена зависимость $\delta_1(a_1)$. В неподвижной точке $a_1 = 0,047\,452$ функция $\delta_1(a_1)$ равна нулю.

Возвращаясь к уравнению (1.7) и полагая, что $\mu = \mu_{13}$, находим параметр $\varepsilon = 0,489\,71$. Подставляя это значение в уравнение (1.7), получаем

$$\begin{aligned} \omega(\theta, \varepsilon) &= 0,047\,546 \sin \theta + 0,003\,152\,25 \sin 2\theta + 0,000\,456\,443 \sin 3\theta + O(\varepsilon^4); \\ \rho(\omega_3(\theta) - \omega(\theta, \varepsilon)) &\simeq 0,000\,41. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Сравнение уравнений (2.10) и (2.11) показывает, что полученные различными методами приближенные решения практически совпадают. Нельзя утверждать, что эти решения полностью независимы, так как в рамках метода Ляпунова — Шмидта параметр ε вычислить не удалось. На рис. 3 приведены зависимости $\omega_3(\theta)$ и $\Delta\omega = (\omega_3(\theta) - \omega(\theta, \varepsilon)) \cdot 10^2$.

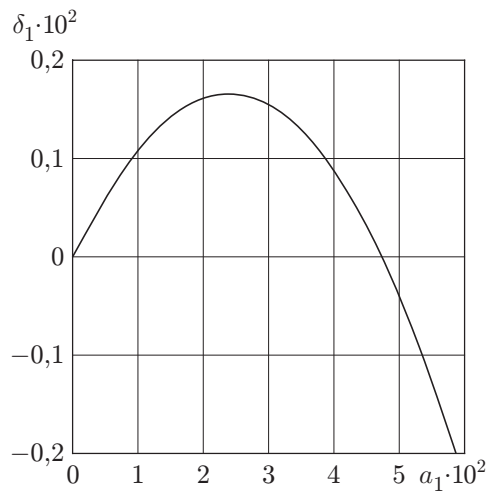


Рис. 2. Зависимость $\delta_1(a_1)$

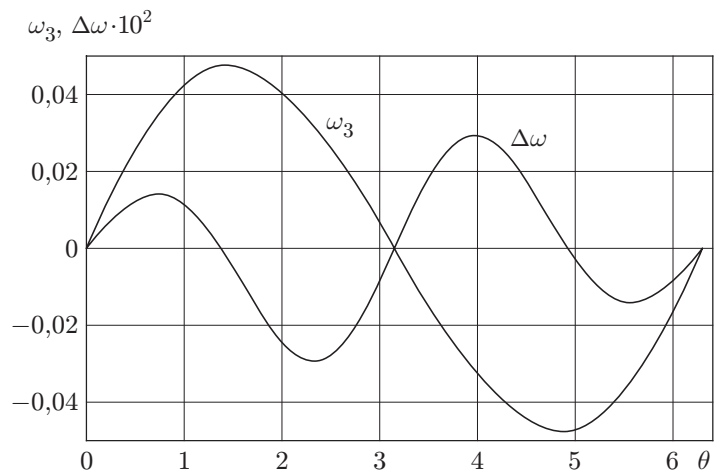


Рис. 3. Зависимости $\omega_3(\theta)$ и $\Delta\omega(\theta)$

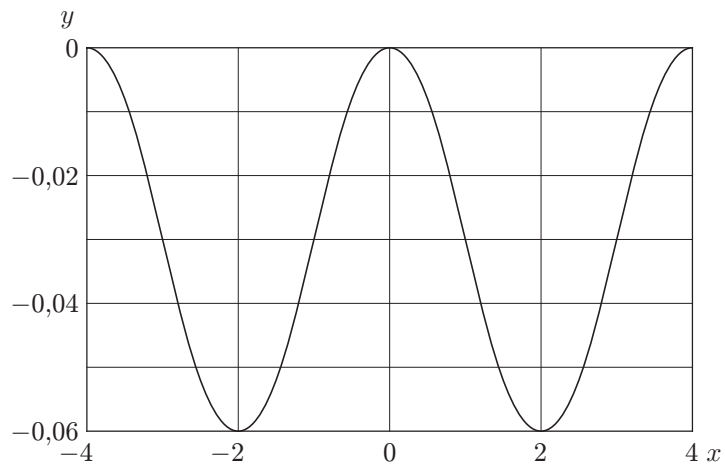


Рис. 4. Решение $y(x)$ задачи (1.1)-(1.3) при $\lambda = 1$ м, $\mu = 3,48971$

3. Решение системы уравнений (1.1)–(1.3). Вернемся к системе уравнений (1.1)–(1.3), для решения которой будем полагать, что $\omega(\theta) = \omega_3(\theta)$, $\mu = \mu_{13}$. Интегрируя уравнение (1.3), получим [3]

$$\ln R(\theta) = -\frac{1}{3} \ln \left[\frac{3\chi^2}{2\mu} \left(1 + \mu \int_0^\theta \sin \omega(\sigma) d\sigma \right) \right], \quad (3.1)$$

где $\chi^2 = g\lambda/(\pi c^2)$. Решение системы уравнений (1.1), (1.2) с учетом (3.1) позволяет найти зависимость $y = y(x)$, определяющую профиль волны, в параметрическом виде. Результаты расчета, проведенного при $\chi^2 = \mu$, $\lambda = 1$ м, представлены на рис. 4. Функция $\omega_3(\theta)$ определяется по формуле (2.10). Из расчетов следует, что волна с длиной $\lambda = 1$ м имеет амплитуду $a \simeq 0,06$ м и перемещается со скоростью $c \simeq 0,945$ м/с.

Автор выражает благодарность Н. И. Макаренко за обсуждение работы и ценные советы, а также рецензенту, указавшему на более строгое доказательство теоремы, что позволило уточнить ее первоначальную формулировку [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Некрасов А. И.** Собрание сочинений: В 2 т. Т. 1. Точная теория волн установившегося вида на поверхности тяжелой жидкости. М.: Физматгиз, 1961.
2. **Сретенский Л. Н.** Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977.
3. **Габов С. А.** Введение в теорию нелинейных волн. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1988.
4. **Hutson V. C. L.** Applications of functional analysis and operator theory / V. C. L. Hutson, J. S. Pym. N. Y.: Acad. Press, 1980.
5. **Вайнберг М. М.** Теория ветвлений решений нелинейных уравнений / М. М. Вайнберг, В. А. Треногин. М.: Наука, 1969.
6. **Функциональный анализ** / Под ред. С. Г. Крейна. М.: Наука, 1972.
7. **Боднарь Т. А.** О нелинейных волнах на поверхности несжимаемой тяжелой жидкости // Всерос. конф. “Теория и приложения задач со свободными границами”: Тез. докл., Бийск, 2–6 июля 2002 г. Барнаул: Алт. гос. ун-т, 2002. С. 20–22.
8. **Канторович Л. В.** Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. М.: Наука, 1984.
9. **Боднарь Т. А.** Приближенное решение уравнения Некрасова // Всерос. конф. с участием зарубеж. ученых “Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения”: Тез. докл., Бийск, 4–8 июля 2005 г. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО РАН, 2005. С. 21–22.

*Поступила в редакцию 5/IV 2006 г.,
в окончательном варианте — 22/XII 2006 г.*