Поэтому появление дополнительных членов в краевых условиях 1 и 5 в табл. 2

$$\left(M_{0ns}|_{\Gamma_l \cap \Gamma_{l+1}}\right) f_{lk}(s), \quad |f_{lk}(s)| \leqslant C \exp(-\delta s)$$

имеет то же механическое объяснение, что и для трансверсально-изотропных пластин. Наличие этих дополнительных членов в первую очередь связано с точностью основных гипотез, положенных в основу теории изгиба как трансверсально-изотропных, так и трехслойных пластин. Только привлечение более точных гипотез может дать окончательный ответ на особенности поведения решения в окрестности угловых точек в случае, когда на границе заданы изгибающий и крутящий моменты.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Амбарцумян С. А.** Теория анизотропных пластин.— М.: Наука, 1987.
2. **Григолюк Э. И., Чулков П. П.** Устойчивость и колебания трехслойных оболочек.— М.: Машиностроение, 1973.
3. **Friedrichs K. O., Dressler R. F.** A boundary-layers theory for elastic plates // Communs Pure and Appl. Math.— 1961.— V. 14, N 1.
4. **Григолюк Э. И., Корнев В. М.** Обоснование уравнений трехслойных пластин несимметричной структуры с жестким заполнителем // Инж. журн. МТТ.— 1966.— № 6.
5. **Григолюк Э. И., Корнев В. М.** К асимптотическому анализу уравнений теории трехслойных пластин и оболочек // Изв. АН СССР. МТТ.— 1976.— № 4.
6. **Бутузов В. В.** Асимптотика решения уравнения $\mu^2\Delta u - k^2(x, y)u = f(x, y)$ в прямоугольной области // Дифференц. уравнения.— 1973.— Т. 9, № 9.
7. **Корнев В. М., Мулькибаев А. О.** Асимптотика свободных колебаний защемленной прямоугольной пластины. Формулировка укороченной задачи // ПМТФ.— 1987.— № 2.
8. **Вахромеев Ю. М., Корнев В. М.** Динамический краевой эффект в стержнях. Формулировка укороченных задач // Изв. АН СССР. МТТ.— 1972.— № 4.
9. **Вахромеев Ю. М., Корнев В. М.** О краевых задачах с малым параметром для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения.— 1977.— Т. 13, № 7.
10. **Вишик М. И., Люстерник Л. А.** Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // УМН.— 1957.— Т. 12, вып. 5.
11. **Гольденвейзер А. Л.** Теория тонких упругих оболочек.— М.: Гостехиздат, 1953.

г. Новосибирск,
г. Алма-Ата

Поступила 14/V 1991 г.

УДК 539.218

В. А. Буряченко, В. З. Партон

ЭФФЕКТИВНЫЕ ПАРАМЕТРЫ ПРОЧНОСТИ КОМПОЗИТОВ В СОПРЯЖЕННЫХ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ ПОЛЯХ

Развитие современной техники, эксплуатируемой в сложных условиях нагружения взаимодействующих физических факторов, стимулировало создание теории сопряженных (например, электромагнитоупругих) полей в упругих телах и, в частности, в композитных материалах. В механике микронеоднородных сред случайной структуры разработаны высокоэффективные методы расчета линейных эффективных свойств среды в различных физико-механических полях по свойствам компонентов среды и проведено сравнение с экспериментом [1—6]. При этом, как правило, проводится оценка средних значений различных полей в компонентах, зависящих линейно от случайных полей в среде, что существенно упрощает решение указанной классической задачи. Прогнозирование прочностных свойств среды принципиально осложняется существенно нелинейной зависимостью законов прочности от локальной напряженности поля. Например, простейшим методом оценки эффективных параметров механической прочности композитов является правило смесей [7], инвариантное относительно формы и ориентации включений. Более точные методы основаны на вычислении средних значений напряженности поля в компонентах, но, как показано ниже, исследование лишь первых моментов напряженности поля [6] в компонентах приводит к качественным ошибкам при оценке эффективных параметров прочности композитов.

В настоящей работе предложен метод построения поверхности прочности композитного материала в статических сопряженных физико-механических полях с учетом связности полей, произвольной анизотропии физико-механических свойств, формы и ориентации включений наполнителя; применяются методы оценки одноточечных первых [1] и вторых [2] моментов сопряженных полей в компонентах среды.

1. Общие соотношения. Рассмотрим макрообласть z с характеристической функцией Z, в каждой точке которой имеет место локальное уравнение

$$\sigma^\alpha(x) = L^{\alpha\beta}(x)\varepsilon^\beta(x), \quad \nabla\sigma^\alpha(x) = 0 \quad (\alpha, \ \beta = 1, \dots, N), \tag{1.1}$$

связывающее тензоры термодинамических сил ε^β и потоков σ^α; в качестве σ^α могут использоваться тензоры механических напряжений, индукции электромагнитного поля, потоки тепла и массы и др.; ε^β может обозначать тензоры деформаций, напряженности поля и т. д. Поля ε^β принимаются потенциальными ($\varepsilon^\beta = \nabla u^\beta$), ∇ — оператор симметризованного градиента и градиента при действии на тензор первого и нулевого рангов соответственно. Тензоры физико-механических свойств $L^{\alpha\beta}$ второго, третьего или четвертого рангов не зависят от ε^γ ($\gamma = 1, \dots, N$), удовлетворяют условиям Онзагера и энергетическим ограничениям.

Предположим, что в каждой точке среды имеет место тензорно-полиномиальный критерий прочности, инвариантный относительно преобразований системы координат,

$$\sum_\alpha \left(\Pi^{1\alpha}(x)\sigma^\alpha(x) + \Pi^{2\alpha}(x)\sigma^\alpha(x)\otimes\sigma^\alpha(x)\right) = 1, \tag{1.2}$$

аналогичный критерию механической прочности Малмейстера [8]; тензоры $\Pi^{1\alpha}$ и $\Pi^{2\alpha}$ имеют одинаковые ранги с тензорами σ^α и $\sigma^\alpha\otimes\sigma^\alpha$ ($\otimes$ — знак тензорного произведения).

Пусть область z состоит из матрицы v_0 с характеристической функцией V с однородными коэффициентами $L_0^{\alpha\beta}$, $\Pi_0^{1\alpha}$, $\Pi_0^{2\alpha}$ и случайного множества $X = (V_k, x_k, \omega_k)$ эллипсоидальных включений с характеристическими функциями V_k, центрами x_k, образующими пуассоновское множество, полуосями a_k $\left(a_k^1 \geqslant a_k^2 \geqslant a_k^3\right)$, совокупностью эйлеровых углов ω_k и однородными коэффициентами $L^{\alpha\beta}(x) = L_0^{\alpha\beta} + L_1^{\alpha\beta}(x) \equiv L_0^{\alpha\beta} + L_1^{\alpha\beta(k)}$, $\Pi^{1\alpha}(x) = \Pi_0^{1\alpha} + \Pi_1^{1\alpha}(x) \equiv \Pi_0^{1\alpha} + \Pi_1^{1\alpha(k)}$, $\Pi^{2\alpha}(x) = \Pi_0^{2\alpha} + \Pi_1^{2\alpha(k)}$ $(x \in v_k)$.

Наряду с тензорной будем использовать эквивалентную матричную форму записи величин со стандартным правилом перехода. Введем векторы $\sigma \equiv (\sigma^\alpha)$, $\varepsilon \equiv (\varepsilon^\alpha)$, $u \equiv (u^\alpha)$, $\Pi_0^1 = (\Pi_0^{1\alpha})$, $\Pi_1^1 = (\Pi_1^{1\alpha})$ и матрицы $L_0 = (L_0^{\alpha\beta})$, $L_1 = (L_1^{\alpha\beta})$, $\Pi_0^2 = (\Pi_0^{2\alpha})$, $\Pi_1^2 = (\Pi_1^{2\alpha})$. Все рассматриваемые в работе случайные поля принимаются эргодическими, статистически однородными случайными полями, и тем самым усреднения по ансамблю X можно заменить усреднениями по макрообъему. Введем обозначения:

$$\langle(\cdot)\rangle = (\bar z)^{-1}\int(\cdot)Z(x)\,dx, \quad \langle(\cdot)\rangle_k = (\bar v_k)^{-1}\int(\cdot)V_k(x)\,dx, \quad k = 0, 1, \dots$$

Здесь и ниже интегрирование проводится по всей области z, черта над ней показывает ее меру $\bar z = \operatorname{mes} z$.

Для нахождения тензора эффективных свойств L^* уравнения макросостояния $\langle\sigma\rangle = L^*\langle\varepsilon\rangle$ усредним локальные уравнения состояния (1.1) по макрообъему, тогда [9]

(1.3) $$L^* = L_0 + R^*,$$

где R^* определяется средним значением тензора поляризации $\langle VL_1\varepsilon\rangle \equiv \equiv R^*\langle\varepsilon\rangle$, $V = \Sigma V_k$ (суммирование по $k = 1, 2, \ldots$).

Может быть предложен альтернативный, хотя и эквивалентный, способ введения эффективного тензора L^* на основе энергетических соображений:

(1.4) $$\langle\varepsilon(x)\sigma(x)\rangle = \langle\varepsilon\rangle L^*\langle\varepsilon\rangle.$$

Эквивалентность вытекает из общего условия (аналогично условию Хилла [10])

(1.5) $$\langle\varepsilon(x)\sigma(x)\rangle = \langle\varepsilon\rangle\langle\sigma\rangle,$$

которое не связано с каким-либо конкретным уравнением состояния и получено на основе лишь уравнения равновесия $\nabla\sigma = 0$ и Коши $\varepsilon = \nabla u^c$:

$$\langle\varepsilon(x)\sigma(x)\rangle = (\bar{z})^{-1}\int\langle\varepsilon(x)\sigma(x)\rangle\,dx = (\bar{z})^{-1}\left\langle\int\nabla[u(x)\sigma(x)]\,dx\right\rangle = (\bar{z})^{-1}\oint\langle u(x)\sigma_n(x)\rangle\,ds.$$

Здесь интегрирование проводится по области z и ее границе ∂z с нормалью n; $\sigma_n = \sigma n$. Принимая детерминированное граничное условие в терминах термодинамических потоков $\sigma_n(x) = \langle\sigma(x)\rangle n(x)$, $x \in \partial z$, получим

$$\langle\varepsilon(x)\sigma(x)\rangle = (\bar{z})^{-1}\oint\langle u(x)\,n(x)\rangle\,ds\,\langle\sigma(x)\rangle = (\bar{z})^{-1}\int\langle\varepsilon(x)\rangle\,ds\,\langle\sigma(x)\rangle,$$

откуда следует (1.5), которое может быть доказано для граничных условий в потенциалах u.

Для фиксированного однородного поля $\langle\varepsilon\rangle$ проварьируем локальный тензор свойств $L(x) \to L(x) + \delta L(x)$, тогда из (1.5) при фиксированном $\langle\varepsilon\rangle$ находим

(1.6) $$(\delta L^*\langle\varepsilon\rangle)\langle\varepsilon\rangle = \langle(\delta L\varepsilon)\varepsilon + 2\delta\varepsilon(L\varepsilon)\rangle.$$

Примем, что тензоры свойств и их вариации однородны в пределах компонента v_k $(k = 0, 1, \ldots)$:

$$L(x) = \sum_{k=0} L^{(k)}V_k(x), \quad \delta L(x) = \sum_{k=0}\delta L^{(k)}V_k(x).$$

Тогда в преобразованном по схеме [2] уравнении (1.6) тензор δL можно вынести за знак усреднения по объему компонента v_k, что позволяет представить (1.6) в форме

(1.7) $$\langle\varepsilon\otimes\varepsilon\rangle_k = \bar{v}_k^{-1}\partial L^*/\partial L^{(k)}(\langle\varepsilon\rangle\otimes\langle\varepsilon\rangle) \quad (k = 0, 1, \ldots),$$

т. е. тензоры вторых моментов напряженности поля $\langle\varepsilon\otimes\varepsilon\rangle_k$, усредненные по объему компонета k, однозначно определяются из функциональной зависимости $L^* = L^*(L^{(k)})$. Записывая (1.4) в терминах термодинамических потоков σ: $(M^*\langle\sigma\rangle)\langle\sigma\rangle = \langle(M\sigma)\sigma\rangle$, имеем выражение для второго момента тензора термодинамических потоков, аналогичное (1.7):

(1.8) $$\langle\sigma\otimes\sigma\rangle_k = \bar{v}_k^{-1}\partial M^*/\partial M^{(k)}(\langle\varepsilon\rangle\otimes\langle\varepsilon\rangle).$$

Здесь введены обратные тензоры $M^{(k)} \equiv (L^{(k)})^{-1}$, $M^* \equiv (L^*)^{-1}$.

Перейдем к оценке тензора R^* (1.3). Для сокращения выкладок примем, что L_0 является клеточно-диагональной матрицей $L_0 \equiv \mathrm{diag}\,[L_0^{11}, \ldots \ldots, L_0^{NN}]$, т. е. эффекты связности потоков в матрице не учитываются. В общем случае матрицы L_0 переход от нее к клеточно-диагональной с помощью введения модифицированных переменных рассмотрен в [11, 12]. Тогда уравнение (1.1) можно представить в форме

(1.9) $$\nabla L_0\nabla u = -\nabla L_1\nabla u.$$

Поскольку для большинства несвязанных физико-механических полей, описываемых уравнениями $\nabla L_0^{\alpha\alpha}\nabla u^\alpha = 0$, известны аналитические представления или численные методы построения фундаментального решения $G^{\alpha\alpha}$, то определим клеточно-диагональную блочную матрицу фундаментальных решений $G = (G^{\alpha\beta})$, $G^{\alpha\beta} = 0$, при $\alpha \neq \beta$. Тогда при допущениях, описанных в [1], уравнение (1.9) сводится к интегральному

$$(1.10)\qquad \varepsilon(x) = \langle\varepsilon\rangle - \int U(x-y)\,[L_1(y)\,\varepsilon(y)\,V(y) - \langle L_1\varepsilon V\rangle]\,dy$$

($U = \nabla\nabla G$). Сходимость интеграла в (1.10) исследовалась в [1]. Оценку R^* проведем с помощью (1.10) в рамках многочастичного метода эффективного поля (МЭП).

Введем $\varphi(v_m|x_1, \ldots, x_n)$ — условные плотности вероятности нахождения m-го включения в области v_m при фиксированных включениях $v_1, \ldots, v_n$ с центрами $x_1, \ldots, x_n$. Усредним (1.10) на множестве X при фиксированных значениях v_1; v_1, v_2 и т. д. с помощью различных плотностей распределения $\varphi(v_m|x_1, \ldots, x_n)$. Получим бесконечную систему связанных уравнений, усредняя которые по объему i-го включения ($i = 1, \ldots, n$), имеем

$$(1.11)\qquad \langle\varepsilon\,|\,x_1, \ldots, x_n\rangle_i - \sum_{j=1}^{n} \bar v_i^{-1}\int\int U(x-y)\,V_i(x)\,V_j(y)\times$$
$$\times\langle L_1(y)\,\varepsilon(y)\,|\,y;\ x_1, \ldots, x_n\rangle\,dy\,dx = \langle\varepsilon\rangle + \bar v_i^{-1}\int\int U(x-y)\,V_i(x)\times$$
$$\times[\langle V(y)\,L_1(y)\,\varepsilon(y)\,|\,y;\ x_1, \ldots, x_n\rangle - \langle L_1\varepsilon V\rangle]\,dy\,dx,$$

где $\langle(\cdot)|y;\ x_1, \ldots, x_n\rangle$ — условие усреднения по ансамблю X в случае, когда в $y, x_1, \ldots, x_n$ есть включения и $y \neq x_1, \ldots, x_n$.

Обозначим правые части уравнений через $\langle\widehat{\varepsilon}(x)_{1,\ldots,n}\rangle_i$, а $\bar\varepsilon_i = \bar\varepsilon(x_i)$ — поле, в котором находится i-е включение, тогда ($j = 1, \ldots, n$)

$$(1.12)\qquad \bar\varepsilon_i(x) = \widehat{\varepsilon}(x)_{1,\ldots,n} + \sum_{j\neq i}^{n}\int U(x-y)\,V_j(y)\,L_1(y)\,\varepsilon(y)\,dy.$$

2. Метод эффективного поля. Для приближенного решения точных уравнений (1.11), (1.12) примем гипотезы МЭП об однородности поля $\bar\varepsilon(x_i)$ и замыкания при достаточно большом n

$$(\langle\widehat{\varepsilon}(x)_{1,\ldots,j,\ldots,n+1}\rangle_i = \langle\widehat{\varepsilon}(x)_{1,\ldots,n}\rangle_i,\quad x \in v_i\ (i = 1, \ldots, n)\ [1]).$$

Для эллипсоидального включения поле $\varepsilon(x)$ внутри включения также однородно и

$$(2.1)\qquad \langle\varepsilon(x)\rangle_i = A_i\langle\bar\varepsilon_i(x)\rangle,\quad A_i = (I + P_iL_1)^{-1},$$

где $P_i = (P_i^{\alpha\beta})\,\delta_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, \ldots, N$), $P_i^{\alpha\alpha} = -\int U^{\alpha\alpha}(x-y)\ V_i(y)\ dy$ ($x \in v_i$)— постоянные тензоры, не зависящие от физико-механических свойств и размеров (но не формы) эллипсоида v_i. Тензоры $P_i^{\alpha\alpha}$ выражаются через известный тензор Эшелби в теории упругости [9] или ему аналогичный в задачах переноса [5].

Для n включений в поле $\widehat{\varepsilon}(x)_{1,\ldots,n}$ с учетом (1.12), (2.1) и гипотез МЭП получим ($j = 1, \ldots, n$, $j \neq i$)

$$(2.2)\qquad \langle\bar\varepsilon(x)\,|\,x_1, \ldots, x_n\rangle_i - \sum_{j\neq i}^{n}(\bar v_i\bar v_j)^{-1}\int\int U(x-y)\,V_i(x)\,V_j(y)\,R_j\times$$
$$\times\langle\bar\varepsilon(y)\,|\,x_1, \ldots, x_n\rangle_j\,dx\,dy = \langle\widehat{\varepsilon}(x)_{1,\ldots,n}\rangle,\quad R_j = L_1^{(j)}A_j\bar v_j.$$

Для решения (2.2) методами линейной алгебры сформируем матрицу T^{-1} с элементами T_{mk}^{-1} ($m, k = 1, \ldots, n$) в виде подматриц

$$T_{mk}^{-1} = I\delta_{mk} + (\delta_{mk} - 1)\,R_mS(x_m - x_k),$$
$$S(x_m - x_k) = (\bar v_m\bar v_k)^{-1}\int\int U(x-y)\,V_m(x)\,V_k(y)\,dx\,dy,$$

тогда

$$\langle \bar{\varepsilon}(x) \mid x_1, \ldots, x_n \rangle_i = R_i^{-1} \sum_{j=1}^{n} T_{ij} R_j \langle \widehat{\varepsilon}(x)_{1,\ldots,n} \rangle_j. \tag{2.3}$$

В рамках гипотез МЭП с помощью решений (2.2), (2.3) из (1.11) имеем замкнутую систему интегральных уравнений относительно полей $\langle \widehat{\varepsilon}(x)_{1,\ldots,j} \rangle_i$ ($j = 1, \ldots, n$, $i = 1, \ldots, j$):

$$\langle \widehat{\varepsilon}(x)_{1,\ldots,j} \rangle_i = \langle \varepsilon \rangle + \int \Big\{ S(x_i - x_q)\, \varphi(v_q \mid x_1, \ldots, x_j) \times \tag{2.4}$$

$$\times \sum_{l=1}^{j+1} T_{ql} R_l \langle \widehat{\varepsilon}(x)_{1,\ldots,j+1} \rangle_l - S_i(x_i - x_q) \langle R\widehat{\varepsilon}_1 \rangle \Big\} dx_q,$$

$$\langle \widehat{\varepsilon}(x)_{1,\ldots,n} \rangle_i = \langle \varepsilon \rangle + \int \Big\{ S(x_i - x_q)\, \varphi(v_q \mid x_1, \ldots, x_{n-1}) \times$$

$$\times \sum_{l=1}^{n} T_{ql} R_l \langle \widehat{\varepsilon}(x_{1,\ldots,n}) \rangle_l - S_i(x_i - x_q) \langle R\widehat{\varepsilon}_1 \rangle \Big\} dx_q$$

$\left(S_i(x_i - x_q) = \bar{v}_i^{-1} \int U(x - x_q) V_i(x)\, dx,\ x_q \in v_i \right)$. Решение (2.4) может быть проведено численно путем оценки $\langle \widehat{\varepsilon}(x)_{1,\ldots,n} \rangle_i$ ($i = 1, \ldots, n$) из последней по n строки (2.4) методом последовательных приближений при всех возможных положениях $v_1, \ldots, v_n$. Полученное значение $\langle \widehat{\varepsilon}(x)_{1,\ldots,n} \rangle_i$ подставляем в правую часть ($n - 1$)-й строки (2.4) и т. д. до оценки $\langle \bar{\varepsilon}(x_i) \rangle_i \equiv \equiv \langle \bar{\varepsilon}(x_i) \rangle \equiv D_i \langle \varepsilon \rangle$, что позволяет определить $R^* = \sum_{i=1} \langle n_i R_i D_i \rangle$ и тензор эффективных свойств (1.3) ($n_i = \langle V_i \rangle / \bar{v}_i$ — счетная концентрация включений v_i).

Аналитическое решение задачи удается найти в двухчастичном приближении и допущении

$$\langle \widehat{\varepsilon}(x)_{12} \rangle_i = \langle \bar{\varepsilon}(x_i) \rangle = \text{const} \quad (i = 1,\ 2). \tag{2.5}$$

Тогда из (2.3), (2.5) и первого уравнения (2.4) получим

$$\langle \bar{\varepsilon}(x_i) \rangle = \langle R_i \rangle_\omega^{-1} \sum_{j=1}^{N_c} n_i \left(Y^{-1} \right)_{ij} \langle R_j \rangle_\omega \langle \varepsilon \rangle, \tag{2.6}$$

где тензор Y^{-1} учитывает бинарное взаимодействие включений и имеет обратный тензор Y, записанный в матричной форме в виде подматриц

$$Y_{ij} = \delta_{ij} \left(I - \langle R_i \rangle_\omega \int \langle S(x_i - x_j) \rangle_\omega T_{ji} \varphi(v_j \mid x_j;\, x_i)\, dx_j \right) + \tag{2.7}$$

$$+ (\delta_{ij} - 1) \langle R_i \rangle_\omega \int \{ \langle S(x_i - x_j) \rangle_\omega T_{ji} \varphi(v_j \mid x_j;\, x_i) - \langle S_i(x_i - x_j) \rangle_\omega n_j \} V(x_j;$$

$$x_i)\, dx_j - \langle R_i \rangle_\omega \langle P_i \rangle_\omega n_j,\quad V(x_j;\, x_i) \equiv V(x_j) - V_i(x_j).$$

В (2.6), (2.7) для сокращения выкладок введена операция усреднения по возможным ориентациям включений v_i ($\langle (\cdot) \rangle_\omega$).

Соотношение (2.6) позволяет найти выражения для тензоров эффективных свойств (1.3) концентраторов B_α^* поля σ в компоненте α ($\langle \sigma \rangle_\alpha = B_\alpha^* \langle \sigma \rangle$, $\langle \sigma^\beta \rangle_\alpha = B_\alpha^{*\beta\gamma} \langle \sigma^\gamma \rangle$, $\alpha = 0, 1, \ldots, N_c$; $\beta, \gamma = 1, \ldots, N$):

$$L^* = L_0 + \sum_{i,j=1}^{N_c} n_i \left(Y^{-1} \right)_{ij} \langle R_j \rangle_\omega, \tag{2.8}$$

$$B_i^* = L^{(i)} A_i \sum_{j=1}^{N_c} n_i \left(Y^{-1} \right)_{ij} \langle R_j \rangle_\omega M^* \quad (i = 1, \ldots, N_c),\quad B_0^* = c_0^{-1} \left(I - \sum_{i=1}^{N_c} c_i B_i^* \right),$$

$$c_\alpha \equiv \langle V_\alpha \rangle.$$

3. Эффективная поверхность прочности. По аналогии с задачами механической прочности воспользуемся распространенным способом построения эффективной поверхности прочности $\Pi^*(\langle\sigma\rangle)$ [7] путем подстановки в формулу (1.2) средних значений тензоров в компонентах

$$(3.1)\quad \Pi^*(\langle\sigma\rangle)=\max_i\sum_\alpha\{\Pi_i^{1\alpha}B_i^*\langle\sigma\rangle+\Pi_i^{2\alpha}(B_i^*\otimes B_i^*)\langle\sigma\rangle\otimes\langle\sigma\rangle\}=1.$$

Соотношения (3.1) приводят к физически противоречивым результатам. Действительно, для изотропной среды, механические прочностные свойства изотропной матрицы которой удовлетворяют критерию Мизеса ($N=1$), при гидростатическом нагружении и любом методе оценки B_0^* получим $\langle\sigma_{ij}\rangle_0-\langle\sigma_{kk}\rangle\delta_{ij}/3=0$, следовательно, пористый материал имеет бесконечную прочность на гидростатическое сжатие, что не согласуется с экспериментом.

Представляется более точным выбор эффективной поверхности прочности в виде, вытекающем из (1.2), (1.8) ($i=0,\ 1,\ \ldots,\ N_c$):

$$(3.2)\quad \Pi^*(\langle\sigma\rangle)=\max_i\sum_{\alpha,\beta}\{\Pi_i^{1\alpha}B_i^{*\alpha\beta}\langle\sigma^\beta\rangle+\bar{v}_i^{-1}\Pi_i^{2\alpha}\partial M^*/\partial M^{(i)}(\langle\sigma\rangle\otimes\langle\sigma\rangle)\}=1.$$

Здесь тензоры $B^{*\alpha\beta}$, M^* рассчитываются по соотношениям (2.8). Таким образом, при принятых допущениях задача построения эффективной поверхности прочности эквивалентна задаче оценки эффективного модуля. В соотношении (3.2) используются средние значения одноточечных первых и вторых моментов поля σ в компонентах среды.

4. Примеры. Рассмотрим задачу расчета эффективной механической прочности композитов ($N=1$). Конкретное выражение для модуля L^* пористого материала получено ранее [4] при учете первых членов ряда в представлении матрицы бинарного взаимодействия T_{ij}. В частности, для несжимаемой матрицы с шаровыми порами одного размера в обозначениях [1] $\left(\mu^{(0)}=2\left(L_{ijij}^{(0)}-L_{iijj}^{(0)}/3\right)/5,\ c=\langle V\rangle\right)$ имеем

$$(4.1)\quad M^*=((\mu^{(0)})^{-1}c[2-29c/12]^{-1},\quad 2(\mu^{(0)})^{-1}[1+5c\{3-35c/8\}^{-1}]).$$

Учет сжимаемости матрицы в диапазоне параметров $0{,}1\leqslant c\leqslant 0{,}5$, $0{,}3\leqslant\nu_0\leqslant 0{,}5$ (ν_0 — коэффициент Пуассона) приводит к уточнению M^* не более чем на 5 % по сравнению с формулой (4.1), чем на практике можно пренебречь. Подставляя (4.1) в (3.2) в предположении, что прочностные свойства матрицы удовлетворяют критерию прочности Мизеса $\left(s_{ij}s_{ij}=k_0^2,\ s_{ij}=\sigma_{ij}-\sigma_{kk}\delta_{ij}/3\right)$, получим выражение для поверхности прочности среды, записанное через инварианты тензора макронапряжений:

$$(4.2)\quad \begin{gathered} I_2+b^*I_1^2=(k^*)^2,\quad I_1=\langle\sigma_{ii}\rangle,\quad I_2=\langle s_{ij}\rangle\langle s_{ij}\rangle,\\ b^*=c(2-35c/12)[(1+5c/24)(1-29c/24)]^{-1},\\ (k^*)^2=k_0^2(1-c)(1-35c/24)[1+5c/24]^{-1}. \end{gathered}$$

Можно показать, что при любой концентрации пор c эффективные параметры прочности b^* и k^* лежат между соответствующими параметрами известных критериев Гарсона [13] и Твергарда [14].

При замене пор на жесткие шаровые включения бесконечной прочности с идеальной адгезией к матрице найдем уравнение поверхности прочности в форме (4.2) с параметрами

$$(4.3)\quad (k^*)^2=k_0^2(1-c)(1+9c/16)(1-31c/16)^{-1},\quad b^*=0,$$

т. е. прочность композитной среды растет с увеличением степени наполнения. Соотношение (4.3) формально совпадает с эффективным пределом текучести жесткопластичных композитов [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Буряченко В. А.** Корреляционная функция полей напряжений в матричных композитах // Изв. АН СССР. МТТ.— 1987.— № 3.
2. **Партон В. З., Буряченко В. А.** Флуктуация напряжений в упругих композитах // ДАН СССР.— 1990.— Т. 310, № 5.
3. **Буряченко В. А., Липанов А. М.** Уравнения механики газонасыщенных пористых сред // ПМТФ.— 1986.— № 4.
4. **Буряченко В. А., Липанов А. М.** Метод эффективного поля в теории идеальной пластичности композитных материалов // ПМТФ.— 1989.— № 3.
5. **Швидлер М. И.** Статистическая гидродинамика пористых сред.— М.: Недра, 1985.
6. **Хорошун Л. П., Маслов Б. П., Лещенко П. В.** Прогнозирование эффективных свойств пьезоактивных композитных материалов.— Киев: Наук. думка, 1989.
7. **Фудзи Т., Дзако М.** Механика разрушения композитных материалов.— М.: Мир, 1982.
8. **Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А.** Сопротивление полимерных и композитных материалов.— Рига: Зинатне, 1980.
9. **Mura T.** Micromechanics of defects in solids.— Dordrecht: M. Nijhoff Publ., 1987.
10. **Hill R.** Elastic properties of reinforced solids: Some theoretical principles // J. Mech. Phys. Sol.— 1963.— V. 11, N 3.
11. **Буряченко В. А., Партон В. З.** Эффективные параметры статических сопряженных физико-механических полей в матричных композитах // IV Всесоюз. симпоз. «Теоретические вопросы магнитоупругости».— Ереван: ЕГУ, 1989.
12. **Milgrom M.** Linear-response of general composite systems to many coupled fields // Phys. Rev. B.— 1990.— V. 41, N 18.
13. **Garson A. L.** Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth. Pt 1. Yield criteria and flow rules for porous ductile media // Trans. ASME. J. Engin. Mater. Technol.— 1977.— V. 99, N 1.
14. **Tvergard V.** On localization in ductile materials containing spherical void // Intern. J. of Fracture.— 1982.— V. 18, N 4.

г. Москва *Поступила 5/VI 1990 г., в окончательном варианте — 14/III 1991 г.*

УДК 624.074.4 : 678.067

А. Г. Иванов, М. А. Сырунин, А. Г. Федоренко

ВЛИЯНИЕ СТРУКТУРЫ АРМИРОВАНИЯ НА ПРЕДЕЛЬНУЮ ДЕФОРМИРУЕМОСТЬ И ПРОЧНОСТЬ ОБОЛОЧЕК ИЗ ОРИЕНТИРОВАННОГО СТЕКЛОПЛАСТИКА ПРИ ВЗРЫВНОМ НАГРУЖЕНИИ ИЗНУТРИ

В настоящее время показана перспективность использования намоточных стеклопластиков в качестве силовых элементов крупногабаритных оболочечных конструкций, локализующих аварийное однократное взрывное выделение энергии [1—5]. Применение этих композитных материалов существенно повышает надежность устройств за счет предотвращения катастрофических хрупких разрушений вследствие проявления возможных для гомогенных материалов сильных масштабных эффектов энергетической природы [6]. Критериальными параметрами для сравнения деформируемости и прочности оболочек служат предельная (на пороге разрушения) деформация и верхнее значение удельной взрывной нагрузки (отношение массы заряда взрывчатого вещества к массе оболочки), которую конструкция способна надежно локализовать [1—5]. Одной из основных задач, возникающих при разработке высокопрочных оболочек из указанных материалов и защитных конструкций на их основе, является определение оптимальной схемы армирования в зависимости от реализуемого нагружения. Экспериментально установлено, что наиболее высокой удельной несущей способностью среди цилиндрических оболочек при радиально-симметричном взрыве изнутри обладает оболочка из ориентированного стеклопластика с чередованием двойных спиральных и кольцевых слоев [3]. Для любого типа намоточных стеклопластиков характерно прак-