УДК 539.376

УСТАНОВИВШАЯСЯ ПОЛЗУЧЕСТЬ ИЗГИБАЕМЫХ АРМИРОВАННЫХ МЕТАЛЛОКОМПОЗИТНЫХ ПЛАСТИН С УЧЕТОМ ОСЛАБЛЕННОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ПОПЕРЕЧНОМУ СДВИГУ. 1. МОДЕЛЬ ДЕФОРМИРОВАНИЯ

А. П. Янковский

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: lab4nemir@rambler.ru

С использованием второго варианта теории Тимошенко в прямоугольной декартовой системе координат сформулирована задача деформирования армированных металлокомпозитных пластин с учетом их ослабленного сопротивления поперечному сдвигу в условиях установившейся ползучести. Рассмотрена аналогичная модельная задача осесимметричного изгиба армированных пластин в полярной системе координат.

Ключевые слова: армированные металлокомпозиты, пластины, установившаяся ползучесть, теория Тимошенко.

Введение. В работе [1] предложены итерационные модели, описывающие механическое поведение перекрестно армированных металлокомпозитных сред в условиях установившейся изотропной ползучести всех фазовых материалов. В [2] на примере изгибаемых слоистых металлокомпозитных пластин с регулярной структурой показана необходимость учета ослабленного сопротивления поперечному сдвигу тонкостенных элементов конструкций, работающих в условиях установившейся ползучести всех фазовых материалов. Поскольку можно предположить, что в условиях установившейся ползучести поведение перекрестно армированных в плане металлокомпозитных пластин будет аналогичным, в настоящей работе с использованием структурных соотношений из [1] представлены результаты моделирования механического поведения армированных металлокомпозитных пластин с учетом их ослабленного сопротивления поперечному сдвигу при изгибе в условиях установившейся ползучести всех компонентов композиции.

1. Изгиб армированных металлокомпозитных пластин с учетом ослабленного сопротивления поперечному сдвигу в условиях установившейся ползучести. При изучении механического поведения линейно-упругоизгибаемых композитных тонкостенных элементов конструкций типа пластин и оболочек с волокнистой структурой учитывать их ослабленное сопротивление поперечному сдвигу целесообразно лишь в случае, когда модули упругости фазовых материалов различаются на несколько порядков (в 30 и более раз) [3–9]. В металлокомпозитных тонкостенных конструкциях модули

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14-01-00102-а).

упругости фазовых материалов различаются менее чем на порядок [10], поэтому при исследовании их поведения в условиях изгиба достаточно использовать классическую теорию Кирхгофа — Лява [4, 5, 7, 9], не учитывающую поперечные сдвиги.

Однако при изучении механического поведения изгибаемых металлокомпозитных пластин и оболочек, работающих в условиях установившейся ползучести всех фазовых материалов, может оказаться необходимым учет их ослабленного сопротивления поперечному сдвигу. (Насколько известно автору данной работы, до настоящего времени деформирование тонкостенных армированных конструкций в условиях установившейся ползучести изучалось лишь в рамках классической теории [11, 12].) Действительно, в работе [1] предложены итерационные модели деформирования перекрестно армированных металлокомпозитов, работающих в условиях установившейся ползучести, основанные на использовании метода последовательных приближений, аналогичного методу секущего модуля [13]. Покажем, что для некоторых металлокомпозиций при одних и тех же скоростях деформаций ползучести секущие модули (которым в упругом случае соответствуют модули упругости) фазовых материалов могут различаться более чем в 30 раз и даже на несколько порядков.

Рассмотрим металлокомпозиции, состоящие из медного (Cu) или алюминиевого (АМг3) связующего, армированного стальной проволокой У8А. При температуре $\Theta \approx 200$ °C характеристики степенного закона установившейся ползучести $\xi = b_i\sigma^{m_i}$ для этих материалов имеют следующие значения:

$$\begin{aligned}
&\text{— для Cu [14]} \quad m_0 = 2{,}16, \quad b_0 = 5{,}63 \cdot 10^{-9}\ \text{МПа}^{-m_0}/\text{ч},\\
&\text{— для АМг3 [15]} \quad m_0 = 6{,}05, \quad b_0 = 1{,}025 \cdot 10^{-14}\ \text{МПа}^{-m_0}/\text{ч},\\
&\text{— для У8А [10]} \quad m_1 = 24{,}98, \quad b_1 = 1{,}054 \cdot 10^{-84}\ \text{МПа}^{-m_0}/\text{ч}
\end{aligned} \qquad (1)$$

(ξ — скорость деформаций ползучести; σ — напряжение).

На рис. 1,*а* при значениях параметров ползучести (1) представлены обратные указанному выше степенному закону зависимости [13]

$$\sigma(\xi) = \beta_i\xi^{\mu_i} \qquad (\mu_i = 1/m_i, \quad \beta_i = b^{-\mu_i}, \quad i = 0, 1). \qquad (2)$$

Согласно (2) секущий модуль i-го фазового материала определяется следующим образом [13]:

$$G_s^{(i)}(\xi) = \sigma(\xi)/\xi = \beta_i\xi^{\mu_i - 1} \qquad (i = 0, 1). \qquad (3)$$

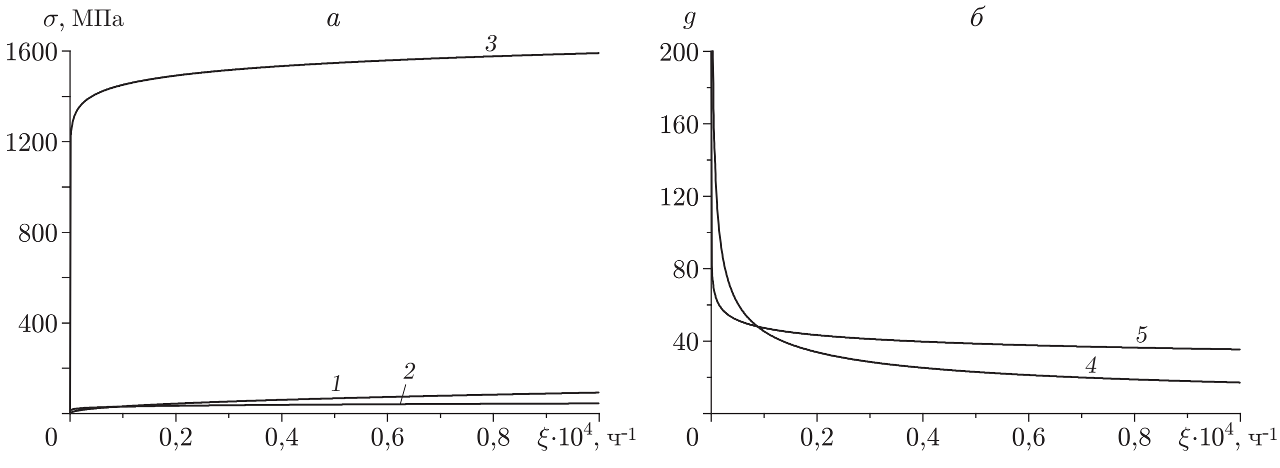

Рис. 1. Зависимости напряжения (*а*) и отношения секущих модулей (*б*) некоторых фазовых материалов от скорости установившейся ползучести:
1 — Cu, *2* — сплав АМг3, *3* — сталь У8А, *4* — Cu–У8А, *5* — АМг3–У8А

На рис. 1,*б* приведены зависимости

$$g(\xi) = G_s^{(1)}(\xi)/G_s^{(0)}(\xi), \tag{4}$$

где $G_s^{(0)}$, $G_s^{(1)}$ — секущие модули материалов связующего и арматуры соответственно. Кривая *4* на рис. 1,*б* характеризует (Cu–У8А)-композицию, линия *5* — (АМг3–У8А)-композицию (см. (1)–(4)).

Поведение кривой *5* на рис. 1,*б* показывает, что на всем рассматриваемом интервале изменения скорости деформаций ползучести $|\xi| \leqslant 10^{-4}$ ч$^{-1}$ для (АМг3–У8А)-композиции значения функции $g(\xi) > 30$. Поведение кривой *4* свидетельствует о том, что при скорости деформаций ползучести $|\xi| \leqslant 10^{-5}$ ч$^{-1}$ отношение секущих модулей (3) этих материалов превышает значение 40, а при $|\xi| \leqslant 10^{-6}$ ч$^{-1}$ отношение (4) становится больше 100.

Для ряда технически важных несущих элементов металлоконструкций, работающих в условиях длительного термосилового нагружения, техническими нормами установлены предельно допустимые скорости деформаций ползучести порядка $10^{-7} \div 10^{-5}$ ч$^{-1}$ [16]. Как следует из рис. 1,*б*, при изготовлении этих элементов из указанных выше металлокомпозиций возникает необходимость учета их ослабленного сопротивления поперечному сдвигу, так как в диапазоне допустимых скоростей деформаций ползучести отношение секущих модулей для этих фазовых материалов достигает значений, равных нескольким десяткам и даже сотням.

Приведенные примеры показывают, что при расчете тонкостенных элементов армированных металлокомпозитных конструкций, работающих в условиях установившейся ползучести, в некоторых случаях необходимо учитывать их ослабленное сопротивление поперечному сдвигу, несмотря на то что при исследовании упругого кратковременного деформирования таких конструкций поперечный сдвиг можно не учитывать.

Рассмотрим в прямоугольной декартовой системе координат (x_1, x_2, x_3) тонкостенный элемент толщиной $2h$, состоящий из многократно (4–10 раз [17]) и регулярно чередующихся элементарных армированных слоев, параллельных отсчетной плоскости (x_1, x_2), которую совместим со срединной плоскостью элемента, ось x_3 направим по нормали к этой срединной плоскости (рис. 2). Согласно [17] в этом случае армирование в направлении оси x_3 можно считать квазиоднородным, т. е. можно не выделять отдельно каждый элементарный армированный слой. Армирование каждого элементарного слоя в плоскости (x_1, x_2) может быть и неоднородным. Будем полагать, что этот армированный металло-

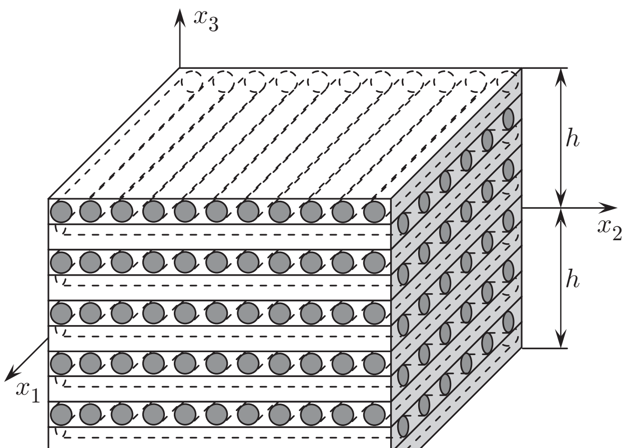

Рис. 2. Схема армирования металлокомпозитной пластины

композитный элемент работает в условиях установившейся ползучести, которая описывается с помощью модели 3, предложенной в [1], причем на n-й итерации компоненты a_{ij}^n $(i,j=\overline{1,5})$ матрицы A^n размером 5×5 (см. (52) в [1]) известны.

Расчеты, выполненные для различных структур армирования (при разном количестве семейств арматуры, различных плотностях и направлениях армирования), показали, что указанная матрица A^n имеет блочно-диагональный вид, причем отличными от нуля являются следующие ее компоненты, зависящие от всех пространственных переменных x_1, x_2, x_3:

$$a_{11}^n,\quad a_{22}^n,\quad a_{33}^n,\quad a_{12}^n=a_{21}^n,\quad a_{13}^n=a_{31}^n,\quad a_{23}^n=a_{32}^n; \tag{5}$$

$$a_{44}^n,\quad a_{55}^n. \tag{6}$$

Это обусловлено тем, что армирование осуществляется в плоскостях, параллельных плоскости (x_1,x_2), и все фазовые материалы полагаются изотропными. Согласно соотношениям (50) из работы [1] компоненты (5) матрицы A^n характеризуют эффективные вязкости металлокомпозиции (работающей в условиях установившейся ползучести) в плоскости (x_1,x_2), а компоненты (6) — сдвиговые вязкости в поперечном направлении оси x_3.

Для удобства первый блок матрицы A^n с компонентами (5) обозначим как матрицу

$$B^n\equiv(a_{ij}^n),\qquad i,j=1,2,3 \tag{7}$$

размером 3×3, компоненты которой по-прежнему считаются известными из решения на предыдущей n-й итерации.

Как и в работе [2], для описания ослабленного сопротивления тонкостенного армированного элемента поперечному сдвигу используем второй вариант теории Тимошенко [3, 5], т. е. сдвиговые скорости деформаций ползучести в поперечном направлении зададим распределенными по квадратичному закону в направлении x_3 (см. соотношения (5) в [2]). В соответствии со вторым вариантом теории Тимошенко обжатием тонкостенного элемента можно пренебречь, так как скорость ползучести точек элемента в поперечном направлении v_3 (скорость прогиба) не зависит от координаты x_3. С учетом этих допущений и дифференциальных соотношений Коши [13] получаем кинематические соотношения, совпадающие с равенствами (6)–(9) из работы [2].

Зная выражения для компонент тензора скоростей деформаций ползучести ξ_{ij} (см. (5), (8), (9) в [2]), согласно равенству (52) из [1] можно определить компоненты напряжений σ_{ij} в каждой точке тонкостенного элемента (в силу допущений [1] $\sigma_{33}\equiv 0$):

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\sigma}=\sum_{i=1}^{2}\boldsymbol{B}_i^n\Big\{\frac{\partial v_i^0}{\partial x_i}-x_3\,\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_i^2}+2\Big[\frac{x_3}{h^2}\Big(h^2-\frac{x_3^2}{3}\Big)\frac{\partial\xi_{i3}^0}{\partial x_i}+\frac{x_3}{2h}\Big(\frac{x_3}{2}+h\Big)\frac{\partial\xi_{i3}^{(+)}}{\partial x_i}-\frac{x_3}{2h}\Big(\frac{x_3}{2}-h\Big)\frac{\partial\xi_{i3}^{(-)}}{\partial x_i}\Big]\Big\}+\\ +2\boldsymbol{B}_3^n\Big[\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial v_1^0}{\partial x_2}+\frac{\partial v_2^0}{\partial x_1}\Big)-x_3\,\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1\,\partial x_2}+\frac{x_3}{h^2}\Big(h^2-\frac{x_3^2}{3}\Big)\Big(\frac{\partial\xi_{13}^0}{\partial x_2}+\frac{\partial\xi_{23}^0}{\partial x_1}\Big)+\\ +\frac{x_3}{2h}\Big(\frac{x_3}{2}+h\Big)\Big(\frac{\partial\xi_{13}^{(+)}}{\partial x_2}+\frac{\partial\xi_{23}^{(+)}}{\partial x_1}\Big)-\frac{x_3}{2h}\Big(\frac{x_3}{2}-h\Big)\Big(\frac{\partial\xi_{13}^{(-)}}{\partial x_2}+\frac{\partial\xi_{23}^{(-)}}{\partial x_1}\Big)\Big],\\ \sigma_{i3}=2b_i^n\Big(\frac{h^2-x_3^2}{h^2}\,\xi_{i3}^0+\frac{x_3+h}{2h}\,\xi_{i3}^{(+)}-\frac{x_3-h}{2h}\,\xi_{i3}^{(-)}\Big),\qquad i=1,2,\quad |x_3|\leqslant h,\quad (x_1,x_2)\in G,\end{gathered} \tag{8}$$

где согласно (5)–(7)

$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\equiv\{\sigma_{11},\sigma_{22},\sigma_{12}\},\quad (\boldsymbol{B}_i^n)^{\mathrm{T}}=\{a_{1i}^n,a_{2i}^n,a_{3i}^n\}\quad (i=1,2,3),\quad b_1^n\equiv a_{55}^n,\quad b_2^n\equiv a_{44}^n, \tag{9}$$

$\xi_{i3}^{(+)}$, $\xi_{i3}^{(-)}$ — скорости деформаций ползучести поперечных сдвигов на верхней $(x_3=h)$ и нижней $(x_3=-h)$ лицевых поверхностях элемента соответственно; при $\xi_{i3}^{(\pm)}\equiv 0$ функции ξ_{i3}^0 определяют скорости деформаций ползучести поперечных сдвигов в срединной плоскости $x_3 = 0$; v_i^0 — скорость ползучести точек срединной плоскости в направлении x_i $(i = 1, 2)$; G — область, занимаемая пластиной в плане; т — транспонирование; n — номер предыдущей итерации (для удобства верхний индекс $n + 1$, означающий номер текущей $(n + 1)$-й итерации, пока будем опускать). Согласно (9) $\boldsymbol{B}_i^n$ — трехкомпонентный вектор-столбец, элементы которого равны компонентам i-го столбца (3×3)-матрицы B^n (см. (7)).

С учетом выражений (8) и того, что функции v_i^0, v_3, ξ_{i3}^0, $\xi_{i3}^{(\pm)}$ $(i = 1, 2)$ зависят только от двух переменных x_1, x_2, можно определить все внутренние силовые факторы в тонкостенном элементе:

$$\boldsymbol{F} = \int\limits_{-h}^{h} \boldsymbol{\sigma}\,dx_3 = \sum_{i=1}^{2} \Big(\bar{\boldsymbol{B}}_i^n \frac{\partial v_i^0}{\partial x_i} - \boldsymbol{A}_i^n \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_i^2} + 2\boldsymbol{C}_i^n \frac{\partial \xi_{i3}^0}{\partial x_i} + 2(\boldsymbol{C}_i^{(+)})^n \frac{\partial \xi_{i3}^{(+)}}{\partial x_i} - 2(\boldsymbol{C}_i^{(-)})^n \frac{\partial \xi_{i3}^{(-)}}{\partial x_i}\Big) +$$
$$+ \bar{\boldsymbol{B}}_3^n \Big(\frac{\partial v_1^0}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2^0}{\partial x_1}\Big) - 2\boldsymbol{A}_3^n \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1\,\partial x_2} + 2\boldsymbol{C}_3^n \Big(\frac{\partial \xi_{13}^0}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_{23}^0}{\partial x_1}\Big) +$$
$$+ 2(\boldsymbol{C}_3^{(+)})^n \Big(\frac{\partial \xi_{13}^{(+)}}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_{23}^{(+)}}{\partial x_1}\Big) - 2(\boldsymbol{C}_3^{(-)})^n \Big(\frac{\partial \xi_{13}^{(-)}}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_{23}^{(-)}}{\partial x_1}\Big),$$

$$F_{i3} = \int\limits_{-h}^{h} \sigma_{i3}\,dx_3 = 2\big(d_i^n \xi_{i3}^0 + (d_i^{(+)})^n \xi_{i3}^{(+)} - (d_i^{(-)})^n \xi_{i3}^{(-)}\big), \qquad i = 1, 2, \tag{10}$$

$$\boldsymbol{M} = \int\limits_{-h}^{h} \boldsymbol{\sigma} x_3\,dx_3 = \sum_{i=1}^{2} \Big(\boldsymbol{A}_i^n \frac{\partial v_i^0}{\partial x_i} - \boldsymbol{E}_i^n \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_i^2} + 2\boldsymbol{H}_i^n \frac{\partial \xi_{i3}^0}{\partial x_i} + 2(\boldsymbol{H}_i^{(+)})^n \frac{\partial \xi_{i3}^{(+)}}{\partial x_i} - 2(\boldsymbol{H}_i^{(-)})^n \frac{\partial \xi_{i3}^{(-)}}{\partial x_i}\Big) +$$
$$+ \boldsymbol{A}_3^n \Big(\frac{\partial v_1^0}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2^0}{\partial x_1}\Big) - 2\boldsymbol{E}_3^n \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1\,\partial x_2} + 2\boldsymbol{H}_3^n \Big(\frac{\partial \xi_{13}^0}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_{23}^0}{\partial x_1}\Big) +$$
$$+ 2(\boldsymbol{H}_3^{(+)})^n \Big(\frac{\partial \xi_{13}^{(+)}}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_{23}^{(+)}}{\partial x_1}\Big) - 2(\boldsymbol{H}_3^{(-)})^n \Big(\frac{\partial \xi_{13}^{(-)}}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_{23}^{(-)}}{\partial x_1}\Big), \qquad (x_1, x_2) \in G,$$

где согласно (9) $\boldsymbol{F}^{\text{т}} \equiv \{F_{11}, F_{22}, F_{12}\}$; $\boldsymbol{M}^{\text{т}} \equiv \{M_{11}, M_{22}, M_{12}\}$; $\boldsymbol{A}_i^n$, $\bar{\boldsymbol{B}}_i^n$, $\boldsymbol{C}_i^n$, $(\boldsymbol{C}_i^{(\pm)})^n$, $\boldsymbol{E}_i^n$, $\boldsymbol{H}_i^n$, $(\boldsymbol{H}_i^{(\pm)})^n$ — трехкомпонентные векторы-столбцы, элементы которых совпадают с компонентами i-х столбцов (3×3)-матриц $\bar{A}^n = (\bar{a}_{ji}^n)$, $\bar{B}^n = (\bar{b}_{ji}^n)$, $\bar{C}^n = (\bar{c}_{ji}^n)$, $(\bar{C}^{(\pm)})^n = ((\bar{c}_{ji}^{(\pm)})^n)$, $\bar{E}^n = (\bar{e}_{ji}^n)$, $\bar{H}^n = (\bar{h}_{ji}^n)$, $(\bar{H}^{(\pm)})^n = ((\bar{h}_{ji}^{(\pm)})^n)$ $(i, j = \overline{1, 3})$, согласно соотношениям (8)–(10) определяемых следующим образом:

$$\bar{A}^n \equiv \int\limits_{-h}^{h} B^n x_3\,dx_3, \quad \bar{B}^n \equiv \int\limits_{-h}^{h} B^n\,dx_3, \quad \bar{C}^n \equiv \int\limits_{-h}^{h} B^n \frac{x_3}{h^2}\Big(h^2 - \frac{x_3^2}{3}\Big)\,dx_3,$$

$$(\bar{C}^{(\pm)})^n \equiv \int\limits_{-h}^{h} B^n \frac{x_3}{2h}\Big(\frac{x_3}{2} \pm h\Big)\,dx_3, \quad \bar{E}^n \equiv \int\limits_{-h}^{h} B^n x_3^2\,dx_3, \quad \bar{H}^n \equiv \int\limits_{-h}^{h} B^n \frac{x_3^2}{h^2}\Big(h^2 - \frac{x_3^2}{3}\Big)\,dx_3,$$

$$(\bar{H}^{(\pm)})^n \equiv \int\limits_{-h}^{h} B^n \frac{x_3^2}{2h}\Big(\frac{x_3}{2} \pm h\Big)\,dx_3, \quad d_i^n \equiv \int\limits_{-h}^{h} b_i^n \frac{h^2 - x_3^2}{h^2}\,dx_3, \quad (d_i^{(\pm)})^n \equiv \int\limits_{-h}^{h} b_i^n \frac{x_3 \pm h}{2h}\,dx_3, \tag{11}$$
$$i = 1, 2.$$

Внутренние силовые факторы $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{M}$, F_{i3} должны удовлетворять известным уравнениям равновесия (см. (15) в [2]), к которым необходимо добавить четыре статических граничных условия на лицевых поверхностях пластины (см. последнее равенство (8) с учетом (9) и соотношения (5) из [2]):

$$\sigma_{i3}^{(\pm)}(x_1,x_2)=2b_i^n(x_1,x_2,\pm h)\xi_{i3}^{(\pm)}(x_1,x_2),\qquad i=1,2, \tag{12}$$

где $\sigma_{i3}^{(\pm)}=\sigma_{i3}(x_1,x_2,\pm h)$ — заданные напряжения на верхней (знак “+”) и нижней (знак “−”) лицевых поверхностях пластины.

Поскольку напряжения $\sigma_{i3}^{(\pm)}$ на лицевых поверхностях заданы, эффективные вязкости $b_i^n(x_1,x_2,x_3)$ полагаются известными из решения на предыдущей итерации, из соотношения (12) следует (далее вновь будем использовать верхний индекс $n+1$, означающий номер текущей итерации)

$$(\xi_{i3}^{(\pm)})^{n+1}(x_1,x_2)=0{,}5\sigma_{i3}^{(\pm)}(x_1,x_2)/b_i^n(x_1,x_2,\pm h),\qquad i=1,2, \tag{13}$$

т. е. на текущей $(n+1)$-й итерации функции $(\xi_{i3}^{(\pm)})^{n+1}(x_1,x_2)$ можно считать известными во всех предыдущих соотношениях.

На кромках пластины зададим известные статические и кинематические граничные условия (см. (17)–(21) в [2]).

Для получения системы разрешающих уравнений установившейся ползучести рассматриваемого металлокомпозитного тонкостенного элемента соотношения (10) подставим в уравнения равновесия (15) из работы [2]. После приведения подобных слагаемых получаем

$$\begin{gathered}
\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_j}F_k(v_1^0,v_2^0,v_3,\xi_{13}^0,\xi_{23}^0)^{n+1}=-X_i(x_1,x_2)-\sigma_{i3}^{(+)}+\sigma_{i3}^{(-)}-\\
-\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_j}P_k(\xi_{13}^{(-)},\xi_{23}^{(-)},\xi_{13}^{(+)},\xi_{23}^{(+)})^{n+1},\\
\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_j}M_k(v_1^0,v_2^0,v_3,\xi_{13}^0,\xi_{23}^0)^{n+1}-2d_i^n(\xi_{i3}^0)^{n+1}=-m_i(x_1,x_2)-h(\sigma_{i3}^{(+)}+\sigma_{i3}^{(-)})+\\
+2\big((d_i^{(+)})^n(\xi_{i3}^{(+)})^{n+1}-(d_i^{(-)})^n(\xi_{i3}^{(-)})^{n+1}\big)-\\
-\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_j}L_k(\xi_{13}^{(-)},\xi_{23}^{(-)},\xi_{13}^{(+)},\xi_{23}^{(+)})^{n+1}\quad(i=1,2),\\
\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_j}(d_j^n(\xi_{j3}^0)^{n+1})=-\frac{1}{2}X_3(x_1,x_2)-\frac{1}{2}(\sigma_{33}^{(+)}-\sigma_{33}^{(-)})-\\
-\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_j}\big((d_j^{(+)})^n(\xi_{j3}^{(+)})^{n+1}-(d_j^{(-)})^n(\xi_{j3}^{(-)})^{n+1}\big),\quad(x_1,x_2)\in G,
\end{gathered} \tag{14}$$

где операторы F_k, P_k, M_k, L_k имеют следующую структуру:

$$\begin{gathered}
F_k(v_1^0,v_2^0,v_3,\xi_{13}^0,\xi_{23}^0)\equiv\sum_{l=1}^{2}\Big(\bar b_{kl}^n\frac{\partial v_l^0}{\partial x_l}-\bar a_{kl}^n\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_l^2}+2\bar c_{kl}^n\frac{\partial\xi_{l3}^0}{\partial x_l}\Big)+\\
+\bar b_{k3}^n\Big(\frac{\partial v_1^0}{\partial x_2}+\frac{\partial v_2^0}{\partial x_1}\Big)-2\bar a_{k3}^n\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1\,\partial x_2}+2\bar c_{k3}^n\Big(\frac{\partial\xi_{13}^0}{\partial x_2}+\frac{\partial\xi_{23}^0}{\partial x_1}\Big),
\end{gathered}$$

$$P_k(\xi_{13}^{(-)},\xi_{23}^{(-)},\xi_{13}^{(+)},\xi_{23}^{(+)}) \equiv 2\Big[\sum_{l=1}^{2}\Big((\bar c_{kl}^{(+)})^n\,\frac{\partial \xi_{l3}^{(+)}}{\partial x_l} - (\bar c_{kl}^{(-)})^n\,\frac{\partial \xi_{l3}^{(-)}}{\partial x_l}\Big) + {} + (\bar c_{k3}^{(+)})^n\Big(\frac{\partial \xi_{13}^{(+)}}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_{23}^{(+)}}{\partial x_1}\Big) - (\bar c_{k3}^{(-)})^n\Big(\frac{\partial \xi_{13}^{(-)}}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_{23}^{(-)}}{\partial x_1}\Big)\Big],$$

$$M_k(v_1^0,v_2^0,v_3,\xi_{13}^0,\xi_{23}^0) \equiv \sum_{l=1}^{2}\Big(\bar a_{kl}^n\,\frac{\partial v_l^0}{\partial x_l} - \bar e_{kl}^n\,\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_l^2} + 2\bar h_{kl}^n\,\frac{\partial \xi_{l3}^0}{\partial x_l}\Big) + {} + \bar a_{k3}^n\Big(\frac{\partial v_1^0}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2^0}{\partial x_1}\Big) - 2\bar e_{k3}^n\,\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1\,\partial x_2} + 2\bar h_{k3}^n\Big(\frac{\partial \xi_{13}^0}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_{23}^0}{\partial x_1}\Big), \qquad (15)$$

$$L_k(\xi_{13}^{(-)},\xi_{23}^{(-)},\xi_{13}^{(+)},\xi_{23}^{(+)}) \equiv 2\Big[\sum_{l=1}^{2}\Big((\bar h_{kl}^{(+)})^n\,\frac{\partial \xi_{l3}^{(+)}}{\partial x_l} - (\bar h_{kl}^{(-)})^n\,\frac{\partial \xi_{l3}^{(-)}}{\partial x_l}\Big) + {} + (\bar h_{k3}^{(+)})^n\Big(\frac{\partial \xi_{13}^{(+)}}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_{23}^{(+)}}{\partial x_1}\Big) - (\bar h_{k3}^{(-)})^n\Big(\frac{\partial \xi_{13}^{(-)}}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_{23}^{(-)}}{\partial x_1}\Big)\Big];$$

$$k = \begin{cases} j, & j = i, \\ 3, & j \ne i, \end{cases} \qquad (16)$$

X_i — приведенные распределенные внешние нагрузки, действующие в направлении x_i $(i = \overline{1,3})$ и порожденные объемными силами; m_i $(i = 1, 2)$ — приведенные распределенные внешние моменты от объемных сил; $\sigma_{33}^{(\pm)}$ — заданные нормальные напряжения на лицевых поверхностях $x_3 = \pm h$; $\bar a_{kl}^n$, $\bar b_{kl}^n$, $\bar c_{kl}^n$, $\ldots$ — компоненты матриц (11).

Подставляя соотношения (10) в равенства (17) из [2], получаем статические граничные условия в следующей форме:

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} n_i n_j F_k(v_1^0,v_2^0,v_3,\xi_{13}^0,\xi_{23}^0)^{n+1} = F_{nn} - \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} n_i n_j P_k(\xi_{13}^{(-)},\xi_{23}^{(-)},\xi_{13}^{(+)},\xi_{23}^{(+)})^{n+1},$$

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}(-1)^i n_{3-i} n_j F_k(v_1^0,v_2^0,v_3,\xi_{13}^0,\xi_{23}^0)^{n+1} = {} = F_{n\tau} - \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}(-1)^i n_{3-i} n_j P_k(\xi_{13}^{(-)},\xi_{23}^{(-)},\xi_{13}^{(+)},\xi_{23}^{(+)})^{n+1},$$

$$\sum_{i=1}^{2} n_i d_i^n (\xi_{i3}^0)^{n+1} = \frac{1}{2}\,F_{n3} - \sum_{i=1}^{2} n_i\big((d_i^{(+)})^n(\xi_{i3}^{(+)})^{n+1} - (d_i^{(-)})^n(\xi_{i3}^{(-)})^{n+1}\big), \qquad (17)$$

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} n_i n_j M_k(v_1^0,v_2^0,v_3,\xi_{13}^0,\xi_{23}^0)^{n+1} = M_{nn} - \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} n_i n_j L_k(\xi_{13}^{(-)},\xi_{23}^{(-)},\xi_{13}^{(+)},\xi_{23}^{(+)})^{n+1},$$

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}(-1)^i n_{3-i} n_j M_k(v_1^0,v_2^0,v_3,\xi_{13}^0,\xi_{23}^0)^{n+1} = {} = M_{n\tau} - \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}(-1)^i n_{3-i} n_j L_k(\xi_{13}^{(-)},\xi_{23}^{(-)},\xi_{13}^{(+)},\xi_{23}^{(+)})^{n+1}, \quad (x_1,x_2) \in \Gamma,$$

где $n_1 = \cos\alpha$, $n_2 = \sin\alpha$; Γ — контур, ограничивающий область G, занимаемую пластиной в плане; α — угол, задающий направление внешней нормали к контуру Γ; F_{nn}, $F_{n\tau}$ — заданные на контуре Γ нормальная и касательная мембранные силы; F_{n3} — заданная на контуре Γ поперечная сила; M_{nn}, $M_{n\tau}$ — заданные на контуре Γ изгибающий и крутящий моменты; индекс k определяется по формуле (16). Согласно (13), (15) в правые части равенств (14), (17) перенесены все известные на $(n+1)$-й итерации слагаемые.

Поскольку система уравнений (14) при подстановке в нее выражений (15) является системой дифференциальных уравнений в частных производных десятого порядка [3, 5, 8, 9], для ее однозначного интегрирования в каждой точке контура Γ должны быть заданы пять статических (17) или пять кинематических (см. (18), (20) в [2]) граничных условий. Возможно также задание пяти смешанных (из указанных) граничных условий.

2. Задача изгиба кольцевой пластины. В качестве примера рассмотрим задачу изгиба кольцевой пластины, имеющей постоянную толщину $2h$ и радиусы r_0, r_1 $(r_0 < r_1)$. Положения точек пластины задаются в цилиндрической системе координат (x_1, x_2, x_3), где x_1 — полярный радиус; x_2 — полярный угол; x_3 — осевая координата. Нагружение и закрепление пластины не зависят от окружного направления x_2, внешние силы в этом направлении также отсутствуют.

Как и ранее, металлокомпозитная пластина состоит из многократно и регулярно чередующихся элементарных слоев двух типов (см. рис. 2). Каждый слой усилен осесимметрично расположенным семейством проволок (доля арматуры во всех слоях одинакова: $\omega_1(x_1) = \omega_2(x_1)$ [1]) по радиально-симметричным направлениям: $\psi_1(x_1) = -\psi_2(x_1)$ $(r_0 \leqslant x_1 \leqslant r_1)$, где ψ_k — угол армирования проволокой элементарного слоя k-го типа $(k = 1, 2)$, отсчитываемый от полярного радиуса x_1. На рис. 3 представлена схема рассматриваемой кольцевой металлокомпозитной пластины, причем траектории армирования с противоположными углами кривизны соответствуют элементарным слоям различного типа. (На рис. 3 показано только по 10 траекторий армирования элементарных слоев каждого типа.) Согласно [1] при такой структуре армирования в соотношениях (5) тождественно равны нулю следующие компоненты матрицы A^n (а также матрицы (7)):

$$a^n_{13} = a^n_{31} = a^n_{23} = a^n_{32} = 0. \tag{18}$$

В силу (5), (6) с учетом (18) и особенностей нагружения и закрепления рассматриваемой пластины решение задачи о ее деформировании в условиях установившейся ползучести не зависит от окружной координаты x_2, т. е. реализуется случай осесимметричного изгиба, при этом

$$v_2(x_1, x_3) \equiv 0, \qquad \xi_{12}(x_1, x_3) \equiv \xi_{23}(x_1, x_3) \equiv 0, \qquad \sigma_{12}(x_1, x_3) \equiv \sigma_{23}(x_1, x_3) \equiv 0.$$

Будем полагать, что на лицевых поверхностях $x_3 = \pm h$ касательные напряжения отсутствуют $(\sigma^{(\pm)}_{i3} \equiv 0)$, тогда из соотношений (13) следует, что $\xi^{(\pm)}_{i3} \equiv 0$ $(i = 1, 2)$. В этом случае на текущей $(n+1)$-й итерации двухточечная граничная задача описывается с помощью разрешающей системы уравнений (42) из [2] и соответствующих ей граничных условий (44), (45). При этом в равенстве (39) из работы [2] необходимо принять

$$\bar{d}^n_{44}(x_1) \equiv \bar{d}^n_1(x_1),$$

где функция $\bar{d}^n_1(x_1)$ определена в (11) с учетом (9), (6) и известна из решения на предыдущей n-й итерации.

Так как система (42) из [2] содержит производные лишь первого порядка от неизвестных функций, то двухточечную граничную задачу для данной системы можно проинтегрировать численно методом пристрелки [18, 19] с использованием абсолютно устойчивых неявных схем Рунге — Кутты [20].

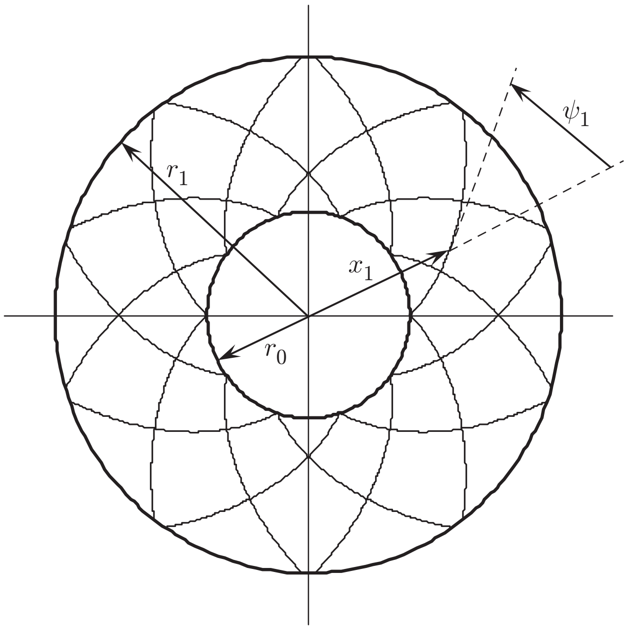

Рис. 3. Спиральная структура армирования кольцевой пластины

Заключение. На основе поставленных краевых задач можно исследовать особенности изгибного деформирования армированных металлокомпозитных пластин, работающих в условиях установившейся ползучести, с учетом их ослабленного сопротивления поперечным сдвигам, при этом на лицевых поверхностях пластин строго выполняются граничные условия по касательным напряжениям.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Янковский А. П.** Моделирование механического поведения перекрестно армированных металлокомпозитов в условиях установившейся ползучести // Механика композиц. материалов и конструкций. 2011. Т. 17, № 3. С. 362–384.
2. **Янковский А. П.** Исследование установившейся анизотропной ползучести слоистых металлокомпозитных пластин с учетом ослабленного сопротивления поперечному сдвигу. 2. Модель деформирования // Механика композит. материалов. 2012. Т. 48, № 2. С. 279–302.
3. **Малмейстер А. К.** Сопротивление полимерных и композитных материалов / А. К. Малмейстер, В. П. Тамуж, Г. А. Тетерс. Рига: Зинатне, 1980.
4. **Немировский Ю. В.** Прочность элементов конструкций из композитных материалов / Ю. В. Немировский, Б. С. Резников. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1986.
5. **Амбарцумян С. А.** Теория анизотропных пластин. Прочность, устойчивость и колебания. М.: Наука, 1987.
6. **Васильев В. В.** Механика конструкций из композитных материалов. М.: Машиностроение, 1988.
7. **Немировский Ю. В., Янковский А. П.** О границах применимости некоторых теорий расчета изгибаемых армированных пластин // Науч. вестн. Новосиб. гос. техн. ун-та. 2004. № 3. С. 91–113.
8. **Пикуль В. В.** Механика оболочек. Владивосток: Дальнаука, 2009.
9. **Карпов В. В.** Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения: В 2 ч. Ч. 1. Модели и алгоритмы исследования прочности и устойчивости подкрепленных оболочек вращения. М.: Физматлит, 2010.

10. **Композиционные** материалы: Справ. / Под ред. Д. М. Карпиноса. Киев: Наук. думка, 1985.
11. **Немировский Ю. В., Янковский А. П.** Расчет продольно-поперечного изгиба сложно армированных металлокомпозитных пластин в условиях установившейся ползучести // Конструкции из композиц. материалов. 2009. № 3. С. 5–22.
12. **Янковский А. П.** Установившаяся ползучесть сложно армированных пологих металлокомпозитных оболочек // Механика композит. материалов. 2010. Т. 46, № 1. С. 121–138.
13. **Качанов Л. М.** Теория ползучести. М.: Физматгиз, 1960.
14. **Писаренко Г. С.** Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести: Справ. пособие / Г. С. Писаренко, Н. С. Можаровский. Киев: Наук. думка, 1981.
15. **Никитенко А. Ф.** Ползучесть и длительная прочность металлических материалов. Новосибирск: Новосиб. гос. архит.-строит. ун-т, 1997.
16. **Безухов Н. И.** Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур / Н. И. Безухов, В. Л. Бажанов, И. И. Гольденблат, Н. А. Николаенко, А. М. Синюков. М.: Машиностроение, 1965.
17. **Баничук Н. В.** Оптимизация элементов конструкций из композиционных материалов / Н. В. Баничук, В. В. Кобелев, Р. Б. Рикардс. М.: Машиностроение, 1988.
18. **Григоренко Я. М.** Изотропные и анизотропные оболочки вращения переменной жесткости. Киев: Наук. думка, 1973.
19. **Холл Дж.** Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Дж. Холл, Дж. Уатт. М.: Мир, 1979.
20. **Деккер К.** Устойчивость методов Рунге — Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений / К. Деккер, Я. Вервер. М.: Мир, 1988.

Поступила в редакцию 28/VI 2012 г.,
в окончательном варианте — 20/XI 2013 г.