

диента давления при наличии тонкого водного слоя на поверхности обтекаемого тела, что при отдельных условиях может привести к преждевременному отрыву воздушного потока.

Однако приведенные расчеты δ_1 при значении dp/dx , отличном от нуля, требуют дополнительной экспериментальной проверки и уточнения параметров, определяющих волновую шероховатость поверхности жидкой пленки.

Как следует из анализа рис. 1 и 2, несмотря на достигнутое качественное соответствие, во всех случаях имеет место систематическое отклонение расчетной толщины пленки по сравнению с измеренной. Подобное количественное расхождение может быть объяснено рядом принятых ранее допущений и, в частности, неучетом турбулизирующего воздействия внешних факторов на характер течения водной пленки.

Вместе с тем полученные результаты свидетельствуют о возможности применения данного подхода к моделированию и расчету такого типа гетерогенных течений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бояджиев Х., Бешков В. Массоперенос в движущихся пленках жидкости. — М.: Мир, 1988.
2. Аладьев С. И. К расчету волновых пленок // Сб. тр./Энерг. ин-т им. Г. М. Кржижановского. — 1977. — Вып. 25.
3. Максимов В. С., Касьянов В. А., Михайлова Р. А., Коваль Ю. Г. Расчет параметров ламинарной термодинамической структуры пограничного слоя, образующегося на профиле крыла при полете летательного аппарата в капельном облаке с включенной системой противообледенительной защиты // Аэродинамика: Межвуз. сб. науч. тр./КИИГА. — 1973. — Вып. 8.
4. Рыжов С. В. О движении ламинарной безволновой пленки жидкости на короткой горизонтальной пластине, обтекаемой газовым потоком // Судостроение и морские сооружения: Сб./ХГУ. — 1969. — Вып. 11.
5. Фадеев И. П. Эрозия влажнопаровых турбин. — Л.: Машиностроение, 1974.
6. Поваров О. А., Филиппов Г. А., Васильченко Е. Г. Экспериментальное исследование волновых режимов течения жидких пленок в спутном газовом потоке // Теплоэнергетика. — 1978. — № 5.
7. Дейч М. Е., Тетера И. П. Исследование двухфазного пограничного слоя // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. — 1980. — № 4.
8. Мовчан В. Т. Приближенно-аналитическое исследование турбулентного градиентного пограничного слоя // ПМТФ. — 1982. — № 3.
9. Шквар Е. А. К учету влияния шероховатости обтекаемой поверхности // ПМТФ. — 1986. — № 6.
10. Агеев С. Е. Расчет течения жидкой пленки // Некоторые вопросы прикладной аэродинамики: Сб. науч. тр./КИИГА. — 1986.
11. Пасконов В. М., Полежаев В. П., Чудов Л. А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. — М.: Наука, 1984.
12. Рыжков С. В., Ершов В. В., Мирошниченко В. Н. О характере течения пленки на короткой горизонтальной пластине, обтекаемой газовым потоком // Теплоэнергетика: Тр./НКИ. — 1970. — Вып. 33.

г. Киев

Поступила 2/II 1989 г.,
в окончательном варианте — 16/V 1989 г.

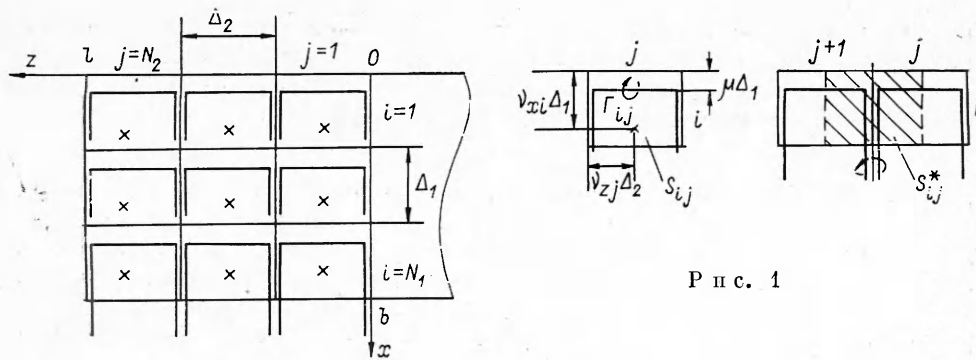
УДК 533.6

Д. Н. Горелов, О. В. Чернов

УЧЕТ ЛОКАЛЬНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ НЕСУЩЕЙ ВИХРЕВОЙ ПОВЕРХНОСТИ В МЕТОДЕ ДИСКРЕТНЫХ ВИХРЕЙ

Метод дискретных вихрей (МДВ) является эффективным методом решения сингулярных интегральных уравнений, встречающихся в теории крыла. Этим объясняется его успешное использование для решения широкого класса линейных и нелинейных задач стационарного, нестационарного, отрывного и безотрывного обтекания крыла. Результаты расчетов, как правило, хорошо согласуются с эксперименталь-

© 1990 Горелов Д. П., Чернов О. В.



Р и с. 1

ными данными. Методу дискретных вихрей посвящена обширная литература (см., например, [1—4]). Детальному анализу подверглись многие аспекты МДВ, включая вопросы сходимости различных расчетных схем и расширения области его применения [5].

В большинстве работ крыло конечного размаха моделируется системой дискретных подковообразных вихревых шнуров (П-образных вихрей). Для этого крыло разбивается на конечное число элементов, каждый из которых заменяется одним П-образным вихрем. Условие непротекания жидкости через крыло выполняется в контрольных точках, выбираемых обычно на равных расстояниях между дискретными вихрями. Такая расчетная схема обеспечивает сходимость приближенного решения к точному при увеличении числа элементов для любой фиксированной внутренней части крыла [5], но дает неустранимую погрешность для дискретных вихрей, расположенных у передней кромки крыла (при условии безотрывного обтекания этой кромки). Аналогичная ситуация имеет место и при моделировании крыла системой замкнутых вихревых рамок.

В [6, 7] показано, что изменением положения контрольных точек при сохранении положения дискретных вихрей можно добиться сходимости приближенного решения к точному на всем крыле, включая его кромки. Для этого контрольные точки должны выбираться из условия, что непрерывный вихревой слой, моделирующий крыло и вихревую пелену за ним, индуцирует в этих точках те же скорости, что и система дискретных вихрей. Задача нахождения контрольных точек может решаться отдельно для каждой части крыла с учетом локальных особенностей несущей вихревой поверхности, которые задаются в соответствии с выбранным классом решения нелинейного сингулярного интегрального уравнения.

В настоящей работе определены соответствующие контрольные точки для прямоугольного крыла конечного размаха в случаях моделирования его П-образными вихрями и замкнутыми вихревыми рамками. Приведены примеры расчета стационарных аэродинамических характеристик и присоединенных масс, показывающие высокую эффективность предлагаемых расчетных схем.

1. Рассмотрим сначала схему П-образных вихрей. Для правильного выбора контрольных точек в этой схеме необходимо знать особенности несущей вихревой поверхности, моделирующей крыло.

Пусть крыло обтекается стационарным потоком идеальной несжимаемой жидкости, а задача обтекания решается в рамках линейной теории тонкого крыла. Свяжем с крылом декартову систему координат $Oxyz$ (рис. 1). Векторную интенсивность вихревой поверхности, моделирующей крыло и вихревую пелену за ним, представим в виде

$$\gamma(x, z) = \gamma_x(x, z)x^0 + \gamma_z(x, z)z^0$$

(x^0, z^0 — орты координатных осей). В линейной теории γ_z — интенсивность присоединенных, а γ_x — свободных вихрей. Функции γ_x, γ_z связаны уравнением $\text{div } \gamma = 0$. На вихревой пелене $\gamma_z = 0$ и $\partial\gamma_x/\partial x = 0$. При безотрывном обтекании передней и боковых кромок крыла на этих кромках должны выполняться условия:

$$\gamma_x(0, z) = 0 \text{ при } |z| \leq l, \gamma_z(x, -l) = \gamma_z(x, l) = 0 \text{ при } 0 \leq x \leq b.$$

Предположим, что решение задачи обтекания крыла ищется в классе функций γ_z , ограниченных в задней кромке крыла и неограниченных в передней. Тогда в точках задней кромки $\gamma_z(b, z) = 0$ (постулат Жуковского), а в окрестности передней кромки ($x = 0, |z| \leq l$) функция γ_z имеет особенность $\gamma_z \sim 1/\sqrt{x}$. Что касается функции γ_x , то в окрестности бо-

ковых кромок ($0 < x < b, |z| = l$) $\gamma_x \sim 1/\sqrt{l^2 - z^2}$. В результате в точках крыла ($0 \leq x \leq b, |z| \leq l$) функции γ_x, γ_z запишутся так:

$$(1.1) \quad \gamma_x(x, z) = \sqrt{\frac{x}{l^2 - z^2}} R_1(x, z), \quad \gamma_z(x, z) = \sqrt{\frac{b-x}{x}} (l^2 - z^2) R_2(x, z),$$

где R_1, R_2 — функции, не имеющие особенностей на кромках крыла. Разобьем теперь каждое полукрыло на конечное число элементов. Для этого возьмем на корневой хорде (оси x) точки $x_i = i\Delta_1, i = 1, \dots, N_1$, а на передней кромке левого полукрыла (оси z) — точки $z_j = j\Delta_2, j = 1, \dots, N_2$ ($\Delta_1 = b/N_1, \Delta_2 = l/N_2$). Проведя через них прямые, параллельные осям x и z , получим $N = N_1 \times N_2$ элементов S_{ij} . Аналогичным путем делим и правое полукрыло.

Следуя методу дискретных вихрей, с каждым элементом S_{ij} свяжем П-образный вихревой шнур постоянной интенсивности Γ_{ij} , располагая его на расстоянии $\mu\Delta_1$ от передней кромки этого элемента (см. рис. 1). Коэффициент μ , определяющий положение вершины вихревого шнура на элементе S_{ij} в долях его хорды, может выбираться произвольно от нуля до $1/2$, так как при таких μ вершина подковообразного вихря Γ_{ij} и соответствующая контрольная точка не выходят за пределы элемента S_{ij} . Произвольность выбора μ связана с тем, что перемещение всей системы П-образных вихрей и контрольных точек на крыле при сохранении расстояний между ними не влияет на точность расчета интенсивности дискретных вихрей Γ_{ij} . В большинстве расчетных схем задается $\mu = 1/4$.

По определению П-образного вихря,

$$(1.2) \quad \Gamma_{ij} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \gamma_z(x, z) dx, \quad z_{j-1} < z < z_j.$$

Из (1.2) следует, что моделирование крыла системой П-образных вихрей отвечает предположению о независимости функции γ_z от z на каждом элементе S_{ij} . В то же время формула (1.2) допускает любую зависимость γ_z от x в полосе $z_{j-1} < z < z_j$, включая особенность на передней кромке крыла и нуль на задней. Таким образом, согласно (1.1) и (1.2), решение задачи обтекания крыла методом П-образных вихрей позволяет представить интенсивность присоединенных вихрей γ_z в виде

$$(1.3) \quad \gamma_z(x, z) = \sqrt{\frac{b-x}{x}} f_j(x), \quad z_{j-1} < z < z_j, \quad j = 1, \dots, N_2.$$

Перейдем к установлению связи между Γ_{ij} и интенсивностью свободных вихрей γ_x . В рассматриваемой расчетной схеме свободные вихри моделируются «усами», сходящими с вершин П-образных вихрей. Векторные интенсивности «усов», сходящих с каждого присоединенного вихря Γ_{ij} , равны по модулю и противоположны по направлению. Поэтому суммарная их интенсивность на элементе S_{ij} равна нулю. Сумма же интенсивностей «усов», сходящих с соседних элементов крыла и расположенных на стыке между ними (в сечениях $z = z_j$), в общем случае отлична от нуля. В связи с этим функцию γ_x следует определять не на S_{ij} , а на элементах крыла S_{ij}^* , сдвинутых по отношению к S_{ij} на расстояние $\Delta_2/2$ вдоль оси z (см. рис. 1). В результате элементы $S_{iN_2}^*$, примыкающие к боковой кромке крыла, имеют ширину $\Delta_2/2$, а остальные — ширину Δ_2 (элементы S_{i0}^* делятся корневой хордой пополам). Интенсивность свободных вихрей γ_x определяется тогда на S_{ij}^* через сумму интенсивностей всех «усов», проходящих через S_{ij}^* . При этом функцию γ_x , по аналогии с (1.3), можно записать как

$$(1.4) \quad \gamma_x(x, z) = \frac{1}{\sqrt{l^2 - z^2}} g_i(z), \quad x_{i-1} < x < x_i, \quad i = 1, \dots, N_1.$$

Перейдем к непосредственному нахождению положения контрольных точек на крыле при моделировании его П-образными вихрями с учетом зависимостей (1.3), (1.4). Представим координаты контрольных точек x_{0i} , z_{0j} в виде

$$(1.5) \quad x_{0i} = \Delta_1(i - 1 + v_{xi}), \quad i = 1, \dots, N_1, \quad z_{0j} = \Delta_2(j - v_{zj}), \\ j = 1, \dots, N_2.$$

Коэффициенты v_{xi} , v_{zj} задают безразмерное расстояние между контрольной точкой на S_{ij} и кромками этого элемента в долях Δ_1 и Δ_2 соответственно. Вычисление v_{xi} , v_{zj} проведем, следуя [6], отдельно для каждой малой фиксированной области внутри крыла и вблизи передней, задней и боковых кромок независимо от влияния остальной части вихревой поверхности. Для этого в каждой области ограничимся первым приближением для γ_x , γ_z . Для внутренних областей таким приближением будет $\gamma_x = \text{const}$, $\gamma_z = \text{const}$, для областей вблизи передней кромки $\gamma_x = 0$, $\gamma_z = \text{const}/\sqrt{x}$, задней кромки $\gamma_x = \text{const}$, $\gamma_z = \text{const}/\sqrt{b-x}$, а вблизи боковых кромок $\gamma_x = \text{const}/\sqrt{l^2 - z^2}$, $\gamma_z = 0$.

Разобьем теперь каждую область на элементы вида S_{ij} , S_{ij}^* , заменим вихревые слои на них дискретными вихрями, вычислим скорости, индуцированные системой дискретных вихрей и непрерывным вихревым слоем, и найдем точки, в которых эти скорости совпадают. Увеличивая число элементов в рассматриваемой фиксированной области до бесконечности, получим в результате коэффициенты v_{xi} , v_{zj} для предельного случая $N_1 \rightarrow \infty$, $N_2 \rightarrow \infty$. Вычисленные таким образом v_{xi} , v_{zj} , определяющие координаты контрольных точек x_{0i} , z_{0j} , позволяют решать задачу обтекания крыла при сколь угодно большом числе дискретных вихрей. В первом приближении получаем

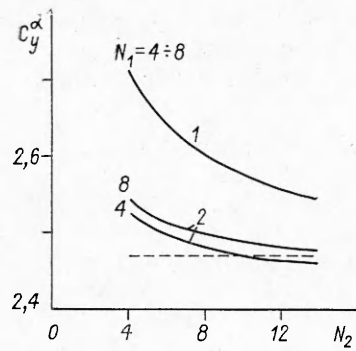
$$(1.6) \quad v_{x1} = \mu + 0,55, \quad v_{xi} = \mu + 0,5 \quad \text{при } i = 2, \dots, N_1 - 1, \quad v_{xN_1} = \mu + 0,38, \\ v_{zj} = 0,5 \quad \text{при } j = 1, \dots, N_2 - 1, \quad v_{zN_2} = 0,4.$$

Иначе говоря, на всем крыле, кроме элементов, примыкающих к кромкам, сохраняется стандартная схема равномерного расположения вихрей и контрольных точек. Но вблизи передней кромки контрольные точки сдвигаются несколько назад, вблизи задней — вперед, а у боковых кромок — ближе к кромкам.

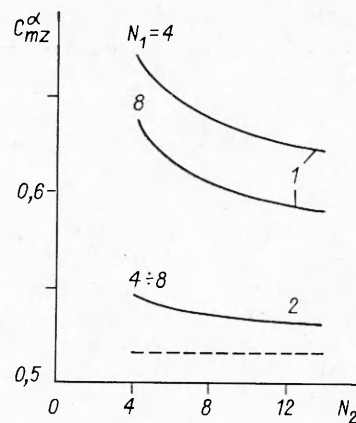
2. Выясним влияние локальных особенностей несущей вихревой поверхности на расчет гидродинамических характеристик крыла конечного размаха методом дискретных П-образных вихрей. Пусть крыло обтекается стационарным потоком идеальной несжимаемой жидкости под углом атаки α , а соответствующая краевая задача решается в линейной постановке [1]. Расчет проведем для двух схем, одна из которых — стандартная схема (1/4, 3/4) равномерного расположения дискретных вихрей и контрольных точек, а другая отличается от первой только иным распределением контрольных точек, задаваемых формулами (1.5), (1.6), вблизи кромок крыла. Строго говоря, обе расчетные схемы «чувствуют» безграничное возрастание интенсивности вихревой поверхности при подходе к передней кромке крыла, что обусловлено расположением дискретных вихрей впереди контрольных точек на каждом элементе. Но вторая схема позволяет учесть особенность на передней кромке более полно и, кроме того, учитывает характер поведения вихревой интенсивности вблизи задней и боковых кромок крыла.

Подъемная сила Δp_{ij} , действующая на элемент S_{ij} : $\Delta p_{ij} = -\rho V \Gamma_{ij} \Delta_2$, где V — скорость потока на бесконечности; ρ — плотность жидкости. Отсюда суммарная подъемная сила

$$R_y = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_y^\alpha \alpha = -2\rho V \Delta_2 \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} \Gamma_{ij}.$$



Р и с. 2



Р и с. 3

Здесь S — площадь крыла; C_y^α — производная коэффициента C_y подъемной силы по углу атаки α .

Результаты расчета коэффициента C_y^α для крыла удлинения $\lambda = 2$ ($\lambda = 2l/b$) представлены на рис. 2. Кривые 1 отвечают стандартной схеме расчета, 2 — предлагаемой схеме по (1.5), (1.6) при $\mu = 1/4$. Штриховая линия — результаты расчета из [8], которые получены иным методом, хорошо согласуются с данными других авторов, и их можно брать в качестве тестовых.

Приведенные материалы показывают, что расчет по предложенной схеме выбора контрольных точек сходится к тестовому решению при возрастании числа элементов на крыле значительно быстрее, чем по стандартной схеме. Это позволяет получать требуемую точность расчетов при меньшем числе элементов. Отметим, что подъемная сила R_y , определенная по стандартной схеме, слабо зависит от числа разбиений N_1 вдоль хорды крыла (в предельном случае $\lambda \rightarrow \infty$ коэффициент $C_y^\alpha = 2\pi$ для любого N_1).

Помимо подъемной силы, основными характеристиками взаимодействия крыла с потоком являются момент гидродинамических сил M_z относительно оси z и индуктивное сопротивление R_{xi} . В рамках линейной теории тонкого крыла

$$(2.1) \quad M_z = \int_{-l}^{+l} \left\{ \int_0^b x \gamma_z(x, z) dx \right\} dz, \quad R_{xi} = R_y \alpha - Q;$$

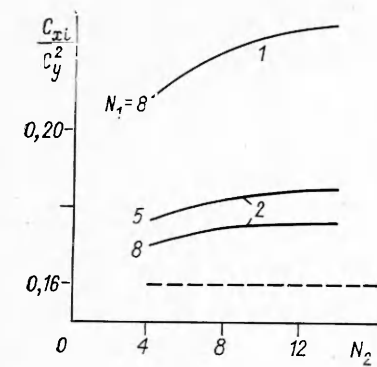
$$(2.2) \quad Q = -\pi \rho \lim_{x \rightarrow 0} \int_{-l}^{+l} x \gamma_z^2(x, z) dz$$

(Q — подсосывающая сила, действующая на переднюю кромку тонкого крыла).

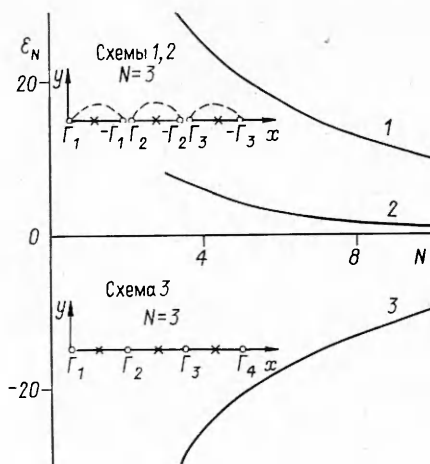
Из (2.1), (2.2) видно, что для вычисления M_z , R_{xi} необходимо знать распределение вихревой интенсивности $\gamma_z(x, z)$ по поверхности крыла. Метод дискретных вихрей позволяет определять только суммарные интенсивности вихрей Γ_{ij} на элементах S_{ij} . Поэтому возникает задача приближенного определения $\gamma_z(x, z)$ по заданным значениям Γ_{ij} . Ее можно решать с разной степенью приближения. В настоящей работе применена сплайновая аппроксимация функции $\gamma_z(x, z)$ в каждой полосе $z_{j-1} < z < z_j$, $j = 1, \dots, N_2$, вида

$$(2.3) \quad \gamma_z(x, z) = \begin{cases} (a_1^{(j)} + a_2^{(j)} \xi) / \sqrt{\xi}, & 0 < \xi < \xi_1, \\ a_{3i-3}^{(j)} + a_{3i-2}^{(j)} (\xi - \xi_i) + a_{3i-1}^{(j)} (\xi - \xi_i)^2, & \xi_{i-1} \leq \xi \leq \xi_i, \\ \sqrt{1 - \xi} (a_{3N_1-3}^{(j)} + a_{3N_1-2}^{(j)} (1 - \xi)), & \xi_{N_1-1} \leq \xi \leq 1, \end{cases}$$

($\xi = x/b$, $\xi_i = i/N_1$).



Р и с. 4



Р и с. 5

Формулы (2.3) содержат $(3N_1 - 2)$ неизвестных коэффициентов. Для их нахождения потребуем, чтобы суммарная интенсивность вихревого слоя, согласно (2.3), на каждом интервале $[x_{i-1}, x_i]$ была равна Γ_{ij} , а на внутренних границах этих интервалов функция γ_z и ее первая производная были непрерывными. В результате получим систему $(3N_1 - 2)$ линейных алгебраических уравнений, решение которой дает искомые коэффициенты.

Точность аппроксимации (2.3) оценивалась на задаче обтекания пластинки плоским стационарным потоком, имеющей точное решение $\gamma_z(x) = -2V\alpha\sqrt{(b-x)/x}$. По этому решению определялись дискретные вихри $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{N_1}$, а затем по (2.3) восстанавливалась функция $\gamma_z(x)$. Расчеты показали высокую точность аппроксимации (2.3). Так, например, при числе дискретных вихрей $N_1 = 10$ относительная погрешность аппроксимации не превышала 1% во всех точках пластинки, включая переднюю кромку.

Аппроксимация (2.3) была использована для расчета по (2.1), (2.2) момента гидродинамических сил и индуктивного сопротивления, действующих на крыло. Величины M_z, R_{xi} имели вид

$$M_z = (1/2)\rho V^2 S C_{mz}^\alpha, \quad R_{xi} = (1/2)\rho V^2 S C_{xi}.$$

Результаты расчета безразмерных коэффициентов $C_{mz}^\alpha, C_{xi}/C_y^2$ для крыла удлинения $\lambda = 2$, полученные по стандартной (кривые 1) и предлагаемой (2) схемам, представлены на рис. 3, 4. Штриховые линии отвечают данным работы [8]. Приведенные результаты снова показывают высокую эффективность предлагаемой расчетной схемы.

3. Рассмотрим теперь схему замкнутых вихревых рамок. Такой способ моделирования вихревой поверхности удобно применять для решения задач о присоединенных массах колеблющегося крыла [2]. В этом случае использование замкнутых вихревых шнуров постоянной интенсивности позволяет автоматически выполнить условие бесциркуляционности течения вокруг любого сечения крыла.

В задачах о присоединенных массах решение для вектора интенсивности несущей вихревой поверхности $\gamma(x, z, t)$ ищется в классе функций, у которых касательная к кромкам крыла компонента вектора γ имеет особенность на кромках. Влияние этих особенностей на положение контрольных точек аналогично влиянию «усов» П-образных вихрей. А именно, для элементов крыла, примыкающих к кромкам, контрольные точки должны отстоять на 0,4 длины элемента от соответствующей кромки, а на остальных элементах располагаться в их середине.

Эффективность предлагаемого выбора контрольных точек оценим на решении задачи о присоединенных массах пластинки бесконечного

удлинения, совершающей поступательные колебания вдоль оси y . Для плоского потока вихревые рамки на пластинке $y = 0$, $x \in [0, b]$ выражаются в систему дискретных вихрей $\Gamma_1, -\Gamma_1 + \Gamma_2, \dots, -\Gamma_{N-1} + \Gamma_N, -\Gamma_N$, расположенных в точках $x_0 = 0, x_1 = b/N, \dots, x_{N-1} = (N-1) \cdot b/N, x_N = b$ соответственно. В качестве примера на рис. 5 показано размещение вихрей и контрольных точек на пластинке ($\lambda = \infty$) для числа элементов $N = 3$ (схемы 1, 2). Схема 1 отвечает стандартному расположению контрольных точек между вихрями ($x_{0k} = b(k-0,5)/N, k = 1, \dots, N$), а в схеме 2 контрольные точки выбираются с учетом локальных особенностей функции $\gamma_z(x, t)$ вблизи кромок ($x_{01} = 0,4b/N, x_{0k} = b(k-0,5)/N$ при $k = 2, \dots, N-1, x_{0N} = b(N-0,4)/N$).

В настоящее время для решения задач о присоединенных массах применяется обычно расчетная схема 3, которая получается из схемы 1 путем замены каждой пары вихрей $(-\Gamma_{k-1} + \Gamma_k)$ одним вихрем [2]. В результате имеем систему дискретных вихрей $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{N+1}$, расположенных на концах элементов пластинки, а контрольные точки выбираем на равных расстояниях между вихрями (см. рис. 5). Строго говоря, в схеме 3 несущая вихревая поверхность моделируется не вихревыми рамками, а П-образными вихрями, число которых на единицу больше числа контрольных точек. Поэтому схема 3, в отличие от схем 1, 2, не удовлетворяет автоматически условию бесциркулярного обтекания пластинки и для его выполнения необходимо потребовать, чтобы сумма дискретных вихрей $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{N+1}$ была равна нулю.

В рамках линейной теории тонкого крыла гидродинамическое давление в точках пластинки, колеблющейся в покоящейся (на бесконечности) жидкости без образования вихревых следов, определяется интегралом Коши — Лагранжа $p - p_\infty = -\rho \partial \varphi / \partial t$ (φ — потенциал скорости, p_∞ — давление в бесконечно удаленной точке). Отсюда проекция суммарной гидродинамической силы на ось

$$(3.1) \quad R_y = \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_0^b \left\{ \int_0^x \gamma_z(u, t) du \right\} dx.$$

В рассматриваемом случае поступательных колебаний пластинки $R_y = -\lambda_y \ddot{y}$, где λ_y — коэффициент присоединенных масс; $y(t)$ — перемещение пластинки вдоль оси y . Для точного решения задачи $\lambda_y = \rho \pi b^2 / 4$.

Из (3.1) следует, что при решении той же задачи методом дискретных вихрей необходимо установить связь между интенсивностью исходного вихревого слоя $\gamma_z(x, t)$ и системой дискретных вихрей. Связь устанавливается с помощью сплайновой аппроксимации функции γ_z аналогично формулам (2.3). При этом γ_z должна иметь особенность на обоих краях пластинки. Кроме того, следует учесть, что вихри Γ_1 и $-\Gamma_N$ определяют суммарные интенсивности вихревого слоя на элементах длиной $\Delta_1/2$, тогда как остальные вихри — на элементах длиной Δ_1 . В результате $\gamma_z(x, t)$ аппроксимируется функцией вида

$$(3.2) \quad \gamma_z(x, t) = \begin{cases} (b_1 + b_2 \xi) / \sqrt{\xi}, & 0 < \xi \leq \xi_1^*, \\ b_{3i-3} + b_{3i-2} (\xi - \xi_i^*) + b_{3i-1} (\xi - \xi_i^*)^2, & \xi_{i-1}^* \leq \xi \leq \xi_i^*, \\ & i = 2, \dots, N, \\ (b_{3N} + b_{3N+1} (1 - \xi) / \sqrt{1 - \xi}), & \xi_N^* \leq \xi < 1 \\ (\xi_k^* = x_k^* / b = (k - 0,5) / N, k = 1, \dots, N). \end{cases}$$

Формулы (3.2) содержат $3N+1$ неизвестных коэффициентов b_1^*, \dots, b_{3N+1}^* , которые находятся из $N+1$ условий:

$$(3.3) \quad \Gamma_1 = \int_0^{x_1^*} \gamma_z dz; \quad \Gamma_k - \Gamma_{k-1} = \int_{x_{k-1}^*}^{x_k^*} \gamma_z dx, \quad k = 2, \dots, N; \quad -\Gamma_N = \int_{-x_N^*}^b \gamma_z dx$$

и $2N$ условий непрерывности функции γ_z и ее первой производной в точках x_1^*, \dots, x_N^* . При расчете дискретных вихрей по схеме 3 в (3.3) должны стоять слева величины $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{N+1}$.

На рис. 5 представлена зависимость относительной погрешности расчета коэффициента присоединенных масс λ_y по схемам 1—3 от числа N элементов на пластинке. Приведенные результаты показывают, что расчет по схеме 2, учитывающей локальные особенности вихревого слоя, сходится к точному значению λ_y гораздо быстрее, чем расчет по стандартным схемам 1, 3. Интересно отметить, что в рассматриваемой тестовой задаче схемы 1, 3 дают одинаковые по абсолютной величине, но противоположные по знаку относительные погрешности.

По аналогичным схемам 1—3 был проведен расчет присоединенных масс прямоугольной пластинки ($0 \leq x \leq b$, $y = 0$, $0 \leq z \leq l$), колеблющейся поступательно вдоль оси y . Пластинка разбивалась на $N_1 \times N_2$ элементов, каждый из которых заменялся замкнутой вихревой рамкой (на рис. 6 приведен пример такого разбиения для $N_1 = N_2 = 3$). В схеме 3 на элементах, примыкающих к задней кромке, рамки заменяются П-образными вихрями.

Результаты расчета коэффициента λ_y по схемам 1—3 в зависимости от удлинения пластинки $\lambda = l/b$ при $N_1 = N_2 = 10$ представлены на рис. 6. Величина $\lambda_{y\infty}$ соответствует точному значению λ_y при $\lambda = \infty$. Штриховая линия — экспериментальная зависимость λ_y от λ из [9].

Данные расчета по схеме 2 хорошо согласуются с экспериментом для всех значений λ , тогда как расчет по схеме 1 дает завышенные, а по схеме 3 — заниженные результаты, особенно при больших удлинениях пластины. Рис. 5, 6 иллюстрируют высокую эффективность расчетной схемы 2.

Таким образом, при моделировании крыла системами П-образных вихрей и замкнутых вихревых рамок расчетные схемы, в которых контрольные точки выбираются с учетом локальных особенностей, обеспечивают высокую точность расчета распределенных и суммарных гидродинамических характеристик крыла.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоцерковский С. М. Тонкая несущая поверхность в дозвуковом потоке газа.— М.: Наука, 1965.
2. Белоцерковский С. М., Скрипач Б. К., Табачников В. Г. Крыло в нестационарном потоке газа.— М.: Наука, 1971.
3. Белоцерковский С. М., Скрипач Б. К. Аэродинамические производные летательного аппарата и крыла при дозвуковых скоростях.— М.: Наука, 1975.
4. Белоцерковский С. М., Ништ М. П. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью.— М.: Наука, 1978.
5. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике.— М.: Наука, 1985.
6. Горелов Д. Н. Локальная аппроксимация вихревого слоя системой дискретных вихрей // ПМТФ.— 1980.— № 5.
7. Горелов Д. Н. О сходимости метода дискретных вихрей, основанного на локальной аппроксимации вихревого слоя // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики.— 1984.— Вып. 68.

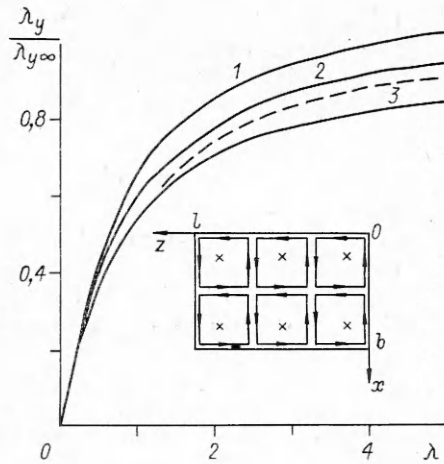


Рис. 6

8. Lane C. E. A quasi-vortex-lattice method in thin wing theory // J. Aircraft.— 1974.— V. 11, N 9.
 9. Риман И. С., Крепец Р. Л. Присоединенные массы тел различной формы // Тр. ЦАГИ.— 1947.— Вып. 635.

г. Омск

Поступила 23/V 1989 г.

УДК 532.526.2:532.526.4

В. И. Васильев, С. В. Хохлов, Е. Ю. Шальман

К РАСЧЕТУ ОТРЫВНЫХ ТЕЧЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

В [1] продемонстрирована возможность расчета отрывных течений с помощью интегральных методов теории пограничного слоя. В [2] показано, что, решая обратную задачу для полной системы уравнений пограничного слоя и учитывая взаимодействие с внешним потоком, можно сравнительно просто рассчитать течения с тонкими отрывными зонами, не прибегая при этом к интегрированию уравнений Навье — Стокса. В настоящее время такой подход используется в основном для описания течений вокруг профилей [3, 4]. Цель данной работы — создание вычислительной методики, которая позволила бы в рамках теории взаимодействующего пограничного слоя рассчитывать несколько иной класс течений, часто встречающихся в приложениях. К ним относятся, в частности, течения в диффузорных каналах и в каналах с разделителем потоков. Рассматриваются как ламинарные, так и турбулентные течения. Предложен способ ускорения сходимости итерационного процесса.

1. Отметим, что, в принципе, имеется несколько возможностей описания сильного взаимодействия (являющегося главной особенностью отрывных течений), классифицируемых по тому признаку, какая задача (прямая или обратная) решается для внешнего потока и пограничного слоя. Первая возможность — чисто прямая задача. Здесь определяется скорость невязкого потока вдоль поверхности u_e , затем находится толщина вытеснения δ , контур поверхности подправляется на толщину вытеснения и вновь рассчитывается u_e . Процесс продолжается до установления и может быть представлен в виде схемы

$$(1.1) \quad u_e \rightarrow \delta \rightarrow u_e \rightarrow \delta \rightarrow \dots$$

Вторая возможность — чисто обратная задача. Вначале задается толщина вытеснения. Из обратной задачи для пограничного слоя определяется скорость на внешней границе U_e , которая должна совпадать со скоростью в невязком потоке. Для того чтобы удовлетворить последнему условию, решается обратная задача для внешнего течения и находится новое распределение δ , и т. д. Схематически данную процедуру можно записать так:

$$(1.2) \quad \delta \rightarrow U_e \rightarrow \delta \rightarrow U_e \rightarrow \dots$$

Третья возможность — обратно-прямая задача. По заданному распределению u_e находятся две толщины вытеснения: δ — из решения прямой задачи для пограничного слоя и Δ — из решения обратной задачи для внешнего течения. По разнице этих величин корректируется u_e и процесс повторяется:

$$(1.3) \quad \begin{array}{c} \delta \quad \delta \\ \nearrow \quad \searrow \quad \nearrow \quad \searrow \\ u_e \quad \Delta \quad u_e \quad \Delta \quad \dots \end{array}$$

Наконец, рассмотрим прямо-обратную задачу, когда по заданной толщине вытеснения находятся u_e (прямая задача) и U_e (обратная задача для пограничного слоя), а по их разнице корректируется δ :

$$(1.4) \quad \begin{array}{c} U_e \quad U_e \\ \nearrow \quad \searrow \quad \nearrow \quad \searrow \\ \delta \quad u_e \quad \delta \quad u_e \quad \dots \end{array}$$