ПМТФ, № 6, 1963

О ТУРБУЛЕНТНОЙ ДИФФУЗИИ СЛАБОИОНИЗОВАННОЙ ЗАМАГНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЫ

Г. М. Заславский, С. С. Моисеев, В. Н. Ораевский

(*Новосибирск*)

Известно, что учет конечной проводимости и теплопроводности может привести к неустойчивости [1–4]. При этом особую роль играют ветви колебаний, фазовая скорость которых совпадает с дрейфовой скоростью плазмы в магнитном поле за счет градиентов давлений — «дрейфовые волны» (см., например, [1]). Детальное исследование аномалий в явлениях переноса, возникающих из-за неустойчивостей, встречает большие трудности. Одной из них является трудность, характерная для гидродинамического описания плазмы и связанная с тем, что инкремент развития неустойчивости больше или порядка частоты. Это обстоятельство не позволяет воспользоваться квазилинейным приближением [5] и кинетическим уравнением для волн [6]. Настоящая работа посвящена исследованию аномальной диффузии слабоионизованной плазмы в сильном магнитном поле. При этом оказывается [3], что в ряде случаев инкремент развития неустойчивости много меньше частоты. Это обстоятельство позволяет дать более корректный вывод коэффициента диффузии.

1. Введем следующие предположения: 1) температура ионов мала по сравнению с температурой электронов ($T_i \ll T_e$, индекс i нумерует ионы, индекс e — электроны, 0 — нейтральный газ); 2) квазинейтральность плазмы ($n_i = n_e = n$, $\delta n_i = \delta n_e$; под δa подразумевается возмущение величины a); 3) потенциальность возмущений ($\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$); 4) температура электронов постоянна.

Наряду со столкновениями электронов и ионов с нейтральным газом будем учитывать также электрон-ионные столкновения для сравнения результатов со случаем полностью ионизованной плазмы. Система уравнений двухжидкостной гидродинамики и уравнений Максвелла в сделанных предположениях принимает вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} n\mathbf{v}_e = 0$$

$$en\mathbf{E} + \frac{en}{c}\mathbf{v}_e \times \mathbf{H} + \nabla P_e - \frac{en}{\sigma}(\mathbf{j}_\parallel + 2\mathbf{j}_\perp) + mn\nu_{e0}\mathbf{v}_e = 0 \qquad (1.1)$$

$$Mn\left(\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + (\mathbf{v}_i \cdot \nabla)\mathbf{v}_i\right) = en\mathbf{E} + \frac{en}{c}\mathbf{v}_i \times \mathbf{H} - Mn\nu_{i0}\mathbf{v}_i$$

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$$

Здесь m и M — соответственно масса электронов и ионов; $j_\parallel$, $j_\perp$ — токи вдоль и поперек магнитного поля; ν_{e0}, ν_{i0} — частоты столкновений электронов и ионов с нейтральным газом; σ — проводимость вдоль H за счет электрон-ионных столкновений.

Выбирем возмущения в следующем виде:

$$\delta a \sim \delta a\,(x)\exp i\,(yk_y + zk_z + \omega t)$$

(неоднородность вдоль оси x, магнитное поле направлено вдоль z).

Тогда линеаризуя систему (1.1), получаем, пренебрегая членами порядка $\sqrt{m / M}$, следующее уравнение:

$$\frac{d^2}{dx^2}\,\delta E_y - k_y^2\left\{1 + \frac{\omega_s}{i\omega + \nu_{i0}}\left[a - i\frac{k_z^2 v_e^2}{\omega\nu_e} - i\frac{k_z^2 v_i^2}{\omega(i\omega + \nu_{i0})}\right]^{-1} \times\right.$$

$$\left.\times\left(1 - \frac{\omega_e}{\omega} - i\frac{k_z^2 v_i^2}{\omega(i\omega + \nu_{0i})}\right)\right\}\delta E_y = 0 \qquad (1.2)$$

Здесь ν_e — частота столкновения электронов с ионами

$$\omega_s = \frac{k_z^2}{k_y^2}\frac{\Omega_i^2}{\nu_e}\frac{M}{m}, \quad \Omega_i = \frac{eH}{mc}, \quad v_i^2 = \frac{T_e}{M}, \quad v_e^2 = \frac{T_e}{m}$$

$$a = 1 + \frac{\nu_{0e}}{\nu_e}, \quad \omega_e = \frac{cT_e}{eH}\frac{n'}{n}k_y, \quad n' = \frac{dn}{dx} \qquad (1.3)$$

Анализ уравнения (1.2), имеющего вид уравнения Шредингера с комплексным потенциалом V, вполне аналогичен анализу, проведенному, например, в [7]. В случае сильноионизованной плазмы при $\omega_s \ll \omega$ из (1.2) следует, что в ВКБ-приближении $k_x \sim k_y$ и качественно правильный результат получается из условия $V \approx 0$

$$1 - \frac{\omega_e}{\omega} - \frac{k_z^2 v_i^2}{\omega^2} + i\frac{\omega}{\omega_s}\left(1 - \frac{k_z^2 v_i^2}{\omega^2}\right) = 0 \qquad (1.4)$$

При этом учитываем, что

$$k_\perp r_i \ll 1 \qquad \left(k_\perp^2 = k_x^2 + k_y^2, \quad r_i = \frac{v_i}{\Omega_i}\right)$$

Для нарастающих ионно-звуковых колебаний из (1.4) имеем

$$\operatorname{Re}\omega \sim k_z v_i, \qquad \operatorname{Im}\omega \sim -\frac{\omega_s\omega_e}{k_z v_i} \qquad (1.5)$$

Если $\omega_s \gg \omega$, то $k_x^2 \sim k_y^2\omega_s / \omega$, а собственные частоты находятся из условия $\operatorname{Im} V = 0$, $\operatorname{Re} V = k_x^2$. Это дает для ионно-звуковых колебаний

$$\operatorname{Im}\omega \approx -\omega_e$$

В случае $\omega_e \gg k_z v_i$ получаем результат работы [3]

$$\operatorname{Re}\omega \sim -\operatorname{Im}\omega \sim \omega_e$$

Перейдем теперь к слабоионизованной плазме.
Учитывая неравенство из (1.2), имеем ($\nu_{0i} \gg \nu_e m / M$)

$$\frac{d^2}{dx^2}\;y - k_y^2\left\{1 + \frac{\omega_s\left[1 - \omega_e / \omega - ik_z^2 v_i^2 / \omega(i\omega + \nu_{0i})\right]}{(i\omega + \nu_{0i})(a - ik_z^2 v_e^2 / \omega\nu_e)}\right\}\delta E_y = 0 \qquad (1.6)$$

Для $\nu_{0i} \gg \omega$ получаем из (1.6) дисперсионное уравнение

$$\omega^2 - i\omega\left\{\nu_{0i} + \frac{k_z^2 v_e^2}{\nu_{0e}} + \Omega_s - \Omega_s\frac{k_z^2 v_i^2}{\nu_{0i}^2}\right\} - \left\{\frac{k_z^2 v_e^2 \nu_{0i}}{\nu_{0e}} - i\Omega_s\omega_e + \Omega_s\frac{k_z^2 v_i^2}{\nu_{0i}}\right\} = 0 \qquad (1.7)$$

$$\Omega_s = \left(\frac{k_z}{k_\perp}\right)^2\frac{\Omega_i^2}{\nu_{0e}}\frac{M}{m}$$

Если $\omega_s \gg \nu_{0i}$, то ограничиваясь случаем

$$k_\perp^2 r_i^2 \ll 1, \quad k_z v_i \ll \nu_{0i} \quad \left(k_x^2 \sim k_y^2 \frac{s}{\nu_{0i}}\right) \tag{1.8}$$

Для неустойчивого корня уравнения (1.7) получим

$$\omega = \frac{1}{2}\left\{\omega_e - i\frac{\omega_e^2}{4\nu_{0i}} + i\frac{k_z^2 v_e^2}{\nu_{0e}}\right\} \tag{1.9}$$

Из (1.7) и (1.9) видно, что продольное движение частиц стабилизирует неустойчивость.

В случае $\omega_s \ll \nu_{0i}$, $k_\perp^2 r_i^2 < 1$, из (1.7) получаем

$$\mathrm{Re}\,\omega = \frac{\Omega_s \omega_e}{\nu_{0i}}, \quad \mathrm{Im}\,\omega = \frac{k_z^2 v_e^2}{\nu_{0e}} - \frac{\Omega_s^2 \omega_e^2}{\nu_{0i}^3} \tag{1.10}$$

Из последнего равенства имеем условие неустойчивости

$$\frac{\Omega_s^2\,\omega_e^2}{\nu_{0i}^3} > \frac{k_z^2 v_e^2}{\nu_{0e}} \tag{1.11}$$

Для максимального инкремента ($\Omega_s \lessapprox \nu_{0i}$), учитывая также, что радиус плазменного шнура определяется классической диффузией (если только он не поддерживается заданным в силу условий эксперимента) из (1.11), получим следующее условие неустойчивости:

$$\Omega_i^2 > \nu_{0i}^2 \sqrt{\frac{m}{M}}\,\frac{L_\parallel^2}{l_e^2}\,\frac{\sigma_{0i}}{\sigma_{0e}} \tag{1.12}$$

где l_e — длина свободного пробега электронов, а $L_\parallel$ — продольный размер системы, σ_{0i}, σ_{0e} — соответственно эффективные сечения соударений ионов и электронов с нейтралами.

2. Из проведенного выше анализа видно, что в рассматриваемых случаях возникающие неустойчивости носят колебательный характер, т. е. $\mathrm{Im}\,\omega \ll \mathrm{Re}\,\omega$. Поэтому для оценки коэффициента диффузии можно распространить квазилинейный метод на случай гидродинамического описания плазмы, а также воспользоваться кинетическим уравнением для волн.

Для простоты рассмотрим случай, соответствующий решению (1.11), когда стабилизирующие факторы малы. Тогда из уравнений (1.1), пренебрегая нелинейными членами, содержащими малый параметр ω / Ω_i, можно получить следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial(n_0+\delta n)}{\partial t} + \frac{c}{H}\frac{\partial n_0}{\partial x}\delta E_y = -\frac{c}{H}\frac{\partial}{\partial x}(\delta n \delta E_y) + \frac{c}{H}\frac{\partial}{\partial y}(\delta n\cdot\delta E_x) - \tag{2.1}$$

$$-\frac{\tau}{H\Omega_i}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu_{0i}\right)\left(\frac{\partial \delta E_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta E_y}{\partial y}\right) - \frac{\tau T}{m}\frac{\partial^2 \delta n}{\partial z^2} - \frac{e n_0 \tau}{m}\frac{\partial \delta E_z}{\partial z} =$$

$$= \frac{\tau_e}{m}\frac{\partial}{\partial z}(\delta n\cdot\delta E_z) + \frac{c\nu_{0i}}{H\Omega_i}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\delta n \delta E_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\delta n\cdot\delta E_y)\right] \tag{2.2}$$

Здесь

$$\delta \mathbf{E} = \sum_k E_k e^{i(kr+\omega t)} + \mathrm{const}, \qquad \delta n = \sum_k \delta n_k e^{i(kr+\omega t)} + \mathrm{const} \tag{2.3}$$

Усредняя уравнение (2.1) по быстрым осцилляциям, получаем

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\sum_k c^2 \frac{|E_{ky}|^2}{H^2} \frac{\nu_k}{\omega^2} \frac{\partial n_0}{\partial x}\right\} \tag{2.4}$$

При получении уравнения (2.4) необходимо учитывать нелинейные члены до четвертого порядка по E_k. В квазистационарном режиме они выражаются при помощи кинетического уравнения для волн через члены, квадратичные по E_k. Поэтому в уравнении (2.4) под ν_k следует понимать инкремент, взятый из линейной теории (влияние нелинейных членов на величину инкремента ν_k в рассматриваемом случае пренебрежимо мало).

Уравнение (2.4) необходимо дополнить кинетическим уравнением для волн [6]

$$\frac{dN_k}{dt} = \sum_{k',k''} 4\pi |V_{kk'k''}|^2 \{(N_{k'}N_{k''} - N_kN_{k'} -$$

$$- N_kN_{k''})\,\delta_{k'+k'',k}\,\delta(\omega_k - \omega_{k'} - \omega_{k''}) + 2(N_{k'}N_{k''} +$$

$$+ N_kN_{k''} - N_{k'}N_k)\,\delta_{k'',k'+k}\,\delta(\omega_{k''} - \omega_{k'} - \omega_k)\} + 2\nu_kN_k \qquad (N_k = \varepsilon_k / \omega_k) \tag{2.5}$$

где ε_k — спектральная плотность энергии. Нелинейное взаимодействие здесь описывается столкновительным членом, а накачка волн из-за неустойчивости учитывается как

$$\left(\frac{dN_k}{dt}\right)^* = 2\nu_kN_k$$

При выводе (2.5) считалось, что законы сохранения квазиэнергии ω_k и квзаимпульса k можно выполнить уже для взаимодействия трех волн (так называемые распадные условия). Нетрудно видеть, что в рассматриваемом нами случае распадные условия выполняются.

Используя (2.5) и оценку матричного элемента (см. приложение)

$$V_{kk'k''} \approx i\frac{c\omega_k}{Hk_y}\left(\frac{8\pi\omega_{k'}\omega_{k''}[k_z^2 + k_\perp^2(1 + \omega_0^2/\Omega_i^2)]}{\omega_k[k_z'^2 + k_\perp'^2(1+\omega_0^2/\Omega_i^2)]\,[k_z''^2 + k_\perp''^2(1+\omega_0^2/\Omega_i^2)]}\right)^{1/2} \times$$

$$\times \left(\frac{k_y'}{\omega_{k'}} - \frac{k_y''}{\omega_{k''}}\right)(k_x'k_y'' - k_y'k_x'') \tag{2.6}$$

получим

$$c^2\frac{E_k^2}{H^2} \sim \frac{1}{8\pi}\frac{\omega\nu}{k_x^2} \qquad \text{или} \qquad D \sim \frac{1}{8\pi}\frac{\nu^2}{\omega k_x^2} \tag{2.7}$$

Отметим, что аналогичная оценка для коэффициента диффузии D в случае решения (1.9) дает ту же зависимость от ν и ω. Выясним, какие масштабы дают максимальный вклад в диффузии.

Прежде всего отметим, что поскольку в настоящей работе использовалось гидродинамическое приближение, то длина волны λ_z должна быть велика по сравнению с длиной свободного пробега заряженных частиц при соударениях с нейтральным газом. Это накладывает ограничение на рост k_z.

Рассмотрим тот случай, когда при допустимых в гидродинамике k_z частота ω_s может быть как меньше, так и больше ν_{0i}. В случае $\omega_s \ll \nu_{0i}$, используя (2.7), (1.11), а также то, что $k_x \sim k_y$ (см. 1.2), видим, что $D(k)$ растет с ростом k_z и уменьшением k_y. Если $\omega_s \gg \nu_{0i}$, то $k_x^2 \sim k_y^2\omega_s / a\nu_{0i}$ и из (1.9) и (2.7) нетрудно показать, что $D(k)$ растет с ростом k_y и уменьшением k_z, т. е. $D(k)$ достигает максимума, когда $\nu_{0i} \sim \omega_s$. Учитывая это обстоятельство, а также то, что для исследуемых случаев

$$\omega_e \lessgtr \nu_{0i}, \qquad 1/r_i \geqslant k_y \geqslant k_0 \tag{2.8}$$

имеем из (2.7), используя (1.11)

$$D \sim \frac{k_0^2 v_i^2}{\nu_{0i}\Omega_i} \frac{cT_e}{eH} \tag{2.9}$$

Заметим, что $k_0^2 v_i^2 / \nu_{0i}\Omega_i$ по крайней мере не превышает единицы и может быть существенно малой величиной.

3. *Приложение*. Используем уравнения (2.1) и (2.2) для нахождения матричного элемента $V_{kk'k''}$. Следуя [6], величины δE и δn представим в виде

$$\psi = \sum_k c_k(t)(\psi_k + \psi_k')\, e^{i(kr+\omega_k t)} + \sum_k c_{-k}(t)(\psi_{-k} + \psi_{-k}')\, e^{-i(kr+\omega_k t)} \tag{3.1}$$

где

$$c_{k-} = c_k^*, \qquad \psi_{k-} = \psi_k^*$$

В (3.1) к «вектору состояния» ψ_k добавлена ортогональная составляющая ψ_k', которая возникает из-за нелинейного взаимодействия.

Используя (2.1), (2.2) и (3.1), из условия разрешимости системы относительно ψ_k' можно получить динамическое уравнение для амплитуды волны c_k

$$\frac{\partial c_k}{\partial t} = \sum_{k=k'+k''} c_{k'} c_{k''} V_{kk'k''} \exp\left[i(\omega_{k'} + \omega_{k''} - \omega_k)t\right] \tag{3.2}$$

В (3.1) и (3.2) амплитуды c_k нормированы так:

$$|c_k|^2 = \frac{\varepsilon_k}{\omega_k}, \qquad \varepsilon_k = \frac{1}{8\pi}\left\{\left(1 + \frac{\omega_0^2}{\Omega_i^2}\right)k_\perp^2 + k_z^2\right\}\frac{|E_{ky}|^2}{k_y^2}$$

$$\omega_0^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{M} \tag{3.3}$$

Воспользовавшись неравенствами $\omega_s, \omega \ll \nu_{0i}$, $k_0 \leqslant k_y$, получаем выражение (2.4) для величины матричного элемента.

Авторы благодарят Р. З. Сагдеева за ценные советы и обсуждение результатов работы.

Поступила 28 III 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Галеев А. А., Ораевский В. Н., Сагдеев Р. З. Универсальная неустойчивость магнитного удержания плазмы. Препринт ИЯФ СО АН СССР, Новосибирск, 1962.
2. Кадомцев Б. Б. Турбулентная утечка частиц из разряда в сильном магнитном поле. Ж. техн. физ., 1961, 31, 1209.
3. Моисеев С. С., Сагдеев Р. З. О коэффициенте диффузии Бома. ЖЭТФ, 1963, 44, 763.
4. Заславский Г. М., Моисеев С. С. Об аномальной диффузии плазмы в магнитном поле. Препринт ИЯФ СО АН СССР и НГУ, Новосибирск, 1963.
5. Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З., Нелинейные колебания разреженной плазмы. Ядерный синтез, 1961, 1, 82.
6. Галеев А. А., Карпман В. И. Турбулентная теория слабонеравновесной разреженной плазмы. ЖЭТФ, 1963, 44, 592.
7. Галеев А. А., Моисеев С. С., Сагдеев Р. З. Теория устойчивости неоднородной плазмы. Препринт ИЯФ СО АН СССР, Новосибирск, 1963.