

УДК 539.371

DOI: 10.15372/PMTF202215146

ИЗГИБНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ФЕРРОГЕЛЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Д. Н. Чириков

Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина,
Екатеринбург, Россия
E-mail: d.n.chirikov@urfu.ru

Предложена модель статических поперечных упругих деформаций образца магнитного геля, имеющего форму сильно вытянутого цилиндра, находящегося под действием поперечного однородного магнитного поля и силы тяжести. Теоретические результаты, полученные в рамках предложенной модели, качественно согласуются с результатами лабораторных экспериментов.

Ключевые слова: феррогель, изгибная деформация, магнитное поле

Введение. Феррогели — многофункциональные композитные материалы нового типа, состоящие из полимерной несущей среды и внедренных в нее магнитных микро- или наноразмерных частиц [1–5]. Эти материалы сочетают магнитные свойства с высокой эластичностью и вязкоупругостью полимерных сред. С помощью умеренных магнитных полей, создаваемых в лабораторных и натуральных экспериментах, можно существенно менять форму, размер, механические свойства и поведение образцов указанных материалов. Это, в свою очередь, позволяет использовать феррогели в качестве многофункциональных интеллектуальных материалов в различных областях промышленности и медико-биологических исследованиях [6–11].

Особенностью образцов феррогелей, имеющих форму длинных тонких полос или цилиндрических жгутов, является их способность статически изгибаться под действием магнитного поля, а также совершать поступательное змееобразное движение под действием переменного поля [12]. Для применения феррогелей требуется создание теоретических моделей их поведения во внешних магнитных полях. Следует отметить, что ползущее змееобразное движение длинного образца феррогеля под действием пространственно неоднородного магнитного поля экспериментально исследовалось в работах [13, 14], в [15] предложена теоретическая модель этого движения.

Одним из направлений применения феррогелей является создание мягких микророботов и актуаторов. В этом случае один конец образца феррогеля закрепляется в немагнитной среде, а сам образец располагается перпендикулярно действующему магнитному полю. В работе [15] рассматривалась задача о динамическом поведении магнитного стержня с одним закрепленным концом под действием переменного внешнего поля. Анализ проводился в линейном приближении по поперечным деформациям стержня.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 20-12-00031).

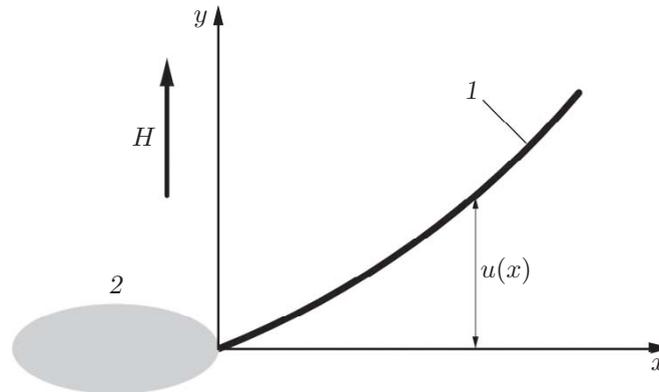


Рис. 1. Схема нагружения образца:
1 — магнитный гель, 2 — немагнитная среда

В данной работе задача об изгибной деформации магнитного жгута под действием однородного статического поперечного магнитного поля рассматривается в нелинейной постановке. Целью работы является создание простой математической модели, количественно описывающей деформацию рассматриваемых образцов феррогелей.

1. Физическая модель и основные приближения. Рассмотрим длинный образец феррогеля, один конец которого закреплен в немагнитной среде. Система расположена на горизонтальной подложке (лабораторном столе) и помещена в однородное вертикальное магнитное поле (рис. 1). Предполагается, что образец имеет форму сильно вытянутого цилиндра с круговым сечением. Обобщение на случай другой формы (например, тонкой полосы) требует проведения более громоздких вычислений.

Выражение для свободной энергии изогнутого упругого стержня можно представить в виде

$$F = F_{el} + F_g + F_m.$$

Здесь F_{el} , F_g — упругая свободная и гравитационная свободная энергия стержня соответственно; F_m — магнитная свободная энергия.

Обозначим через R радиус стержня, через L — его длину. Предполагается, что выполняется неравенство $R \ll L$. Первоначально стержень расположен горизонтально (лежит на столе). Введем следующие безразмерные величины:

$$\lambda = \frac{l}{L}, \quad X = \frac{x}{L}, \quad U = \frac{u}{L}, \quad q = \frac{4\rho g L^3}{ER^2}, \quad \varkappa = \frac{4\mu_0 \chi^2 H^2 L^2}{ER^2(2 + \chi)}.$$

Здесь E — модуль Юнга материала, из которого изготовлен стержень; ρ — массовая плотность образца; g — ускорение свободного падения; χ — начальная (в нулевом поле) магнитная восприимчивость феррогеля; $u(x)$ — вертикальное смещение участка образца по координате x ; l — координата вдоль оси стержня; μ_0 — магнитная постоянная; H — напряженность внешнего магнитного поля.

При поперечной деформации упругую энергию образца можно представить в виде интеграла по его длине [16]:

$$F_{el} = \frac{EI}{2L} \int_0^1 (U'')^2 d\lambda \quad (1)$$

($I = \pi R^4/4$ — момент инерции сечения стержня относительно горизонтальной оси x ; $d\lambda = dl/L$ — безразмерный элемент длины стержня (см. рис. 1); штрих означает производную по безразмерной координате X).

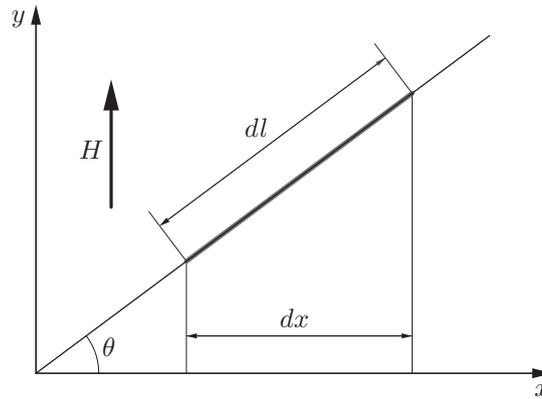


Рис. 2. Схема бесконечно малого участка цилиндрического образца

Выражение для гравитационной свободной энергии образца имеет вид

$$F_g = \pi R^2 L^2 \rho g \int_0^1 U d\lambda. \quad (2)$$

При оценке магнитной свободной энергии F_m будем полагать, что величина напряженности магнитного поля H невелика и выполняется линейный закон намагниченности ферромагнетика.

Рассмотрим участок цилиндрического образца, показанный на рис. 2. В первом приближении на этом участке будем пренебрегать магнитным полем, создаваемым другими участками образца; сам участок рассматривается как сильно вытянутый цилиндр, находящийся во внешнем магнитном поле с напряженностью H . В этом приближении магнитная свободная энергия образца может быть оценена следующим образом [17]:

$$F_m = -\frac{\pi \mu_0 H R^2}{2} \int_0^L M_y dl. \quad (3)$$

Здесь μ_0 — абсолютная магнитная проницаемость вакуума; M_y — проекция намагниченности стержня на вертикальную ось y .

Разложим величину M_y на две составляющие: параллельную M_{\parallel} и перпендикулярную M_{\perp} рассматриваемому участку образца:

$$M_y = M_{\parallel} \sin \theta + M_{\perp} \cos \theta \quad (4)$$

(θ — угол отклонения участка образца от оси x (см. рис. 2)).

Учитывая, что размагничивающий фактор вытянутого цилиндра, направление которого совпадает с направлением его оси, практически равен нулю, можно записать следующие соотношения:

$$M_{\parallel} = \chi H_{\parallel}^{(i)}, \quad H_{\parallel}^{(i)} = H \sin \theta, \quad M_{\parallel} = \chi H \sin \theta.$$

Здесь $H^{(i)}$ — напряженность магнитного поля внутри рассматриваемого участка образца.

Аналогичным образом, учитывая, что размагничивающий фактор вытянутого цилиндра, направление которого перпендикулярно направлению его оси, равен $1/2$, получаем [17]

$$M_{\perp} = \frac{2\chi H \cos \theta}{2 + \chi}.$$

Таким образом, соотношение (4) можно записать в виде

$$M_y = \chi H \left(\frac{2 \cos^2 \theta}{2 + \chi} + \sin^2 \theta \right) = \frac{\chi H (2 + \chi \sin^2 \theta)}{2 + \chi}. \quad (5)$$

Подставляя (5) в (3), используя известное тригонометрическое тождество $\sin^2 \theta = \operatorname{tg}^2 \theta / (1 + \operatorname{tg}^2 \theta)$ и учитывая, что $\operatorname{tg} \theta = \partial U / \partial X$, получаем выражение для магнитной свободной энергии

$$F_m = -\frac{\pi \varkappa E R^4}{4 \chi L} \int_0^1 \left(1 + \frac{\chi}{2} \frac{(U')^2}{1 + (U')^2} \right) d\lambda. \quad (6)$$

Заметим, что аналогичное выражение для магнитной энергии использовалось в работе [15].

Объединяя уравнения (1), (2), (6), получаем явное выражение для полной свободной энергии F . При малых прогибах U в интегралах (1), (2), (6) можно заменить величину $d\lambda$ на dX [16] и записать выражение для энергии F в виде

$$F = \frac{EI}{L} \int_0^1 \left(\frac{(U'')^2}{2} + qU - \frac{\varkappa}{\chi} - \frac{\varkappa}{2} \frac{(U')^2}{1 + (U')^2} \right) dX.$$

Равновесный изгиб образца должен соответствовать минимуму свободной энергии F как функционала от $U(X)$, т. е. должно выполняться вариационное условие $\delta F = 0$.

Далее будем учитывать, что левая часть стержня закреплена, поэтому при $X = 0$ выполняются условия [16]

$$U(0) = 0, \quad \delta U(0) = 0, \quad U'(0) = 0, \quad \delta U'(0) = 0. \quad (7)$$

Рассмотрим вариации трех составляющих (упругой, гравитационной и магнитной) свободной энергии F по отдельности. Вариацию упругой свободной энергии F_{el} можно получить из (1), заменив $d\lambda$ на dX :

$$\delta F_{el} = \frac{EI}{2L} \int_0^1 \{ [(U + \delta U)']^2 - (U')^2 \} dX \approx \frac{EI}{L} \int_0^1 U'' \delta U'' dX. \quad (8)$$

Здесь используется классическое линейное приближение теории упругости по δU . Интегрируя (8) по частям, в результате преобразований имеем

$$\delta F_{el} = \frac{EI}{L} \left(U'' \delta U' \Big|_0^1 - U''' \delta U \Big|_0^1 + \int_0^1 U^{IV} \delta U dX \right). \quad (9)$$

Вариация гравитационного члена равна

$$\delta F_g = \frac{EIq}{L} \int_0^1 \delta U dX. \quad (10)$$

Вариацию магнитной свободной энергии можно записать следующим образом:

$$\delta F_m = -\frac{EI\varkappa}{2L} \delta \left(\int_0^1 \frac{(U')^2}{1 + (U')^2} dX \right) = -\frac{EI\varkappa}{2L} \int_0^1 \frac{U' \delta U'}{[1 + (U')^2]^2} dX. \quad (11)$$

Интегрируя (11) по частям, получаем

$$\delta F_m = \frac{EI}{L} \left(\int_0^1 \varkappa U'' \frac{1 - 3(U')^2}{[1 + (U')^2]^3} \delta U dX - \frac{\varkappa U' \delta U}{[1 + (U')^2]^2} \Big|_0^1 \right). \quad (12)$$

Суммируя (9), (10), (12), получаем

$$\begin{aligned} \frac{L}{EI} \delta F = \frac{L}{EI} (\delta F_{el} + \delta F_g + \delta F_m) = \int_0^1 \left\{ U^{IV} + q + \varkappa U'' \frac{1 - 3(U')^2}{[1 + (U')^2]^3} \right\} \delta U dX + \\ + U'' \delta U' \Big|_0^1 - \left\{ U''' + \frac{\varkappa U'}{[1 + (U')^2]^2} \right\} \delta U \Big|_0^1 = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Поскольку величина δU является малой, но произвольной вариацией, каждый член в фигурных скобках в уравнении (13) должен быть равен нулю. Интегральный член равен нулю при любом значении δU , если выполнено условие

$$U^{IV} + q + \varkappa U'' \frac{1 - 3(U')^2}{[1 + (U')^2]^3} = 0. \quad (14)$$

Соотношение (14) является дифференциальным уравнением относительно функции $U(X)$. Заметим, что подобное уравнение, но в линейном по деформациям приближении получено в [15].

Первое и третье равенства в (7) являются двумя граничными условиями уравнения (14). Третье и четвертое граничные условия получаются из условий равенства нулю второго и третьего членов в правой части (13) с учетом того, что правый конец образца свободен. Следовательно, при $X = 1$ имеем равенства $U''' + \varkappa U' [1 + (U')^2]^{-2} = 0$, $U'' = 0$. Таким образом, граничные условия уравнения (14) имеют вид

$$U(0) = 0, \quad U'(0) = 0, \quad U''(1) = 0, \quad U'''(1) + \frac{\varkappa U'(1)}{\{1 + [U'(1)]^2\}^2} = 0. \quad (15)$$

Физический смысл последнего граничного условия (15) заключается в балансе магнитных и упругих сил на свободном конце стержня. Следует отметить, что аналогичное условие, но в линейном по деформациям приближении использовалось в работе [15].

Рассматривается случай, когда образец лежит на горизонтальной подложке, которая в явном виде отсутствует в описанной модели. Для того чтобы учесть наличие подложки в случае, когда решение задачи (14), (15) $U < 0$, положим $U = 0$.

Уравнение (14) с граничными условиями (15) решалось численно.

2. Результаты исследования. В расчетах использовались следующие характеристики материала и размеры стержня: магнитная восприимчивость $\chi = 5$, модуль Юнга $E = 188,97$ кПа, длина деформируемого стержня $L = 2,98$ см, его радиус $R = 0,4$ см.

На рис. 3 представлены результаты численного решения нелинейного дифференциального уравнения (14) с граничными условиями (15) при различных значениях напряженности магнитного поля H .

На рис. 4 приведены численные решения задачи (14), (15) и результаты лабораторных экспериментов, предоставленных М. Лопец-Лопецом (университет Гранады (Испания)).

Несмотря на принятые упрощения, результаты расчетов по предложенной модели количественно согласуются с экспериментальными данными.

Результаты экспериментов показывают, что если напряженность H магнитного поля больше порогового значения, то магнитная сила преобладает над гравитационной и

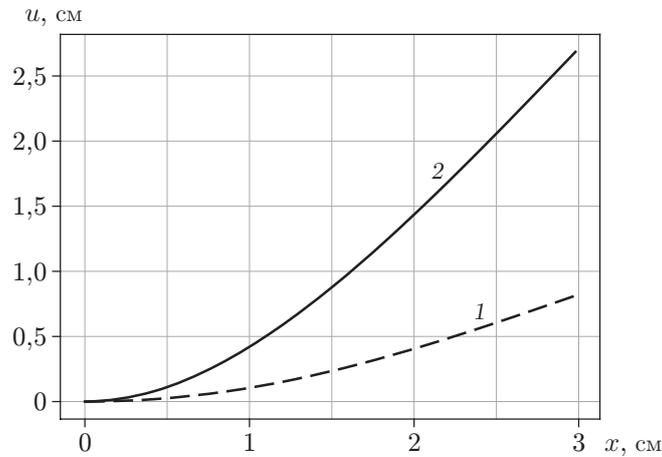


Рис. 3. Форма стержня при различных значениях напряженности магнитного поля:

1 — $H = 30$ кА/м, 2 — $H = 55$ кА/м

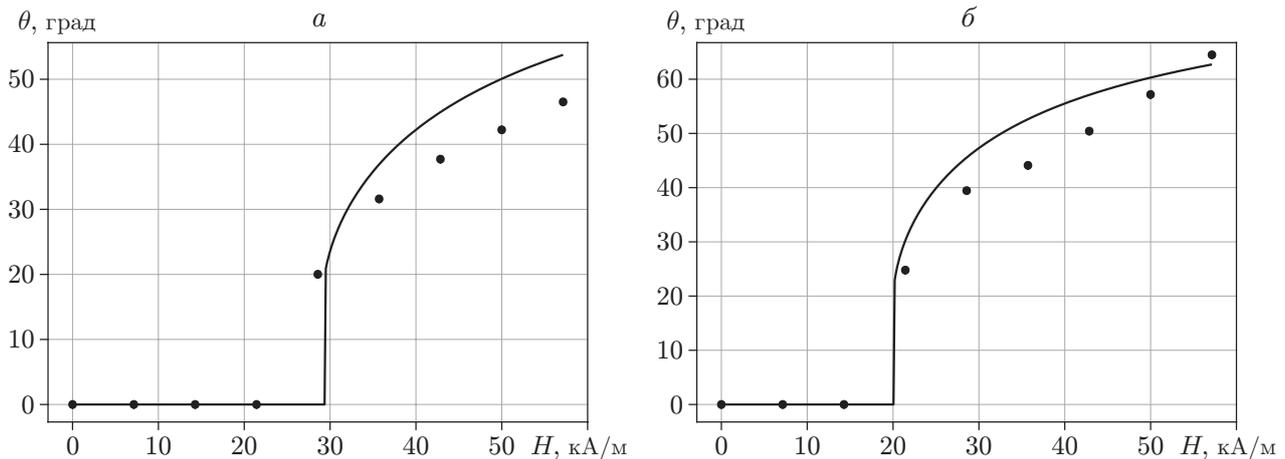


Рис. 4. Зависимость угла θ отклонения свободного конца ($X = 1$) образца от напряженности магнитного поля H :

a — $\chi = 5$, $L = 2,98$ см, $R = 0,4$ см, $б$ — $\chi = 8$, $L = 2,73$ см, $R = 0,35$ см; сплошная линия — результаты численных расчетов, точки — результаты лабораторных экспериментов

происходит изгиб магнитного стержня на конечную величину. В противоположном случае доминирует гравитационная сила и стержень неподвижно лежит на столе, т. е. $U = 0$ при любом X . Поэтому в данной работе анализ деформирования стержня под действием магнитного поля был проведен в нелинейном по деформации приближении.

Результаты расчетов, приведенные на рис. 5, показывают, что величина H_{cr} уменьшается с увеличением длины стержня L .

Заключение. В работе предложена математическая модель стационарной поперечной деформации образца феррогеля, имеющего форму вытянутого цилиндра с одним закрепленным концом, лежащего на горизонтальной подложке и находящегося под действием однородного вертикального магнитного поля.

Результаты показывают, что если напряженность магнитного поля меньше некоторого критического значения, то гравитационные силы доминируют над магнитными и неде-

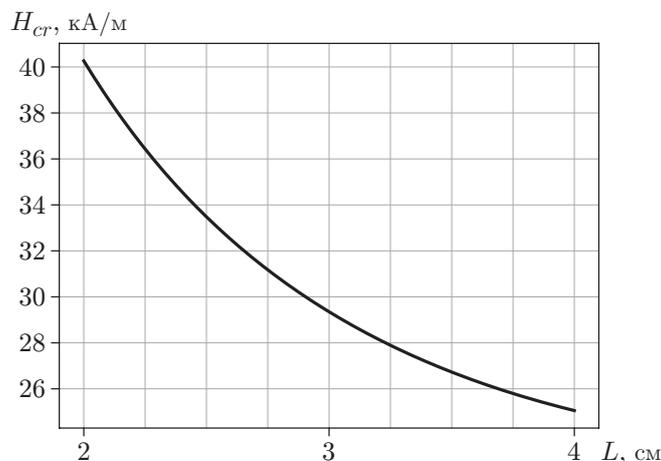


Рис. 5. Зависимость порогового значения напряженности магнитного поля H_{cr} от длины стержня L

формированный образец неподвижно лежит на горизонтальной подложке. Однако, в случае если напряженность поля превышает некоторое критическое значение, образец испытывает конечную изгибную деформацию.

Полученные теоретические результаты количественно согласуются с экспериментальными данными, предоставленными М. Лопец-Лопецом.

Автор выражает благодарность М. Лопец-Лопецу за предоставленные результаты лабораторных экспериментов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Lopez-Lopez M. T., Duran J. D. G., Iskakova L. Yu., Zubarev A. Yu.** Mechanics of magnetopolymer composites: A review // *J. Nanofluids*. 2016. V. 5, N 4. P. 479–495.
2. **Weeber R., Hermes M., Schmidt A. M., Holm C.** Polymer architecture of magnetic gels: a review // *J. Phys.: Condens. Matter*. 2018. V. 30. 063002.
3. **Messing R., Frickel N., Belkoura L., et al.** Cobalt ferrite nanoparticles as multifunctional cross-linkers in PAAm ferrohydrogels // *Macromolecules*. 2011. V. 44. P. 2990–2999.
4. **Ng P.** Stimuli-responsive hydrogels cross-linked by magnetic nanoparticles // *Soft Matter*. 2013. V. 9. P. 3465–3468.
5. **Bonhome-Espinosa A. B., Campos F., Rodriguez I. A., et al.** Effect of particle concentration on the microstructural and macromechanical properties of biocompatible magnetic hydrogels // *Soft Matter*. 2017. V. 13. P. 2928–2941.
6. **Lopez-Lopez M. T., Scionti G., Oliveira A. C., et al.** Generation and characterization of novel magnetic field-responsive biomaterials // *PLoS ONE*. 2015. V. 10, N 7. e0133878.
7. **Wu J., Gong X., Fan Y., Xia H.** Physically crosslinked poly (vinyl alcohol) hydrogels with magnetic field controlled modulus // *Soft Matter*. 2011. V. 7. P. 6205–6212.
8. **Ramanujan R. V., Lao L. L.** The mechanical behavior of smart magnet — hydrogel composites // *Smart Materials Structures*. 2006. V. 15. P. 952–956.
9. **Zhao X., Kim J., Cezar C. A., et al.** Active scaffolds for on-demand drug and cell delivery // *Proc. Nat. Acad. Sci.* 2011. V. 108. P. 67–72.
10. **Injectable hydrogels for regenerative engineering** / Ed. by L. S. Nair. L.: Imperial College Press, 2016.

11. **Mitsumata T., Honda A., Kanazawa H., Kawai M.** Magnetically tunable elasticity for magnetic hydrogels consisting of carrageenan and carbonyl iron particles // *J. Phys. Chem. B*. 2012. V. 116. P. 12341–12348.
12. **Hu W., Lum G. Z., Mastrangeli M., Sitti M.** Small-scale soft-bodied robot with multimodal locomotion // *Nature*. 2018. V. 554. P. 81–85.
13. **Zimmermann K., Naletova V. A., Zeidis I., et al.** A deformable magnetizable worm in a magnetic field — a prototype of a mobile crawling robot // *J. Magnetism Magnet. Materials*. 2007. V. 311, N 1. P. 450–453.
14. **Калмыков С. А., Налетова В. А., Турков В. А.** Движение тонкого тела из намагничивающегося композита в “бегущем” магнитном поле // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа*. 2013. № 1. С. 6–16.
15. **Cebers A.** Flexible magnetic swimmer // *Magneto hydrodynamics*. 2005. V. 41, N 1. P. 63–72.
16. **Ландау Л. Д.** Теоретическая физика: В 10 т. Т. 7. Теория упругости / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Физматлит, 2003.
17. **Ландау Л. Д.** Теоретическая физика: В 10 т. Т. 8. Электродинамика сплошных сред / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Физматлит, 2005.

*Поступила в редакцию 1/VI 2022 г.,
после доработки — 8/VIII 2022 г.
Принята к публикации 26/IX 2022 г.*
