

О РАСЧЕТЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ В МНОГОКОМПОНЕНТНОМ ПОЛИКРИСТАЛЛИЧЕСКОМ МАТЕРИАЛЕ

В связи с расширением области применения композитных материалов, полученных на основе нескольких мелкодисперсных составляющих, вопрос об изучении закономерностей их упругопластического деформирования продолжает вызывать значительный интерес [1—3]. Методы же исследования неупругого поведения стохастических смесей, учитывающие физическую природу возникновения пластических деформаций в их компонентах, разработаны недостаточно.

В настоящей работе расчет пластических деформаций в стохастическом композите и вывод его макроскопического реологического уравнения при произвольной программе нагружения проводились на основе механизма, учитывающего множественное кристаллографическое скольжение в составляющих материал монокристаллах. Для однокомпонентного поликристалла аналогичный подход был ранее использован в [4]. Проведенное на примере медно-вольфрамовой композиции сопоставление теоретических и экспериментальных кривых растяжения показало достаточно хорошее их взаимное соответствие.

1. Рассмотрим композиционную поликристаллическую среду, состоящую из N равномерно перемешанных идеально сцепленных между собой однородных и упругоизотропных составляющих. Пусть $q = 1, \dots, M$ — упругие компоненты, $q = M + 1, \dots, N$ — упругопластические.

Будем предполагать, что пластические деформации в зернах (монокристаллах) компонентов композита осуществляются посредством трансляционного кристаллографического скольжения и начинаются в тот момент, когда касательное напряжение в какой-либо системе скольжения зерна достигает постоянного для данного материала значения $\tau_0^{(q)}$. Упругими остаются компоненты, в которых при заданной истории нагружения это условие не выполняется. Пластические сдвиги приводят к упрочнению как действующих, так и пассивных систем скольжения монокристалла, выражающемуся в возрастании величины разрешающего касательного напряжения.

Таким образом, для пластического зерна в q -м ($q = M + 1, \dots, N$) компоненте среды должны быть выполнены соотношения

$$(1.1) \quad \begin{aligned} t_{ij}^{\alpha(q)} s_{ij}^{(q)} &= \tau^{\alpha(q)}, \quad \epsilon_{ij}^{(q)} = 2t_{ij}^{\alpha(q)} \lambda_{\alpha}, \\ t_{ij}^{\alpha(q)} &= \frac{1}{2} [I_i^{(\alpha)(q)} n_j^{(\alpha)(q)} + I_j^{(\alpha)(q)} n_i^{(\alpha)(q)}] \quad (i, j = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Здесь $s_{ij}^{(q)}$ — девиаторы локальных напряжений $\sigma_{ij}^{(q)}$; $\epsilon_{ij}^{(q)}$ — локальные пластические деформации ($\epsilon_{ij}^{(q)} = 0$); $\tau^{\alpha(q)}$, λ_{α} — касательное напряжение и пластический сдвиг в системе α зерна; $t_{ij}^{\alpha(q)}$ — тензор Шмидта, где $I_i^{(\alpha)(q)}$, $n_i^{(\alpha)(q)}$ — единичные векторы направления скольжения и нормали к плоскости скольжения системы α . Суммирование по индексам в скобках не проводится.

Допустим, что упрочнение систем скольжения монокристаллов во всех пластических компонентах среды ($q = M + 1, \dots, N$) изотропно и описывается уравнением [5]

$$(1.2) \quad \tau^{\alpha(q)} = \tau_0^{(q)} + \int H^{(q)} \sum_{\beta=1}^{n_q} d\lambda_{\beta} \quad (\alpha = 1, \dots, L_q),$$

где $H^{(q)}$ — модуль изотропного упрочнения; $\tau_0^{(q)}$ — разрешающее касательное напряжение первоначального сдвига, зависящее от упругих свойств компонента и его микроструктуры [6, 7]; n_q — число активных систем скольжения

в рассматриваемом пластическом зерне композита; L_q — полное число систем скольжения кристалла. Из соотношения (1.2) следует, что действующие касательные напряжения одинаковы во всех активных системах монокристалла.

В соответствии с [8] примем в качестве некоторого приближения, что при множественном скольжении в кристалле пластические сдвиги в его системах также равны. Тогда, вводя интегральный сдвиг $\Lambda^{(q)} = n_q \lambda$ ($\lambda_\alpha = \lambda$, $\alpha = 1, \dots, n_q$) и осредненный по всем действующим системам скольжения тензор коэффициентов Шмидта $t_{ij}^{(q)}$, из (1.1) и (1.2) получим выражения для приращений локальных напряжений и деформаций ($\dot{a} \equiv da$) через $\dot{\Lambda}^{(q)}$:

$$(1.3) \quad t_{ij}^{(q)} \dot{s}_{ij}^{(q)} = H^{(q)} \dot{\Lambda}^{(q)}, \quad \dot{\epsilon}_{ij}^{(q)} = 2 t_{ij}^{(q)} \dot{\Lambda}^{(q)}$$

$$\left(t_{ij}^{(q)} = \frac{1}{n_q} \sum_{\alpha=1}^{n_q} t_{ij}^{\alpha(q)} \right).$$

Полагая упрочнение компонентов среды регулярным [9], модули их локального упрочнения зададим в виде

$$(1.4) \quad H^{(q)} = 2 h_{(q)} t_{ki}^{(q)} t_{ki}^{(q)}$$

(h_q — физические константы материалов).

В [4] показано, что выбор $H^{(q)}$ в виде (1.4) моделирует особенности регулярного упрочнения материала на уровне микроструктуры.

2. Пространственную структуру композиционной среды опишем с помощью случайных индикаторных функций координат $\chi_q(\mathbf{r})$ ($q = 1, \dots, N$), принимающих значение 1 на множестве точек q -го компонента и 0 — вне этого множества, и пусть c_q — объемные концентрации компонентов. С использованием этих функций закон Гука, справедливый в точках композита, выразится соотношением

$$(2.1) \quad \begin{aligned} s_{ij}(\mathbf{r}) &= 2\mu(\mathbf{r}) [e_{ij}(\mathbf{r}) - \epsilon_{ij}(\mathbf{r})], \\ \sigma_{ii}(\mathbf{r}) &= 3K(\mathbf{r}) E_{ii}(\mathbf{r}), \\ \epsilon_{ij}(\mathbf{r}) \chi_q(\mathbf{r}) &\equiv 0 \quad (q = 1, \dots, M), \\ \mu(\mathbf{r}) &= \sum_{q=1}^N \mu_q \chi_q(\mathbf{r}), \quad K(\mathbf{r}) = \sum_{q=1}^N K_q \chi_q(\mathbf{r}), \end{aligned}$$

где $E_{ij}(\mathbf{r})$, $e_{ij}(\mathbf{r})$ — тензор полных локальных деформаций среды и его девиатор; K_q , μ_q — упругие модули составляющих композита ($q = 1, \dots, N$).

Предположим, что все рассматриваемые случайные поля

$$E_{ij}(\mathbf{r}) (e_{ij}(\mathbf{r})), \quad \sigma_{ij}(\mathbf{r}) (s_{ij}(\mathbf{r})), \quad \epsilon_{ij}(\mathbf{r}) \text{ и } \chi_q(\mathbf{r})$$

($q = 1, \dots, N$) статистически-однородные и эргодические. Тогда их математические ожидания могут быть заменены средними по объемам компонентов V_q и композита V величинами. Операции соответствующего осреднения обозначаются далее символами $\langle \rangle_q$ и $\langle \rangle$.

В каждой точке среды также должны быть выполнены уравнения равновесия $\nabla_j \sigma_{ij}(\mathbf{r}) = 0$ (∇_j — оператор дифференцирования по j -й координате). Запишем их с учетом соотношений (2.1) в форме Ляме и затем преобразуем в интегральные при помощи функции Грина эквивалентной бесконечной однородной среды. Ограничиваясь для простоты рамками гипотезы сингулярного приближения [10], получим локальные зависимости вида

$$(2.2) \quad \begin{aligned} e_{ij}(\mathbf{r}) &= \langle e_{ij} \rangle + \alpha_0 [Q_{ij}(\mathbf{r}) - \langle Q_{ij} \rangle], \\ E_{ii}(\mathbf{r}) &= \langle E_{ii} \rangle + \beta_0 P(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Здесь

$$(2.3) \quad \begin{aligned} Q_{ij}(\mathbf{r}) &= e_{ij}(\mathbf{r}) - \sum_{q=1}^N m_q \chi_q(\mathbf{r}) [e_{ij}(\mathbf{r}) - \epsilon_{ij}(\mathbf{r})]; \\ P(\mathbf{r}) &= E_{ii}(\mathbf{r}) - \sum_{q=1}^N k_q(\mathbf{r}) \chi_q(\mathbf{r}) E_{ii}(\mathbf{r}); \end{aligned}$$

$$\langle Q_{ij} \rangle = \mathcal{E}_{ij} \langle s_{ij} \rangle (2\mu_0)^{-1} - \langle e_{ij} \rangle;$$

$$\alpha_0 = \frac{2(4-5\nu_0)}{15(1-\nu_0)}; \quad \beta_0 = \frac{1+\nu_0}{3(1-\nu_0)}; \quad \nu_0 = \frac{3K_0-2\mu_0}{3(\mu_0+3K_0)};$$

$$m_q = \mu_q \mu_0^{-1}; \quad k_q = K_q K_0^{-1};$$

\mathcal{E}_{ij} — макроскопические пластические деформации; ν_0 — коэффициент Пуассона эффективной среды; μ_0, K_0 — ее макроскопические упругие константы такие, что

$$(2.4) \quad \langle s_{ij} \rangle = 2\mu_0 (\langle e_{ij} \rangle - \mathcal{E}_{ij}), \quad \langle \sigma_{ii} \rangle = 3K_0 \langle E_{ii} \rangle.$$

Из (2.1) — (2.3) для произвольного зерна q -го компонента среды найдем

$$(2.5) \quad e_{ij}^{(q)} = \langle e_{ij} \rangle + \alpha_0 [\epsilon_{ij}^{(q)} - m_q (e_{ij}^{(q)} - \epsilon_{ij}^{(q)}) - \langle e_{ij} \rangle + \langle s_{ij} \rangle (2\mu_0^{-1})],$$

$$E_{ii}^{(q)} = \langle E_{ii} \rangle + \beta_0 (1 - k_q) E_{ii}^{(q)} \quad (q = 1, \dots, N),$$

$$\epsilon_{ij}^{(q)} \equiv 0 \quad (q = 1, \dots, M).$$

Разрешая выражения (2.5) относительно $e_{ij}^{(q)}$ и $E_{ii}^{(q)}$, из уравнений (2.1) получим локальные напряжения

$$(2.6) \quad s_{ij}^{(q)} = 2\mu_0 m_q^0 [\eta_{ij} - (1 - \alpha_0) \epsilon_{ij}^{(q)}]$$

$$(\epsilon_{ij}^{(q)} \equiv 0, \quad q = 1, \dots, M),$$

$$\sigma_{ii}^{(q)} = 3K_0 k_q^0 \langle E_{ii} \rangle.$$

Здесь

$$(2.7) \quad \eta_{ij} = (1 - \alpha_0) \langle e_{ij} \rangle + \alpha_0 \langle s_{ij} \rangle (2\mu_0)^{-1},$$

$$m_q^0 = m_q [1 + \alpha_0 (m_q - 1)]^{-1}, \quad k_q^0 = k_q [1 + \beta_0 (k_q - 1)]^{-1}.$$

Далее заметим, что внутри q -й упругопластической составляющей композита в соответствии с принятым механизмом пластической деформации можно выделить три различные деформационные области. Первую ($s = 1$) образуют зерна в состоянии полной пластичности, т. е. те, для которых число активных систем скольжения $n_q = p_q \leq 5$, где p_q — максимально возможное число независимых систем для материала компонента. Вторую область ($s = 2$) составляют кристаллиты, находящиеся в состоянии неполной пластичности с числом активных систем $n_q < p_q$, и третью ($s = 3$) — упругие зерна, где процесс пластического течения еще не начался ($n_q = 0$). Пусть v_{q1}, v_{q2}, v_{q3} ($v_{q1} + v_{q2} + v_{q3} = 1$) — объемные концентрации указанных монокристаллов в q -м компоненте смеси, а $\kappa_{qs}(r)$ ($s = 1, 2, 3$) — индикаторные случайные функции соответствующих деформационных областей внутри V_q ($q = M + 1, \dots, N$). Очевидно, что $\kappa_{q1}(r) + \kappa_{q2}(r) + \kappa_{q3}(r) = \kappa_q(r)$ ($\kappa_q(r)$ — индикаторная функция q -й упругопластической составляющей композита).

С помощью введенных обозначений первое из соотношений (2.6) переписывается в виде

$$(2.8) \quad s_{ij}^{(q)}(r) = 2\mu_0 m_q^c [\eta_{ij} - (1 - \alpha_0) \epsilon_{ij}^{(q)}(r) \kappa_{q*}(r)]$$

$$(\epsilon_{ij}^{(q)}(r) \kappa_{q*}(r) \equiv 0, \quad q = 1, \dots, M),$$

где $\kappa_{q*}(r) = \kappa_{q1}(r) + \kappa_{q2}(r)$ — индикаторная функция пластической области внутри V_q .

Следуя [4], определим локальные пластические деформации во всех деформационных областях q -го упругопластического компонента. Из (1.3) с учетом (1.4) для пластического зерна в объеме V_q будем иметь

$$(2.9) \quad t_{ij}^{(q)} [\dot{s}_{ij}^{(q)} - h_q \dot{\epsilon}_{ij}^{(q)}] = 0.$$

В области полной пластичности ($s = 1$) вследствие исчезновения деформационной анизотропии зерен на этой стадии истории деформирования компонента соотношение (2.9) должно быть выполнено для всех кристаллографических направлений, т. е.

$$(2.10) \quad \dot{s}_{ij(1)}^{(q)} - h_q \dot{\epsilon}_{ij(1)}^{(q)} = 0.$$

Из (2.10) и (2.8) найдем

$$(2.11) \quad \dot{\epsilon}_{ij}^{(q)} = m_q^* \dot{\eta}_{ij} \quad (q = M + 1, \dots, N),$$

$$m_q^* = m_q [(1 - \alpha_0) (\vartheta_q + m_q) + \alpha_0 m_q \vartheta_q]^{-1}, \quad \vartheta_q = h_q (2\mu_0)^{-1}.$$

Для монокристаллов в области неполной пластичности ($s = 2$) из уравнений (2.8), (2.9), (1.3) и (1.4) определим величину интегрального сдвига

$$\dot{\Lambda}_{(2)}^{(q)} = m_q^* \dot{\eta}_{ij} t_{ij}^{(q)} / 2 t_{pr}^{(q)} t_{pr}^{(q)} \quad (r, p = 1, 2, 3),$$

а затем из (1.3) — соответствующие пластические деформации

$$(2.12) \quad \dot{\epsilon}_{ij}^{(q)} = m_q^* \Psi_{ijkl}^{(q)} \dot{\eta}_{kl} \quad (q = M + 1, \dots, N),$$

$$\Psi_{ijkl}^{(q)} = t_{ij}^{(q)} t_{kl}^{(q)} / t_{pr}^{(q)} t_{pr}^{(q)}.$$

Наконец, в упругой области ($s = 3$) из соотношений (2.8) имеем

$$(2.13) \quad \dot{\epsilon}_{ij}^{(q)} \equiv 0, \quad \dot{s}_{ij}^{(q)} = 2\mu_0 m_q^0 \dot{\eta}_{ij} \quad (q = M + 1, \dots, N).$$

Для определения макроскопических напряжений в композите осредним локальные напряжения по объему образца V с учетом правила механического смешивания составляющих:

$$(2.14) \quad \langle s_{ij} \rangle = \sum_{q=1}^N c_q \langle s_{ij} \rangle_q, \quad \langle \sigma_u \rangle = \sum_{q=1}^N c_q \langle \sigma_u \rangle_q.$$

Величины $\langle s_{ij} \rangle_q$ найдем путем осреднения соотношения (2.8) по объему V_q с учетом равенств (2.11)—(2.13):

$$(2.15) \quad \langle \dot{s}_{ij} \rangle_q = 2\mu_0 m_q^0 \{ \dot{\eta}_{ij} - (1 - \alpha_0) [v_{q1} \langle \dot{\epsilon}_{ij} \rangle_{q1} + v_{q2} \langle \dot{\epsilon}_{ij} \rangle_{q2}] \} \quad (q = 1, \dots, N),$$

$$v_{q1} = v_{q2} \equiv 0 \quad (q = 1, \dots, M).$$

Здесь $\langle \dot{\epsilon}_{ij} \rangle_{q1}$ и $\langle \dot{\epsilon}_{ij} \rangle_{q2}$ — приращения средних пластических деформаций в областях полной и неполной пластичности q -й составляющей композита.

Из соотношения (2.11) следует постоянство пластических деформаций в первой деформационной области компонентов среды, т. е. для них справедливо равенство $\dot{\epsilon}_{ij}^{(q)} \equiv \langle \dot{\epsilon}_{ij} \rangle_{q1}$. Величины же $\dot{\epsilon}_{ij}^{(q)}$, определяемые соотношением (2.12), зависят от ориентации зерен относительно макроскопических осей образца и при вычислении их средних значений должны осредняться по области $\Omega \equiv \Omega_{q2}$, занимаемой ориентациями кристаллитов второго типа в пространстве ориентаций монокристаллов q -го компонента: $\langle \dot{\epsilon}_{ij} \rangle_{q2} = \langle \dot{\epsilon}_{ij}^{(q)} \rangle_{\Omega}$.

С учетом вышесказанного из (2.15) получим

$$\langle \dot{s}_{ij} \rangle_q = 2\mu_0 m_q^c \{ [1 - (1 - \alpha_0) m_q^* v_{q1}] \dot{\eta}_{ij} - (1 - \alpha_0) m_q^* v_{q2} \Psi_{ijkl}^{(q)} \dot{\eta}_{kl} \} \quad (q = 1, \dots, N),$$

где $\Psi_{ijkl}^{(q)} = \langle \Psi_{ijkl}^{(q)} \rangle_{\Omega}$.

Подставляя найденные выражения для $\langle \dot{s}_{ij} \rangle_q$ в соотношения (2.14), определим девиаторы макроскопических напряжений в среде:

$$(2.16) \quad \langle s_{ij} \rangle = 2\mu_0 \{ [1 - (1 - \alpha_0) B(v_1)] I_{ijkl} - (1 - \alpha_0) \Phi_{ijkl}(v_2) \} \dot{\eta}_{kl}.$$

Здесь

$$v_1 = (v_{(M+1)1}, \dots, v_{N1}); \quad v_2 = (v_{(M+1)2}, \dots, v_{N2});$$

$$B(v_1) = \sum_{q=M+1}^N c_q v_{q1} m_q^0 m_q^c; \quad I_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk});$$

$$\Phi_{ijkl}(v_2) = \sum_{q=M+1}^N c_q v_{q2} m_q^0 m_q^c \Psi_{ijkl}^{(q)}.$$

δ_{ij} — тензор Кронекера.

В выражениях (2.16) правые части преобразованы с учетом соотношений самосогласованной схемы осреднения [10]

$$\sum_{q=1}^N c_q m_q^0 = 1, \quad \sum_{q=1}^N c_q k_q^2 = 1,$$

использованной для определения введенных уравнениями (2.4) макроскопических упругих констант μ_0 , K_0 .

Подставляя в равенства (2.16) $\dot{\gamma}_{kl}$ из (2.7) и разрешая их относительно $\langle \dot{s}_{ij} \rangle$, получим макроскопическое реологическое уравнение рассматриваемого упругопластического композита:

$$(2.17) \quad \langle \dot{s}_{ij} \rangle = 2M_{ijkl} \langle \dot{e}_{kl} \rangle,$$

$$M_{ijkl} = \mu_0 \{ [1 + \alpha_0 B(v_1)] I_{ijmn} + \alpha_0 \Phi_{ijmn}(v_2) \}^{-1} \times \\ \times \{ [1 - (1 - \alpha_0) B(v_1)] I_{mnlk} - (1 - \alpha_0) \Phi_{mnlk}(v_2) \}$$

(M_{ijkl} — тензор макроскопических касательных модулей среды).

Для объемной составляющей макронапряжений найдем соотношение

$$(2.18) \quad \langle \sigma_{ii} \rangle = 3K_0 \langle E_{ii} \rangle.$$

Макроскопические пластические деформации в материале определим из (2.11) с учетом (2.4), (2.7) и (2.15):

$$(2.19) \quad \mathcal{E}_{ij} = \sum_{q=1}^N c_q m_q^0 (v_{q1} \langle \varepsilon_{ij} \rangle_{q1} + v_{q2} \langle \varepsilon_{ij} \rangle_{q2}).$$

Уравнения (2.17) — (2.19) полностью описывают упругопластическое состояние среды в области регулярного упрочнения ($v_1 \sim v_2 \sim v_3 \neq 0$). В упругой области пластические зерна в компонентах отсутствуют ($v_1 = v_2 = 0$) и уравнение (2.17) совпадает с макроскопическим законом Гука для стохастической смеси $\langle \dot{s}_{ij} \rangle = 2\mu_0 \langle \dot{e}_{ij} \rangle$. На начальном этапе пластического деформирования в случае, если в материале присутствует только одна пластическая составляющая ($N - M = 1$) либо все ($N - M$) пластических компонентов имеют близкие значения касательных напряжений первоначально го сдвига $\tau_0^{(q)}$ ($q = M + 1, \dots, N$), правомерны допущения $v_{q1} = 0$, $v_{q2} = \delta v_{q2}^*$, $v_{q3} \sim 1$, где $\delta \ll 1$, $v_{q2}^* \sim 1$. Тогда с точностью до членов порядка δ справедливо представление

$$M_{ijkl} = \mu_0 [I_{ijkl} - \delta \Phi_{ijmn}(v_2)].$$

В конце участка регулярного упрочнения компонента с максимальным значением $\tau_0^{(q)}$ большинство кристаллитов во всех пластически деформированных составляющих будут находиться в состоянии полной пластичности. Однако вследствие пластической анизотропии монокристаллов, связанной с дискретностью пространственного расположения систем скольжения, всегда существуют зерна, остающиеся упругими при достаточно высоких значениях внешних напряжений. Тем не менее при большом числе систем скольжения (ГЦК-, ОЦК-кристаллы) количество таких зерен пренебрежимо мало, и можно положить $v_{q1} \approx 1$, $v_{q2} = \delta v_{q2}^*$, $v_{q2}^* \sim 1$, $v_{q3} \approx 0$ ($q = M + 1, \dots, N$). При этом для тензора M_{ijkl} правомерно представление (с точностью до слагаемых порядка δ)

$$M_{ijkl} = \mu_0 \left\{ \frac{1 - (1 - \alpha_0) B(v_1)}{1 + \alpha_0 B(v_1)} I_{ijkl} - \delta \frac{\Phi_{ijkl}(v_2)}{[1 + \alpha_0 B(v_1)]^2} \right\}.$$

При достижении состояния полной пластичности во всех пластических компонентах справедливы допущения $v_{q1} \approx 1$, $v_{q2} \approx 0$, $v_{q3} = 0$ ($q = M + 1, \dots, N$), приводящие уравнение (2.17) к виду

$$\langle \dot{s}_{ij} \rangle = 2\mu_* \langle \dot{e}_{ij} \rangle,$$

$$\mu_* = \mu_0 \left[1 - \frac{B(1)}{1 + \alpha_0 B(1)} \right], \quad B(1) = \sum_{q=M+1}^N c_q m_q^0 m_q^*.$$

Из полученного соотношения вытекает, что на стадии полной пластичности всех пластически деформируемых составляющих исследуемый материал обнаруживает линейное упрочнение с касательным модулем μ_* , убывающим с ростом концентрации пластических составляющих в смеси.

3. Применение предложенного метода рассмотрим на примере растяжения композиционного материала напряжением $\langle \sigma_{11} \rangle$. Для девиаторов средних в композите и компонентах напряжений и деформаций имеем

$$(3.1) \quad [\dot{s}_{11}] = \frac{2}{3} [\dot{\sigma}_{11}], \quad [\dot{s}_{22}] = [\dot{s}_{33}] = -\frac{1}{3} [\dot{\sigma}_{11}], \quad [\dot{s}_{ij}] = 0 \quad (i \neq j),$$

$$[e_{11}] = \frac{2}{3} (1 + \nu) [\dot{E}_{11}], \quad [\dot{e}_{22}] = [\dot{e}_{33}] = -\frac{1}{3} [\dot{E}_{11}], \quad [\dot{E}_{ij}] = 0 \quad (i \neq j),$$

где $[\] = \langle \ \rangle, \langle \ \rangle_q; \nu = \nu_0, \nu_q$.

Из соотношения (2.7) с учетом (3.1) получим

$$(3.2) \quad \dot{\eta}_{11} = \frac{2}{3} (1 - \alpha_0) (1 + \nu_0) \langle \dot{E}_{11} \rangle + \frac{\alpha_0}{3\mu_0} \langle \dot{\sigma}_{11} \rangle = (1 - \alpha_0) \mathcal{E}_{11} + \frac{\langle \dot{\sigma}_{11} \rangle}{3\mu_0},$$

$$\dot{\eta}_{22} = \dot{\eta}_{33} = -\frac{1}{2} \dot{\eta}_{11}, \quad \dot{\eta}_{ij} = 0 \quad (i \neq j).$$

Принимая во внимание, что в силу определения тензора $\bar{\Psi}_{11j}^{(q)}$ справедливо условие $\Psi_{11j}^{(q)} = 0$, из (2.15), (3.1) и (3.2) найдем соотношение

$$(3.3) \quad \langle \dot{\sigma}_{11} \rangle_q = 3\mu_0 m_q^0 \{ 1 - (1 - \alpha_0) m_q^* [v_{q1} + v_{q2} \psi_q] \} \dot{\eta}_{11}$$

$$\left(\psi_q = \frac{3}{2} \Psi_{111}^{(q)}, \quad q = M + 1, \dots, N \right).$$

Параметры упрочнения компонентов композита $\hat{v}_q = h_q (2\mu_0)^{-1}$, входящие в величины m_q^* , должны быть определены по экспериментальным диаграммам растяжения каждого из компонентов. Из соотношения (3.3), полагая $\mu_0 = \mu_q, v_{q2} = 0$ ($q = M + 1, \dots, N$), для образца из q -го материала на стадии полной пластичности имеем

$$\dot{\sigma}_q = H_q \vartheta_q' (1 + \vartheta_q)^{-1} \dot{E}_q = H_q \vartheta_q' \dot{\mathcal{E}}_q.$$

Здесь $\sigma_q = \langle \sigma_{11} \rangle_q, E_q = \langle E_{11} \rangle_q, \mathcal{E}_q = \mathcal{E}_{11(q)}$ — компоненты соответствующих тензоров в q -м образце; $\vartheta_q' = h_q (2\mu_q)^{-1}$; $H_q = 2\mu_q (1 + \nu_q)$ — модуль Юнга составляющей.

В соответствии с [4] для ϑ_q найдем

$$\vartheta_q = m_q \vartheta_q', \quad \hat{v}_q = \omega_q (1 - \omega_q) = z_q$$

$$(\omega_q = H_q^* H_q^{-1}, \quad z_q = H_q^{**} H_q^{-1}),$$

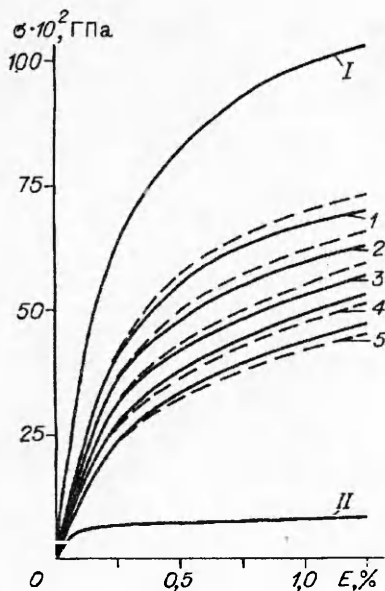
где H_q^* — касательный модуль экспериментальной диаграммы образца за пределами переходного участка; H_q^{**} — соответствующий пластический модуль.

Соотношение (3.3) позволяет рассчитать кривую упругопластического растяжения композита по следующей схеме. Сначала по заданным величинам μ_q, K_q, c_q ($q = 1, \dots, N$) вычисляются макроскопические упругие константы среды из уравнений самосогласованной схемы осреднения и параметры упрочнения пластических компонентов ϑ_q ($q = M + 1, \dots, N$) по соответствующим экспериментальным диаграммам. Затем для каждого приращения параметра $\dot{\eta}_{11}$ определяются объемные концентрации пластических зерен v_{q1} и v_{q2} и значения параметров ψ_q ($q = M + 1, \dots, N$), а из соотношения (3.3) — соответствующие приращения напряжений $\langle \sigma_{11} \rangle_q$ в компонентах. Приращение макроскопического напряжения $\langle \sigma_{11} \rangle$ находится по правилу смесей (2.14), а величины $\langle \dot{E}_{11} \rangle$ и \mathcal{E}_{11} — из равенства (3.2).

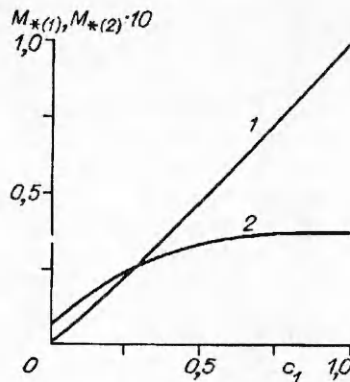
Макроскопическое уравнение растяжения композита определим из соотношения (2.16) с учетом (3.2) и условия $\Phi_{11j} = 0$ в виде

$$(3.4) \quad \langle \dot{\sigma}_{11} \rangle = H_* \langle \dot{E}_{11} \rangle, \quad H_* = H_0 \frac{1 - (1 - \alpha_0) [B(v_1) + \varphi(v_2)]}{1 + \alpha_0 [B(v_1) + \varphi(v_2)]}.$$

Здесь $H_0 = 2\mu_0 (1 + \nu_0)$ — модуль Юнга среды; $\varphi(v_2) = \frac{3}{2} \Phi_{111}(v_2)$.



Р и с. 1



Р и с. 2

На стадии полной пластичности $\varphi(v_2) = 0$, $H_* = H_0 \{1 - B(1) [1 + \alpha_0 B(1)]^{-1}\}$, и в уравнении (3.4) можно перейти от приращений к соответствующим конечным величинам.

Расчет диаграмм деформирования был проведен для двухкомпонентного композиционного материала, полученного путем пропитки каркаса из спеченного вольфрамового порошка расплавом меди (рис. 1). Экспериментальным диаграммам растяжения элементов композиции по данным из [3, 6, 11] отвечают кривые I (вольфрам ($q = 1$)), II (медь ($q = 2$)), которым соответствуют следующие значения констант материалов:

$$\begin{aligned} H_1 &= 413 \text{ ГПа}, & \mu_1 &= 159 \text{ ГПа}, & \sigma_{01} &= 0,36 \text{ ГПа}, & \vartheta'_1 &= 0,0069, \\ H_2 &= 123 \text{ ГПа}, & \mu_2 &= 18,1 \text{ ГПа}, & \sigma_{02} &= 0,038 \text{ ГПа}, & \vartheta'_2 &= 0,038. \end{aligned}$$

Согласно (1.1) принято также $\tau_0^{(q)} = \sigma_{0q}/2$ ($q = 1, 2$), где σ_{0q} — предел упругости q -го компонента при растяжении.

Зависимостям между напряжениями и деформациями для композиции с различным объемным содержанием вольфрама отвечают кривые 1—5 ($c_1 = 0,666; 0,582; 0,512; 0,464; 0,412$), сплошные линии — расчет по предложенной схеме, штриховые — экспериментальные данные [3]. При вычислении значений параметров v_{q1}, v_{q2}, ψ_q ($q = 1, 2$) число независимых ориентаций зерен в пределах первого кристаллографического треугольника выбиралось равным 91.

При общем достаточно хорошем совпадении теоретических и экспериментальных кривых наблюдающиеся на рис. 2 отклонения расчетных значений напряжений от экспериментальных для $c_1 > 0,5$ в сторону их снижения и для $c_1 < 0,5$ в сторону их повышения объясняются, по-видимому, заниженными значениями параметров $\sigma_{01}, \vartheta'_1$ вольфрама и завышенными параметрами $\sigma_{02}, \vartheta'_2$ меди в [6, 11] по отношению к материалам композиции в [3], где отсутствуют эти характеристики компонентов.

На рис. 2 представлены зависимости безразмерного пластического модуля линейного упрочнения $M_* = \frac{\mu_* \mu_0^{-1}}{m_0}$ при полной пластичности одной и двух (кривые 1 и 2) составляющих композиции от объемной концентрации вольфрама.

Проанализируем результаты. Из соотношения (3.3) вытекает, что макроскопический предел упругости композита определяется пределом упругости меди в смеси $\langle \sigma_{11} \rangle_0 = \sigma_{02}/m_2^0$, имеющим следующие значения для кривых 1—5 на рис. 1: 5,3; 5,52; 5,18; 4,97; 4,79 ГПа · 10². Следующая за упругой стадия интенсивного упрочнения ($E \approx 0,05—0,25$ %) характеризуется неполной пластичностью меди и упругодеформируемым вольфрамом. При этом для постоянного состава композиции пластический модуль линейно падает с ростом концентраций v_{22} , а при различных объемных содержаниях компонен-

тов также линейно уменьшается с увеличением концентрации меди c_2 . На участке $E \approx 0,25-0,5\%$ (см. рис. 1) (полная пластичность меди при упругом вольфраме) H_* пропорционален концентрации упругой фазы (кривая 1 на рис. 2). Стадия деформирования композита, соответствующая началу пластичности вольфрама ($E \approx 0,5-1,25\%$), характеризуется плавным уменьшением пластического модуля до величины, соответствующей линейному упрочнению материала при полной пластичности обеих составляющих (кривая 2 на рис. 2). При расчетных концентрациях вольфрама для кривых 1—5 на рис. 1 он слабо зависит от значения c_1 и близок к H_* вольфрама.

Заметим, что поскольку макроскопическое реологическое уравнение композита в данной модели получено при использовании самосогласованной схемы осреднения, то оно может быть применимо в достаточно широком диапазоне изменения объемных концентраций компонентов и их упругих модулей, включая поры и жесткие фазы [10]. Введение же гипотезы [8] о равенстве пластических сдвигов в активных системах скольжения пластического зерна обосновано лишь для материалов, имеющих число независимых систем скольжения в кристаллах $n = 5$ (т. е. ГЦК- и ОЦК-кристаллы) [4], что и определяет область применимости данной модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. Макарова И. С., Сараев Л. А. К теории малых упругопластических деформаций хаотически армированных композитов // ПМТФ.— 1991.— № 5.
2. Хорошун Л. П., Вецало Ю. А. К теории эффективных свойств идеально пластических композитных материалов // Прикл. механика.— 1987.— № 1.
3. Крок Р. Неорганические порошковые композиции // Современные композиционные материалы/Под ред. Л. Браутмана и Р. Крока.— М.: Мир, 1970.
4. Волоховская О. А., Подалков В. В. О пластическом деформировании изотропно упрочняющегося поликристаллического материала // ПМТФ.— 1991.— № 5.
5. Talor G. I. Plastic strain in metals // J. Inst. Metals.— 1938.— V. 62, N 1.
6. Хоникомб Р. Пластическая деформация металлов.— М.: Мир, 1970.
7. Волоховская О. А., Подалков В. В. Об упругопластическом поведении материала с учетом микронеоднородности // ПМТФ.— 1981.— № 6.
8. Chiang C. R., Weng G. J. Transition of plastic behavior from single crystal to polycrystal under pure tension and the effect of multislip // Trans. ASME. J. Engng Mater. Technol.— 1984.— V. 106, N 4.
9. Михель А. Н., Салганик Р. Л., Христианович С. А. Теоретическое описание запаздывания пластического деформирования сталей // Пластичность и разрушение твердых тел.— М.: Наука, 1988.
10. Шермергор Т. Д. Теория упругости микронеоднородных сред.— М.: Наука, 1977.
11. Свойства элементов: Справочник. Ч. 1. Физические свойства/Под ред. Г. В. Самсонова.— М.: Металлургия, 1976.

г. Москва

Поступила 25/VI 1992 г.,
в окончательном варианте — 12/XI 1992 г.

УДК. 539.3

А. Г. Колпаков

КОНСТРУКЦИИ МАЛОГО ДИАМЕТРА С ВНУТРЕННИМИ ОДНОСТОРОННИМИ КОНТАКТАМИ

Проведено построение формального асимптотического разложения [1] для задачи о контактирующих упругих телах в области малого диаметра ϵ . Предельный (при $\epsilon \rightarrow 0$) переход дает одномерную задачу. Соответствующие ей уравнения равновесия совпадают с классическими [2, 3]. Определяющие уравнения получаются при помощи решения так называемой ячейочной задачи на ячейке периодичности структуры. Рассматриваемая задача может быть использована при исследовании, в частности, текстильных материалов [4].

© А. Г. Колпаков, 1994