

УДК 536.2

МОДИФИЦИРОВАННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТЕРМОУПРУГОЙ СРЕДЫ ГРИНА — ЛИНДСЕЯ, УЧИТЫВАЮЩАЯ НЕЛОКАЛЬНОСТЬ И НАЛИЧИЕ ДВУХ ТЕМПЕРАТУР

Р. Кумар, С. Каушал*, Г. Шарма*,**

Университет г. Курукшетра, Курукшетра, Индия

* Прекрасный профессиональный университет, Пхавара, Индия

** Колледж Доаба, Джаландхар, Индия

E-mails: rajneesh_kuk@rediff.com, sachin_kuk@yahoo.co.in, profgulshan78@gmail.com

Исследуется воздействие источника тепла и термомеханической нагрузки на обобщенное полупространство Грина — Линдсея. В модифицированной модели термоупругого полупространства учитываются параметр нелокальности и наличие двух температур. Уравнения задачи записаны в безразмерных переменных. Задача решается с использованием преобразований Лапласа и Фурье. Характеристики поля, такие как напряжения, компоненты вектора смещения, термодинамическая температура и кондуктивная температура, получены в образах преобразований Лапласа и Фурье. Для восстановления переменных в физической области используются методы численной инверсии. Проводится сравнение результатов, полученных с использованием различных теорий термоупругости.

Ключевые слова: модифицированная теория Грина — Линдсея, параметр нелокальности, источник тепла, две температуры.

DOI: 10.15372/PMTF20220309

Введение. В классической теории упругости не учитывается влияние удаленного поля на напряженно-деформированное состояние в рассматриваемой точке, в то время как в нелокальной теории упругости это влияние учитывается.

Введение параметра нелокальности в определяющие соотношения позволяет учесть на макроуровне явления, происходящие на микроуровне. Такие модифицированные модели применяются в теории дислокаций, механике разрушения, а также при исследовании рассеивания волн.

В теории термоупругости учитывается влияние температурного поля на напряженно-деформированное состояние. В работе [1] предложена обобщенная теория термоупругости (модель Лорда — Шульмана). В [2] разработана обобщенная теория термоупругости, содержащая два времени релаксации (модель Грина — Линдсея). В [3] в обобщенную теорию термоупругости введено понятие двух температур. С использованием обобщенной теории термоупругости при наличии двух температур решены задачи в работах [4–9].

В [10] с использованием расширенной термодинамики предложена модель Грина — Линдсея обобщенной термоупругости, учитывающая скорость деформации. В работе [11]

с помощью модели Грина — Линдсея и модифицированной модели Грина — Линдсея исследованы амплитудные соотношения для отраженных волн. В [12] изучены пространственные решения, полученные с использованием модифицированной модели Грина — Линдсея, и доказано их убывание по экспоненциальному закону.

В работе [13] предложена нелокальная теория упругости и решены задачи о движении винтовой дислокации и о распространении поверхностных волн. В [14] разработана нелокальная теория упругости на основе законов сохранения и второго закона термодинамики. Динамическая модель нелокальных биотермоупругих сред при наличии диффузии и с учетом двух нелокальных времен запаздывания исследована в [15]. С использованием фундаментального решения изучено влияние нелокальности и фазового сдвига на различные характеристики волн.

В данной работе с использованием модифицированной модели Грина — Линдсея решается задача о деформировании упругого полупространства под действием теплового источника и термомеханической нагрузки. Исследуется влияние нелокальности, наличия в модели двух температур на характеристики напряженно-деформированного состояния.

1. Уравнения задачи. Уравнения поля и определяющие соотношения модифицированной модели Грина — Линдсея с учетом нелокальности при наличии двух температур, тепловых источников и в отсутствие массовых сил имеют вид [5, 10, 13]

$$\left(1 + \eta_1 \tau_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) [(\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u}] - \beta_1 \left(1 + \eta_2 \tau_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \nabla T = \rho(1 - \xi_1^2 \nabla^2) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}; \quad (1)$$

$$K^* \nabla^2 \varphi = \left(1 + \eta_3 \tau_0 \frac{\partial}{\partial t}\right) (\beta_1 T_0 \dot{u}_{k,k} - Q) + \left(1 + \eta_4 \tau_0 \frac{\partial}{\partial t}\right) \rho C_e \dot{T}; \quad (2)$$

$$t_{ij} = \left(1 + \eta_1 \tau_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) [\lambda u_{k,k} \delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i})] - \beta_1 \left(1 + \eta_2 \tau_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) T \delta_{ij}; \quad (3)$$

$$T = (1 - a \nabla^2) \varphi, \quad (4)$$

где λ, μ — константы Ламе; ξ_1 — параметр нелокальности; t — время; $\beta = (3\lambda + 2\mu)\alpha_t$; α_t — коэффициент линейного расширения; ρ, C_e — плотность и удельная теплоемкость; K^* — теплопроводность; T — термодинамическая температура; φ — кондуктивная температура; t_{ij} — компоненты тензора напряжений; τ_0, τ_1 — времена релаксации; δ_{ij} — символ Кронекера; Q — мощность теплового источника; $\mathbf{u}$ — вектор перемещения; $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ — константы; a — двухтемпературный параметр; T_0 — отсчетная температура; ∇^2 — оператор Лапласа.

Из (1)–(4) при $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta_4 = 1$ следуют уравнения модифицированной модели Грина — Линдсея, при $\eta_1 = \eta_3 = 0, \eta_2 = \eta_4 = 1$ — уравнения модели Грина — Линдсея, при $\eta_1 = \eta_2 = 0, \eta_3 = \eta_4 = 1$ — уравнения модели Лорда — Шульмана, при $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta_4 = 0$ — уравнения модели связанной термоупругости.

2. Постановка и решение задачи. В прямоугольной декартовой системе координат (x_1, x_2, x_3) , начало которой расположено в плоскости (x_1, x_2) , рассматривается однородное изотропное термоупругое полупространство $x_3 \geq 0$. В этом полупространстве действуют термомеханическая нагрузка и источник тепла. При постановке задачи используется обобщенная модель Грина — Линдсея.

В данной работе решается двумерная задача, поэтому вектор смещения представляется в виде

$$\mathbf{u} = (u_1, 0, u_3). \quad (5)$$

Введем следующие безразмерные величины:

$$\begin{aligned}(x'_i, u'_i) &= \frac{w_1}{c_1} (x_i, u_i), \quad t'_{3i} = \frac{t_{3i}}{\beta_1 T_0}, \quad (\varphi', T') = \frac{1}{T_0} (\varphi, T), \quad (t', \tau'_0) = w_1(t, \tau_0), \\ a' &= \frac{\omega_1^2}{c_1^2} a, \quad Q' = \frac{c_1^2}{K^* \omega_1 T_0} Q, \quad F'_1 = \frac{1}{\beta_1 T_0} F_1, \quad F'_2 = \frac{c_1}{\omega_1 T_0} F_2, \quad i = 1, 3.\end{aligned}\quad (6)$$

Здесь

$$c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad \omega_1^2 = \frac{\rho C_e c_1^2}{K^*}.$$

В переменных (6) уравнения (1), (2), (4) с учетом (5) записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}\left(1 + \eta_1 \tau_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(a_1 \frac{\partial e}{\partial x_1} + a_2 \nabla^2 u_1\right) - a_3 \left(1 + \eta_2 \tau_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial T}{\partial x_1} &= (1 - \xi_1^2 \nabla^2) \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \\ \left(1 + \eta_1 \tau_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(a_1 \frac{\partial e}{\partial x_3} + a_2 \nabla^2 u_3\right) - a_3 \left(1 + \eta_2 \tau_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial T}{\partial x_3} &= (1 - \xi_1^2 \nabla^2) \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \\ \nabla^2 \varphi &= \left(1 + \eta_3 \tau_0 \frac{\partial}{\partial t}\right) \left[a_4 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) - Q\right] + \left(1 + \eta_4 \tau_0 \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial T}{\partial t}, \\ T &= (1 - a \nabla^2) \varphi.\end{aligned}\quad (7)$$

В (7)

$$a_1 = \frac{\lambda + \mu}{\rho c_1^2}, \quad a_2 = \frac{\mu}{\rho c_1^2}, \quad a_3 = \frac{\beta_1 T_0}{\rho c_1^2}, \quad a_4 = \frac{\beta_1 c_1}{K^* \omega_1}, \quad e = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}.$$

Представим компоненты вектора смещений в виде

$$u_1 = \frac{\partial q}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi}{\partial x_3}, \quad u_3 = \frac{\partial q}{\partial x_3} + \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \quad (8)$$

и определим преобразования Лапласа и Фурье:

$$\hat{f}(x_1, x_3, s) = \int_0^\infty f(x_1, x_3, t) e^{-st} dt, \quad \tilde{f}(\xi, x_3, s) = \int_{-\infty}^\infty \hat{f}(x_1, x_3, s) e^{i\xi x_1} dx_1. \quad (9)$$

Применив преобразования (9) к уравнениям (7), с учетом (8) получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\left(\frac{d^4}{dx_3^4} + B_{01} \frac{d^2}{dx_3^2} + B_{02}\right)(\tilde{q}, \tilde{\varphi}) &= \left(B_{03} \frac{d^2}{dx_3^2} + B_{04}\right)\tilde{Q}, \\ \left(\frac{d^2}{dx_3^2} - B_{05}\right)\tilde{\psi} &= 0,\end{aligned}\quad (10)$$

где

$$B_{01} = \frac{B_2}{B_1}, \quad B_{02} = \frac{B_3}{B_1}, \quad B_{03} = \frac{B_4}{B_1}, \quad B_{04} = \frac{B_5}{B_1}, \quad B_{05} = \frac{B_6}{B_7},$$

$$B_1 = (1 + aR_6)(R_1 + \xi^2 s^2) + aR_3 R_5,$$

$$B_2 = R_3 R_4 R_5 + aR_3 R_5 \xi^2 - [(R_1 \xi^2 + R_2 s^2)(1 + aR_6) + (\xi^2 + R_7)(R_1 + \xi_1^2 s^2)],$$

$$B_3 = (\xi^2 + R_7)(R_1 \xi^2 + R_2 s^2) - R_3 R_4 R_5 \xi^2, \quad B_4 = aR_3 R_8 Q, \quad B_5 = -R_3 R_4 R_8,$$

$$\begin{aligned}
B_6 &= a_2 \xi^2 R_1 + R_2 s^2, & B_7 &= a_2 R_1 + \xi_1^2 s^2, & R_1 &= 1 + \eta_1 \tau_1 s, & R_2 &= 1 + \xi_1^2 \xi^2, \\
R_3 &= a_3 (1 + \eta_2 \tau_1 s), & R_4 &= 1 + a \xi^2, & R_5 &= a_4 s (1 + \eta_3 \tau_0 s), & R_6 &= s + \eta_4 \tau_0 s^2, \\
R_7 &= (s + \eta_4 \tau_0 s^2) (1 + a \xi^2), & R_8 &= 1 + \eta_3 \tau_0 s.
\end{aligned}$$

Ограниченное решение уравнений (10) ($\tilde{q}, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi} \rightarrow 0$ при $x_3 \rightarrow \infty$) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
\tilde{q} &= A_1 e^{-\lambda_1 x_3} + A_2 e^{-\lambda_2 x_3} - \frac{R_8 R_3 R_4}{B_3} Q, \\
\tilde{\varphi} &= d_1 A_1 e^{-\lambda_1 x_3} + d_2 A_2 e^{-\lambda_2 x_3} + d_3 Q, & \tilde{\psi} &= A_3 e^{-\lambda_3 x_3}, \\
d_i &= \frac{(R_1 + \xi_1^2 s^2) \lambda_i^2 - (R_1 \xi^2 + R_2 s^2)}{R_3 R_4 - a R_3 \lambda_i^2}, & d_3 &= \frac{(R_1 \xi^2 + R_2 s^2) R_8}{B_3}, & i &= 1, 2.
\end{aligned} \tag{11}$$

Физические величины зависят от наличия источника тепла, интенсивность излучения которого, в свою очередь, зависит от координаты x_1 и времени t :

$$Q = Q_1 \delta(x_1).$$

Здесь

$$Q_1 = Q_0 \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ t/t_0, & 0 < t \leq t_0, \\ 1, & t > t_0, \end{cases} \tag{12}$$

Q_0 — константа; t_0 — параметр интенсивности источника тепла; $\delta(\cdot)$ — дельта-функция Дирака.

3. Краевые условия. На поверхности $x_3 = 0$ задаются распределенная экспоненциально убывающая нормальная сила, сосредоточенный тепловой источник и нулевые касательные напряжения:

$$t_{33} = F_1(x_1, t), \quad t_{31} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = F_2(x_1, t), \quad x_3 = 0. \tag{13}$$

Здесь

$$F_1(x_1, t) = \frac{F_{10} t^2}{16 t_p^2} e^{-t/t_p} H(a_1 - |x_1|), \quad F_2(x_1, t) = F_{20} e^{-b x_1} H(x_1) x_3^2 \delta(t), \tag{14}$$

F_{10} — константа в выражении для силы; F_{20} — константа в выражении для температуры; a_1, b — константы; $H(\cdot)$ — функция Хевисайда.

Применив преобразования Лапласа и Фурье (9) к уравнениям (12)–(14), получаем

$$\tilde{t}_{33} = \tilde{F}_1(\xi, s), \quad \tilde{t}_{31} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x_3} = \tilde{F}_2(\xi, s), \tag{15}$$

где

$$\tilde{F}_1(\xi, s) = \frac{F_{10}}{8} \frac{t_p}{(1 + s t_p)^3} \frac{\sin a_1 \xi}{\xi}, \quad \tilde{F}_2(\xi, s) = \frac{x_3^2}{b - i \xi}, \quad \tilde{Q} = \frac{Q_0 (1 - e^{-t_0 s})}{t_0 s^2}.$$

Подставляя $\tilde{q}, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$ из уравнений (11) в краевые условия (15), с учетом (3)–(6), (8), (9) получаем выражения для компонент вектора смещений и компонент тензора напряжений, а также для термодинамической и кондуктивной температур:

$$\tilde{u}_1 = -\frac{1}{\Delta} \left(i \xi \sum_{k=1}^3 (F_1 \Delta_{k1} e^{-\lambda_k x_3} + F_2 \Delta_{k2} e^{-\lambda_k x_3} + \Delta_{k3} e^{-\lambda_k x_3}) - \frac{R_8 R_3 R_4}{B_3} Q \right),$$

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_3 &= -\frac{1}{\Delta} \left(\sum_{k=1}^2 (F_1 \lambda_k \Delta_{k1} e^{-\lambda_k x_3} + F_2 \Delta_{k2} e^{-\lambda_k x_3} + \lambda_k \Delta_{k3} e^{-\lambda_k x_3}) + \right. \\
&\quad \left. + i\xi (F_1 \Delta_{31} e^{-\lambda_3 x_3} + F_2 \Delta_{32} e^{-\lambda_3 x_3} + \Delta_{33} e^{-\lambda_3 x_3}) \right), \\
\tilde{t}_{33} &= \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^3 (F_1 H_k \Delta_{k1} e^{-\lambda_k x_3} + F_2 H_k \Delta_{k2} e^{-\lambda_k x_3} + H_k \Delta_{k3} e^{-\lambda_k x_3} + b_5 \Delta), \\
\tilde{t}_{31} &= \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^3 (F_1 H_{k+4} \Delta_{k1} e^{-\lambda_k x_3} + F_2 H_{k+4} \Delta_{k2} e^{-\lambda_k x_3} + H_{k+4} \Delta_{k3} e^{-\lambda_k x_3}), \quad (16) \\
\tilde{T} &= \frac{1}{\Delta} \left(\sum_{k=1}^2 \{ F_1 [(1 + a\xi^2) - a\lambda_k^2] d_k \Delta_{k1} e^{-\lambda_k x_3} + F_2 [(1 + a\xi^2) - a\lambda_k^2] d_k \Delta_{k2} e^{-\lambda_k x_3} + \right. \\
&\quad \left. + d_k \Delta_{k3} e^{-\lambda_k x_3} \} + d_3 (1 + a\xi^2) \Delta \right), \\
\tilde{\varphi} &= \frac{1}{\Delta} \left(\sum_{k=1}^2 (F_1 d_k \Delta_{k1} e^{-\lambda_k x_3} + F_2 d_k \Delta_{k2} e^{-\lambda_k x_3} + d_k \Delta_{k3} e^{-\lambda_k x_3}) + d_3 \Delta \right).
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\Delta &= H_8(H_2 H_7 - H_3 H_6) + H_9(H_3 H_5 - H_1 H_7), \quad \Delta_{11} = -H_9 H_7, \quad \Delta_{12} = b_4(H_2 H_7 - H_3 H_6), \\
\Delta_{13} &= H_9 H_7 b_5, \quad \Delta_{21} = H_7 H_8, \quad \Delta_{22} = (H_3 H_5 - H_1 H_7) b_4, \quad \Delta_{23} = -b_5 H_7 H_8, \\
\Delta_{31} &= H_5 H_9 - H_6 H_8, \quad \Delta_{32} = (H_1 H_6 - H_2 H_5) b_4, \quad \Delta_{33} = (H_6 H_8 - H_5 H_9) b_5, \\
H_i &= R_1(-b_1 \xi_1^2 + b_2 \lambda_i^2) - (1 + \eta_2 \tau_1 s)[(1 + a\xi^2) + a\lambda_i^2] d_i, \quad H_3 = i\xi \lambda_3 R_1(b_2 - b_1), \\
H_4 &= \frac{-b_1 \xi^2 R_8 R_3 R_4 R_1}{B_3}, \quad H_5 = 2ib_3 \xi \lambda_1 R_1, \quad H_6 = 2ib_3 \xi \lambda_2 R_1, \quad H_7 = b_3 R_1(\xi^2 + \lambda_3^2), \\
H_8 &= \lambda_1 d_1, \quad H_9 = \lambda_2 d_2, \quad b_1 = \frac{\lambda}{\beta_1 T_0}, \quad b_2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\beta_1 T_0}, \quad b_3 = \frac{\mu}{\beta_1 T_0}, \quad b_4 = \frac{\beta_1 c_1}{w_1}, \\
b_5 &= H_4 \frac{1 - e^{-t_0 s}}{t_0 s^2} Q_0 + (1 + \eta_2 \tau_1 s)(1 + a\xi^2) d_3, \quad i = 1, 2.
\end{aligned}$$

4. Частные случаи обобщенной модели. Рассмотрим следующие частные случаи обобщенной модели.

1. Модифицированная модель Грина — Линдсея, содержащая две температуры. При равном нулю параметре нелокальности ($\xi_1 = 0$) в уравнениях (16) получаем соответствующие выражения для модели Грина — Линдсея с двумя температурами при наличии источника тепла.

2. Нелокальная модифицированная модель Грина — Линдсея. Полагая равным нулю двухтемпературный параметр ($a = 0$), из уравнений (16) получаем уравнения нелокальной модифицированной модели Грина — Линдсея при наличии источника тепла.

3. Нелокальная обобщенная модель термоупругости Грина — Линдсея, содержащая две температуры. Полагая $\eta_1 = \eta_3 = 0$, $\eta_2 = \eta_4 = 1$, из уравнений (16) получаем уравнения нелокальной модели Грина — Линдсея с двумя температурами при наличии источника тепла.

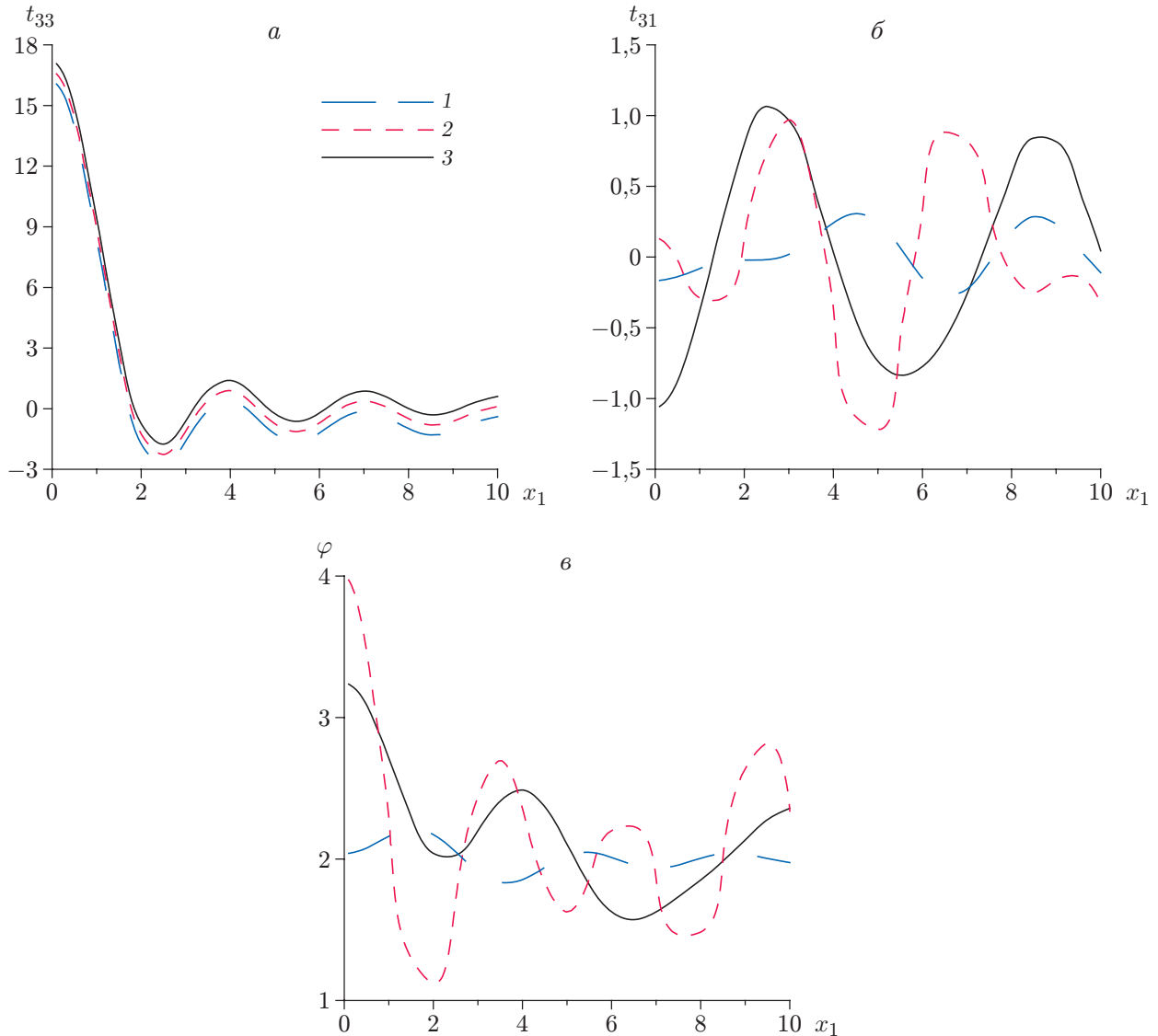


Рис. 1. Зависимости нормального напряжения t_{33} (а), напряжения t_{31} (б) и кондуктивной температуры φ (в) от координаты x_1 , полученные с использованием нелокальной модели Грина — Линдсея при различных значениях ξ_1 :

1 — $\xi_1 = 0$, 2 — $\xi_1 = 0,50$, 3 — $\xi_1 = 0,75$

4. Нелокальная обобщенная модель термоупругости Лорда — Шульмана. Уравнения модели при наличии источника тепла получаются из уравнений (16) при $\eta_1 = \eta_2 = 0$, $\eta_3 = \eta_4 = 1$.

5. Обобщенная модель связанной термоупругости, содержащая две температуры и параметр нелокальности. Уравнения модели получаются из уравнений (16) при $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta_4 = 0$.

Компоненты вектора смещения, тензора напряжений, термодинамическая и кондуктивная температуры являются функциями параметров преобразований Лапласа и Фурье ξ , z , s . В соответствии с работой [6] для получения этих величин в физической области применяются обратные преобразования.

5. Численное моделирование. Ниже представлены результаты численного решения задачи и проведено сравнение результатов, полученных с использованием различ-

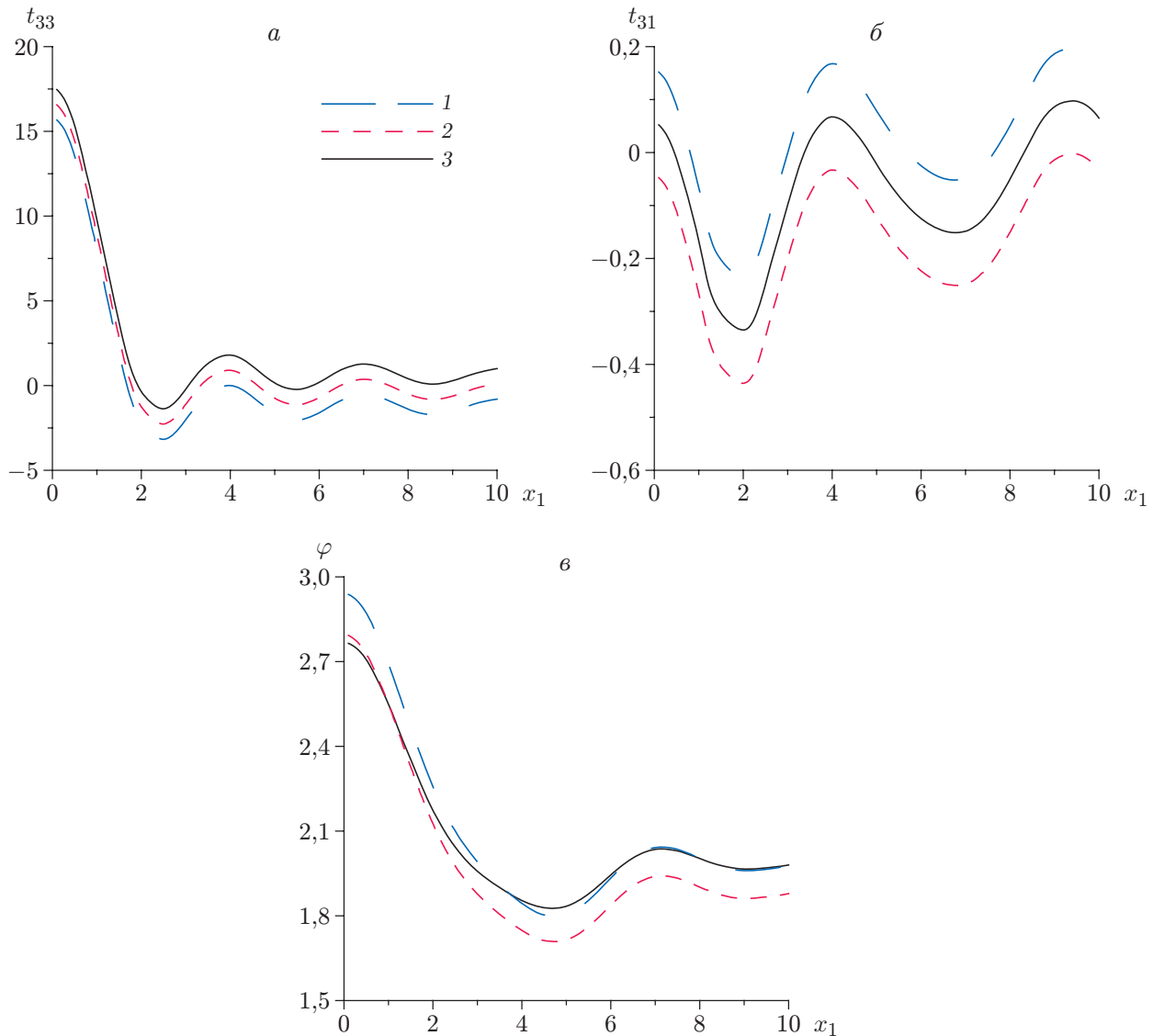


Рис. 2. Зависимости нормального напряжения t_{33} (*a*), напряжения t_{31} (*б*) и кондуктивной температуры φ (*в*) от координаты x_1 , полученные с использованием модели Грина — Линдсея при наличии источника тепла при различных значениях параметра t_0 :

1 — $t_0 = 0,01$, 2 — $t_0 = 0,25$, 3 — $t_0 = 0,75$

ных теорий термоупругости. Константы материала соответствуют константам кристалла магния [16]: $\lambda = 2,17 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\mu = 3,278 \cdot 10^{10}$ Н/м², $K^* = 1,7 \cdot 10^2$ Вт/(м·К), $\omega_1 = 3,58 \cdot 10^{11}$ с⁻¹, $\beta = 2,68 \cdot 10^6$ Н/(м²·К), $\rho = 1,74 \cdot 10^3$ кг/м³, $C_e = 1,04 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К), $T_0 = 298$ К. Вычисления проводились при временах релаксации $\tau_0 = 0,01$ с, $\tau_1 = 0,02$ с.

На рис. 1 приведены результаты вычислений при $t_0 = 0,25$, $a = 0,0104$ и значениях параметра нелокальности $\xi_1 = 0; 0,50; 0,75$. На рис. 1, *a* представлены зависимости нормального напряжения t_{33} от координаты x_1 . При всех рассмотренных значениях параметра ξ_1 на интервале $0 \leq x_1 \leq 2,5$ напряжение t_{33} резко уменьшается. Далее изменение напряжения t_{33} имеет характер установившихся колебаний в окрестности значения $t_{33} = 0$. На рис. 1, *б* приведены аналогичные зависимости напряжения t_{31} от координаты x_1 . На

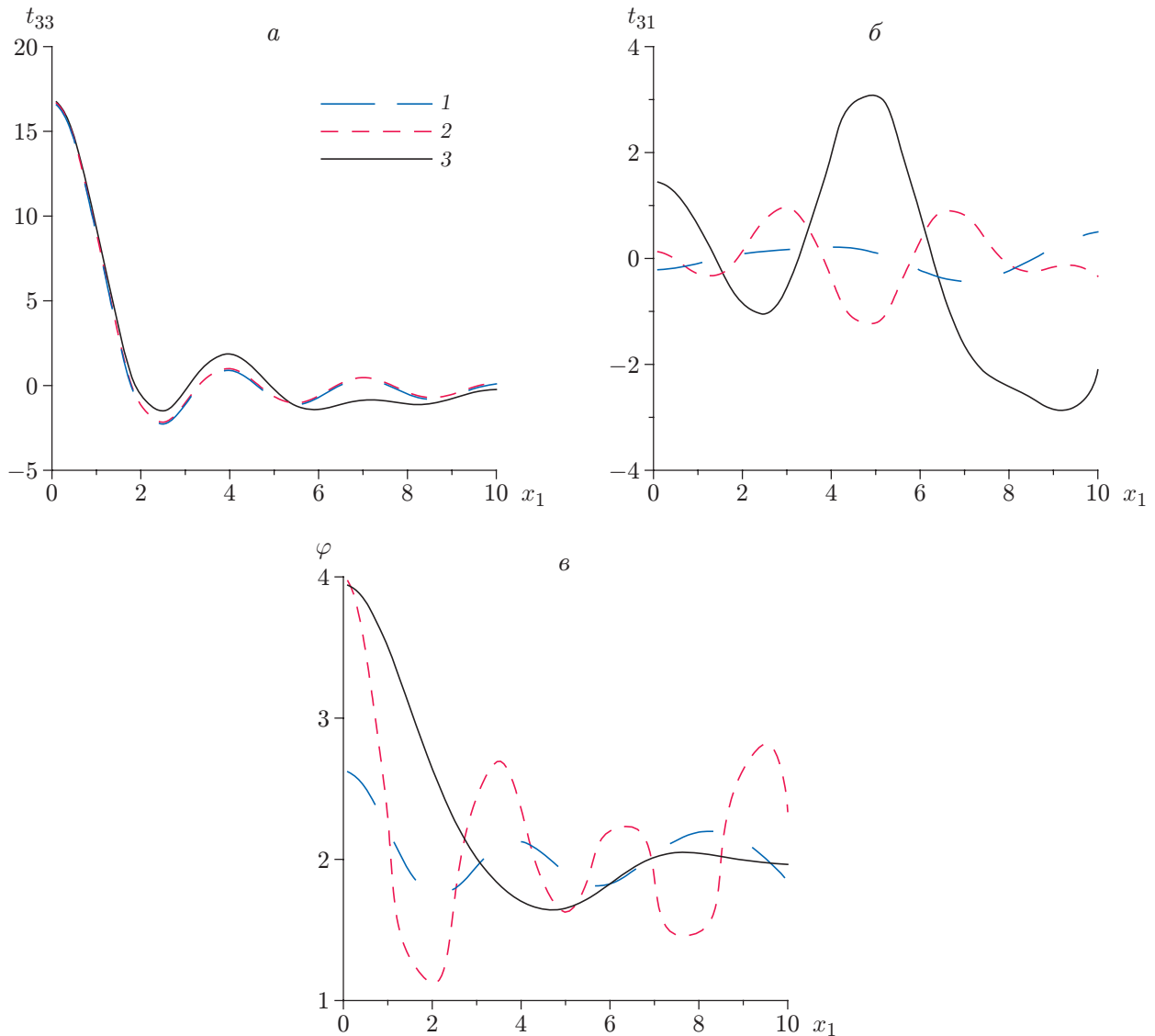


Рис. 3. Зависимости нормального напряжения t_{33} (*a*), напряжения t_{31} (*б*) и кондуктивной температуры φ (*в*) от координаты x_1 , полученные с использованием двухтемпературной модели Грина — Линдсея при различных значениях параметра a :

1 — $a = 0$, 2 — $a = 0,0104$, 3 — $a = 0,5000$

рис. 1, *в* показаны зависимости кондуктивной температуры φ от координаты x_1 . Видно, что при $\xi_1 = 0,5$ амплитуда колебаний величины φ больше, чем при других значениях ξ_1 .

На рис. 2 приведены результаты расчетов при $\xi_1 = 0,5$, $a = 0,0104$ и $t_0 = 0,01; 0,25; 0,75$. На рис. 2, *a* представлены зависимости нормального напряжения t_{33} от координаты x_1 при различных значениях параметра t_0 . Видно, что в интервале $0 \leq x_1 \leq 3$ напряжение t_{33} уменьшается, затем наблюдаются установившиеся колебания этой величины в окрестности значения $t_{33} = 0$. На рис. 2, *б* приведены зависимости напряжения t_{31} от координаты x_1 при различных значениях параметра t_0 . В интервалах $2 \leq x_1 \leq 4$ и $7 \leq x_1 \leq 9$ напряжение t_{31} увеличивается, в остальных областях — уменьшается. На рис. 2, *в* показаны зависимости кондуктивной температуры φ от координаты x_1 при различных значениях

параметра t_0 . Видно, что в интервале $0 \leq x_1 \leq 2$ величина φ при всех рассмотренных значениях параметра t_0 уменьшается, при остальных значениях x_1 наблюдаются колебания этой величины.

На рис. 3 приведены результаты вычислений при $t_0 = 0,25$, $\xi_1 = 0,5$ и $a = 0; 0,0104; 0,5000$. На рис. 3,а представлены зависимости напряжения t_{33} от координаты x_1 . Видно, что в интервале $0 \leq x_1 \leq 2$ величина t_{33} резко уменьшается. В этом интервале напряжение t_{33} при $a = 0,5$ больше, чем при других значениях этого параметра, при $x_1 > 2$ напряжение t_{33} стремится к нулю. На рис. 3,б показаны зависимости напряжения t_{31} от координаты x_1 при различных значениях параметра a . В интервале $0 \leq x_1 \leq 7$ колебания напряжения t_{31} при $a = 0,5$ и $a = 0,0104$ происходят в противофазе. Вне этого интервала фазы колебаний практически совпадают. При $a = 0$ напряжение t_{31} колеблется в окрестности значения $t_{31} = 0$. Таким образом, результаты, полученные с использованием двухтемпературной модели, отличаются от результатов, полученных с помощью однотемпературной модели. На рис. 3,в приведены зависимости величины φ от координаты x_1 при различных значениях параметра a . При $a = 0,5$ в первой половине интервала $0 \leq x_1 \leq 10$ величина φ уменьшается, а во второй половине интервала колеблется в окрестности значения $\varphi = 2$. При $a = 0,0104$ и $a = 0$ величина φ колеблется в окрестности значения $\varphi = 2$ во всем интервале.

На рис. 4 приведены результаты решения задачи с использованием различных теорий термоупругости при $a = 0,0104$, $t_0 = 0,25$, $\xi_1 = 0,5$. На рис. 4,а показаны зависимости нормального напряжения t_{33} от координаты x_1 . В окрестности значения $t_{33} = 0$ нормальное напряжение t_{33} , вычисленное с использованием модифицированной модели Грина — Линдсея, меньше значения, вычисленного по другим моделям, что объясняется влиянием времени релаксации. На интервале $0 \leq x_1 \leq 3$ напряжение t_{33} быстро уменьшается, достигая минимального значения при $x_1 = 2,5$. На рис. 4,б приведены зависимости касательного напряжения t_{31} от координаты x_1 . В интервале $0 \leq x_1 \leq 8$ характер зависимостей $t_{31}(x_1)$, вычисленных с использованием модели Грина — Линдсея и модифицированной модели Грина — Линдсея, существенно отличается от характера зависимости $t_{31}(x_1)$, вычисленной по модели Лорда — Шульмана. На рис. 4,в представлены зависимости кондуктивной температуры φ от координаты x_1 . Значение φ , вычисленное с использованием модели Грина — Линдсея, больше значения φ , вычисленного по модели Лорда — Шульмана и модифицированной модели Грина — Линдсея. В интервале $0 \leq x_1 \leq 2$ величина φ быстро убывает, а затем колеблется. Наибольшая амплитуда колебаний величины φ имеет место при использовании теории Грина — Линдсея.

Заключение. С использованием модели, учитывающей нелокальность и содержащей две температуры (модифицированная модель Грина — Линдсея), решена двумерная задача для однородного изотропного термоупругого полупространства. На основе результатов численных расчетов можно сделать следующие выводы.

Учет нелокальности приводит к колебаниям напряжений и температуры на большей части интервала изменения этих величин. С увеличением параметра нелокальности температура и напряжения увеличиваются.

При различных значениях параметра источника тепла изменение величин t_{33} , t_{31} и φ качественно подобно, при этом амплитуды колебаний данных величин различны. Даже при малом значении параметра источника тепла значения t_{33} и φ увеличиваются. Значение φ уменьшается с увеличением параметра источника тепла.

Наличие в модели двух температур приводит к увеличению температуры φ , при этом напряжения t_{33} и t_{31} не меняются.

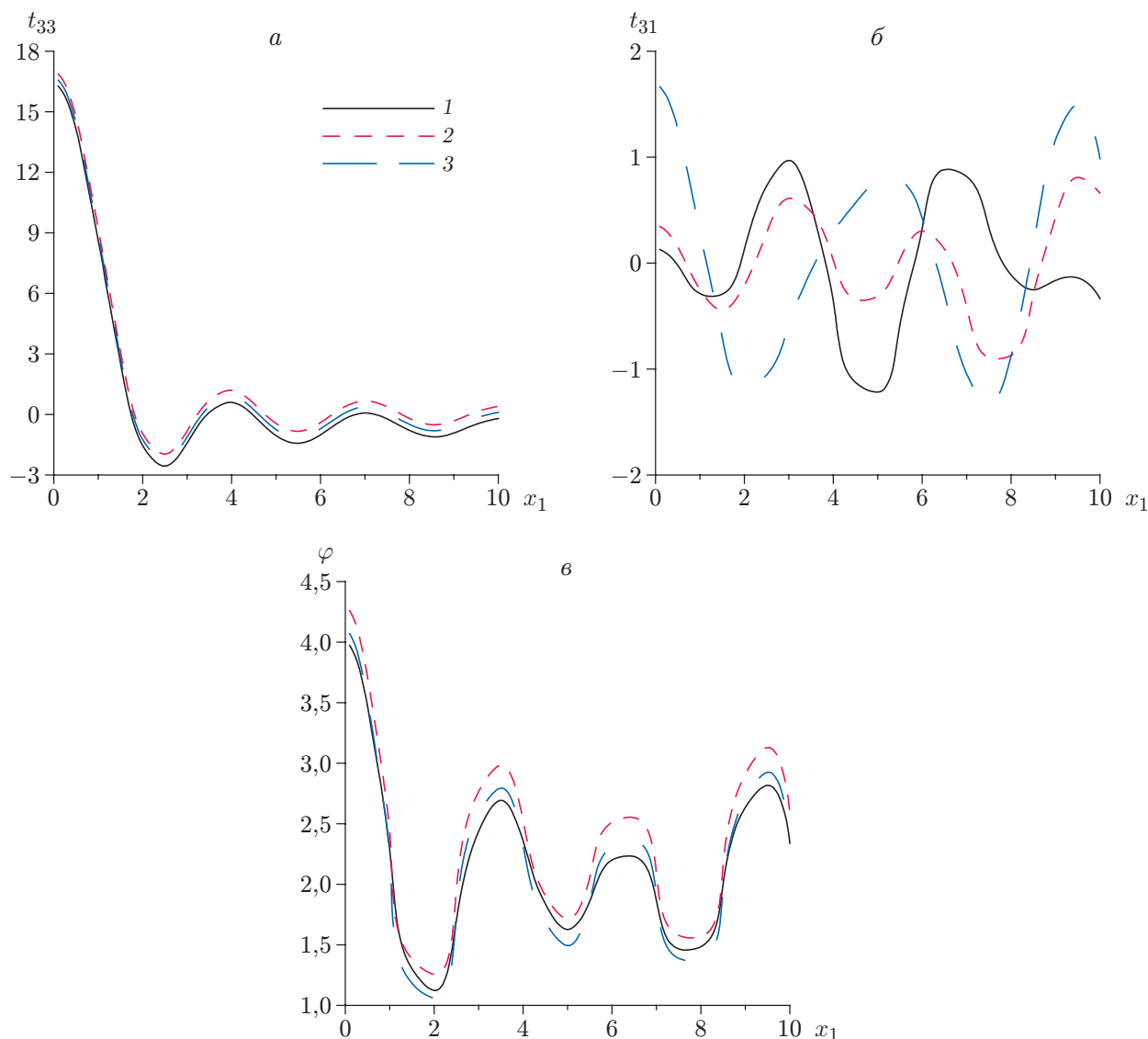


Рис. 4. Зависимости нормального напряжения t_{33} (а), напряжения t_{31} (б) и кондуктивной температуры φ (в) от координаты x_1 , полученные с использованием различных моделей:

1 — модифицированная модель Грина — Линдсея, 2 — модель Грина — Линдсея, 3 — модель Лорда — Шульмана

Значения напряжений t_{33} , t_{31} и температуры φ , вычисленные с использованием модифицированной модели Грина — Линдсея, больше соответствующих значений, вычисленных по моделям Грина — Линдсея и Лорда — Шульмана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lord H. W., Shulman Y. A generalized dynamical theory of solids // J. Mech. Phys. 1967. V. 15, N 5. P. 299–309.
2. Green A. E., Lindsay K. A. Thermoelasticity // J. Elasticity. 1972. V. 2. P. 1–7.
3. Chen P. J., Gurtin M. E. On a theory of heat conduction involving two temperatures // Z. angew. Math. Phys. 1968. Bd 19, N 4. S. 614–627.

4. **Chen P. J., Gurtin M. E., Willams W. O.** On the thermoelastic material with two temperature // *Z. angew. Math. Phys.* 1969. Bd 20. S. 107–112.
5. **Yousseff H. M.** Theory of two-temperature-generalized thermoelasticity // *IMA J. Appl. Math.* 2006. V. 71, N 3. P. 383–390.
6. **Kumar R., Kaushal S.** Disturbance due to inclined load in generalized thermoelastic medium with two temperature // *Intern. J. Appl. Mech. Engng.* 2008. V. 13, N 3. P. 695–706.
7. **Sharma K.** Reflection at free surface in micropolar thermoelastic solid with two temperature // *Intern. J. Appl. Mech. Engng.* 2013. V. 18, N 1. P. 217–234.
8. **Sharma K., Marin M.** Effect of distinct conductive and thermodynamic temperature on the reflection of plane waves in micropolar elastic half-space // *U.P.B Sci. Bull. Ser. A.* 2013. V. 75, N 2. P. 121–132.
9. **Sharma K., Sharma S., Bhargava R. R.** Propagation of waves in micropolar thermoelastic solid with two temperatures bordered with layers or half-spaces of inviscid liquid // *Materials Phys. Mech.* 2013. V. 16. P. 66–81.
10. **Yu Y. J., Xue Z. N., Tian X. G.** A modified Green — Lindsay thermoelasticity with strain rate to eliminate the discontinuity // *Meccanica.* 2018. V. 53. P. 2543–2554.
11. **Sarkar N., Abo-Dahab S. M., Mondal S.** Reflection of magneto-thermoelastic waves at a solid half-space undermodified Green — Lindsay model with two temperatures // *J. Therm. Stress.* 2020. V. 43. P. 1083–1099.
12. **Quintanilla R.** Some qualitative results for a modification of the Green — Lindsay thermoelasticity // *Meccanica.* 2018. V. 53, N 14. P. 3607–3613.
13. **Eringen A. C.** Plane waves in non local micropolar elasticity // *Intern. J. Engng Sci.* 1984. V. 22, N 8. P. 1113–1121.
14. **Eringen A. C., Edelen D. G. B.** On non local elasticity // *J. Engng Sci.* 1972. V. 10. P. 233–248.
15. **Kumar R., Vashishth A. K., Ghangas S.** Non local heat conduction approach in a bi-layer tissue during magnetic fluid hyperthermia with dual phase lag model // *Biomed. Materials Engng.* 2019. V. 30. P. 387–402.
16. **Dhaliwal R. S.** Dynamical coupled thermoelasticity / R. S. Dhaliwal, A. Singh. Delhi: Hindustan Publ., 1980.

*Поступила в редакцию 16/VIII 2021 г.,
после доработки — 16/VIII 2021 г.
Принята к публикации 27/IX 2021 г.*
