

**ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ТОНКОГО СЛОЯ
ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ**

В. Е. Накоряков, И. Р. Шрейбер

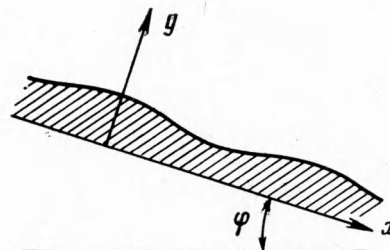
(Новосибирск)

В предположении справедливости приближения пограничного слоя для исходных уравнений показана возможность существования прогрессивных волн на поверхности вертикально стекающей пленки в пренебрежении поверхностным натяжением. Из полученной системы уравнений для тонкого слоя вязкой жидкости, стекающей по наклонной плоскости, следует одно уравнение для возмущений толщины пленки. Стационарные решения этого уравнения допускают периодические разрывные решения типа катящихся волн.

1. Волновое стекание пленок исследовано в [1-4]. Подробный обзор основных исследований имеется в [3, 5].

В настоящей работе методом интегральных соотношений в предположении существования квазипростой волны получено уравнение, описывающее распространение возмущений на поверхности пленки вязкой жидкости. Стационарные решения полученного уравнения допускают разрывные периодические решения типа катящейся волны [5, 6]. Исследовано влияние поверхностного натяжения на структуру катящейся волны.

В работе [3] показано, что в случае, когда толщина пленки h много меньше длины рассматриваемой волны, для исходных уравнений справедливо приближение пограничного слоя



Фиг. 1

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g \sin \varphi + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.2)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = -g \cos \varphi \quad (1.3)$$

Граничное условие на твердой поверхности имеет вид

$$u(x, 0) = v(x, 0) = 0 \quad (1.4)$$

на поверхности пленки

$$V_1 = \frac{\partial h}{\partial t} + U_1 \frac{\partial h}{\partial x} \quad (1.5)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=h} = 0 \quad (1.6)$$

$$p = -\sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (1.7)$$

Здесь u — продольная, а v — поперечная составляющие скорости, x, y — продольная и поперечная координаты, φ — угол наклона поверхности, σ — коэффициент поверхностного натяжения (фиг. 1), ρ — плотность жидкости, g — ускорение свободного падения, ν — коэффициент вязкости.

Интегрируя уравнения (1.1) — (1.3) поперек слоя от нуля до поверхности пленки и используя соотношения (1.4) — (1.7), получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^h u dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u^2 dy = - \nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} - gh \cos \varphi + \frac{\sigma h}{\rho} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u dy = 0 \quad (1.9)$$

Зададим профиль скорости в виде [1, 2, 4]

$$u = U_1 f(\eta), \quad \eta = y/h$$

где U_1 — скорость на поверхности пленки.

Введем обозначения

$$\alpha = \int_0^1 f(\eta) d\eta, \quad \gamma = \int_0^1 f^2(\eta) d\eta, \quad \beta = \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)_{\eta=0}$$

Уравнения (1.8), (1.9), записанные для среднерасходной скорости

$$U = \int_0^h \frac{u}{h} dy = \alpha U_1$$

принимают вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \gamma_1 U \frac{\partial U}{\partial x} + \alpha_1 \frac{U^2}{h} \frac{\partial h}{\partial x} = - \frac{\nu \beta}{\alpha h^2} U - g \cos \varphi \frac{\partial h}{\partial x} + g \sin \varphi + \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial U h}{\partial x} = 0 \quad (1.11)$$

$$\left(\gamma_1 = \frac{2\gamma}{\alpha^2} - 1, \quad \alpha_1 = \frac{\gamma}{\alpha^2} - 1 \right)$$

В работах [1, 2] и ряде других при выводе основных уравнений принято равенство среднего значения квадрата функции распределения скорости по сечению квадрату среднего значения этой функции. Необходимость же правильного усреднения уравнения (1.8) отчетливо показана в работе [3]. Ниже установлено, что существование квазипростой волны на поверхности пленки и стационарных решений типа катящихся волн можно показать, исходя лишь из записи уравнения в форме (1.10), (1.11).

При простейшей форме профиля, удовлетворяющей стационарному стеканию пленки

$$u = U_1 \left(\frac{2y}{h} - \frac{y^2}{h^2} \right) \quad (1.12)$$

$$\alpha = 2/3, \quad \gamma = 8/15, \quad \gamma_1 = 1.4, \quad \alpha_1 = 0.2, \quad \beta / \alpha = 3$$

Вводя возмущения скорости и поверхности от среднего значения по соотношению

$$h = h_0 + h_+, \quad U = U_0 + u_+$$

с точностью до величин второго порядка малости, считая коэффициенты перед вязким членом и членом, учитывающим поверхностное натяжение, малыми, получим систему уравнений относительно h_+ и u_+

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_+}{\partial t} + \gamma_1 U_0 \frac{\partial u_+}{\partial x} + \gamma_1 u_+ \frac{\partial u_+}{\partial x} + \frac{\alpha_1 U_0^2}{h_0^2} \left(\frac{\partial h_+}{\partial x} - h_+ \frac{\partial h_+}{\partial x} \right) + \\ + \frac{2U_0 u_+}{h_0} \frac{\partial h_+}{\partial x} + g \cos \varphi \frac{\partial h_+}{\partial x} = \frac{2\beta v}{\alpha h_0^3} U_0 h_+ - \frac{\beta v u_+}{h_0^2} + \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^3 h_+}{\partial x^3} \\ \frac{\partial h_+}{\partial t} + U_0 \frac{\partial h_+}{\partial x} + u_+ \frac{\partial h_+}{\partial x} + h_0 \frac{\partial u_+}{\partial x} + h_+ \frac{\partial u_+}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (1.14)$$

При выводе (1.13), (1.14) предполагалось, что средние величины подчиняются соотношениям стационарного движения [2]. Сделаем ряд замечаний относительно полученной системы уравнений (1.13), (1.14).

Система (1.13), (1.14) при $U_0 = 0$ и $\varphi = 0$ переходит в уравнения мелкой воды, учитывающие трение о дно. В такой системе возможны прогрессивные волны — гравитационные волны на поверхности тяжелой жидкости малой глубины.

При $\varphi = 90^\circ$ и $U_0 \neq 0$ система (1.13), (1.14) даже в случае достаточно длинных волн, когда можно пренебречь влиянием сил поверхностного натяжения, допускает решение в виде прогрессивных волн, роль члена $g (\partial h / \partial x)$ играет $\alpha_1 U_0^2 h_0^{-1} (\partial h / \partial x)$

В системе (1.13), (1.14) существуют прогрессивные волны при непрерывном изменении φ .

Воспользовавшись далее методом Уизема [7], ищем решение системы (1.13), (1.14) в виде квазипростой волны [8]

$$u_+ = ah_+ + bh_+^2 + c \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + D \int h_+ dx \quad (1.15)$$

Коэффициенты a , b , c , D определяются из условия тождественности уравнений (1.13) и (1.14). Предполагаем, что коэффициенты a , b имеют порядок единицы; D , c , h_+ имеют порядок малости $\varepsilon \sim u_+ / U_0$.

С точностью до ε^2 из системы (1.13), (1.14) следует уравнение для h_+ :

$$\frac{\partial h_+}{\partial t} + (U_0 + ah_0) \frac{\partial h_+}{\partial x} + 2(a + bh_0) h_+ \frac{\partial h_+}{\partial x} + Dh_0 h_+ c h_0 \frac{\partial^3 h_+}{\partial x^3} = 0 \quad (1.16)$$

$$a = \frac{U_0}{2h_0} (\gamma_1 - 1) + \left(\frac{U_0}{4h_0^2} (\gamma_1 - 1)^2 + \frac{\alpha_1 U_0^2}{h_0^2} + \frac{g \cos \varphi}{h_0} \right)^{1/2}$$

$$b = \left[(\gamma_1 - 2) a^2 + \frac{2U_0}{h_0} a - \frac{\alpha U_0^2}{h_0^2} \right] [4ah_0 - 2(\gamma - 1) U_0]^{-1}$$

$$D = \left(\frac{\beta}{\alpha} \frac{va}{h_0^2} - \frac{2\beta v U_0}{\alpha h_0^3} \right) [2ah_0 + U_0(1 - \gamma_1)]^{-1}$$

$$c = -\sigma [\rho(2h_0 a + (1 - \gamma) U_0)]^{-1}$$

Для пленки на вертикальной стенке

$$\cos \varphi = 0, \quad a = 0.7 U_0 / h_0, \quad b = 0.45 U_0 / h_0^2$$

$$D = -3.9 v / h_0^3, \quad c = -\sigma / \rho U_0$$

Представленная дифференциальная связь (1.15) с определенными выше коэффициентами обращает систему (1.13), (1.14) в два одинаковых уравнения (1.16).

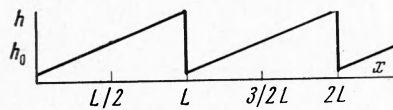
Таким образом, распространение произвольного возмущения на поверхности тонкой пленки подчиняется уравнению Кортевега — де Фриза

с низкочастотной подкачкой энергии

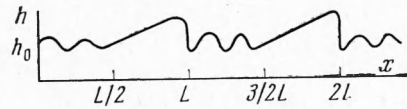
$$\frac{\partial h_+}{\partial t} + 1.7U_0 \frac{\partial h_+}{\partial x} + 2.3U_0 \frac{\partial h_+}{h_0} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\sigma h_0}{\rho U_0} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} = \frac{3.9\nu}{h_0^2} h_+ \quad (1.17)$$

Правая часть уравнения (1.17) ответственна за рост импульса и энергии по времени в рассматриваемой волне.

2. Бесконечному росту амплитуды препятствует нелинейный член, который «опрокидывает» возмущение. Может произойти разрыв, его образованию препятствует поверхностное натяжение. Исключим из рассмотрения влияние поверхностного натяжения на процесс волнообразования. Тогда уравнение (1.17) имеет разрывные периодические решения.



Фиг. 2



Фиг. 3

Введем автомодельную координату $\xi = x - Ct$ в (1.17)

$$-C \frac{\partial h_+}{\partial \xi} + 1.7U_0 \frac{\partial h_+}{\partial \xi} + 2.3U_0 \frac{h_+}{h_0} \frac{\partial h_+}{\partial \xi} + \frac{\sigma h_0}{\rho U_0} \frac{\partial^3 h_+}{\partial \xi^3} = \frac{3.9\nu}{h_0^2} h_+ \quad (2.1)$$

В случае, когда отсутствует третья производная по ξ , в уравнении (2.1) имеем

$$-C \frac{\partial h_1}{\partial \xi} + 1.7U_0 \frac{\partial h_1}{\partial \xi} + 2.3U_0 \frac{h_1}{h_0} \frac{\partial h_1}{\partial \xi} = \frac{3.9\nu h_1}{h_0} \quad (2.2)$$

Разрывные периодические решения этого уравнения исследованы в [9, 10].

В работе [10] уравнение (2.2) исследуется как модельное уравнение, описывающее систему катящихся волн. Введя $F = 2.3 U_0 h_0^{-1} h_1$, имеем уравнение

$$-\omega \frac{\partial F}{\partial x} + F \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{3.9\nu}{h_0^2} F \quad (2.3)$$

$$\omega = 1.7U_0 - C \quad (2.4)$$

Уравнение (2.3) исследовано в [9, 10]. Согласно результатам этих работ уравнение (2.3) имеет разрывные периодические решения при $\omega = 0$, и из (2.3) следует, что скорость распространения катящейся волны $C = 1.7 U_0$ и совпадает со скоростью распространения достаточно длинного возмущения (слабого разрыва), следующей из уравнения (1.17). Это значение приблизительно равно нижнему значению скорости волны на поверхности пленки по расчетам [4].

Задавшись длиной волны L и используя соотношения типа Ренкина — Гюгонио [9] на разрывах, получим выражения для толщины слоя на участке неразрывности функции h_1

$$h_1 = \frac{1.7}{\text{Re}} \left(x - \frac{L}{2} \right) \quad \left(\text{Re} = \frac{U_0 h_0}{\nu} \right) \quad (2.5)$$

Картина поверхности пленки согласно (2.5) показана на фиг. 2.

Решение (2.5) удовлетворяет условию: энергия волны до разрыва больше, чем после разрыва [9].

Таким образом, показана возможность существования «некапиллярной волны» на поверхности вертикальной пленки.

Оценим влияние поверхностного натяжения на стационарную картину катящейся волны. Поступая как и в случае исследования ударных волн [8], представим общее решение в интервале непрерывности в виде

$$h_x = h_1 + f \quad (2.6)$$

где h_1 дается формулой (2.5), а f — малая добавка, учитывающая поверхностное натяжение. Подставляя (2.6) в (1.17), записанное в автомодельной переменной $\xi = x - Ct$, и линеаризуя, имеем уравнение для f

$$\eta \frac{\partial f}{\partial \eta} - k \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} = 0 \quad (2.7)$$

$$\left(\eta = \frac{x}{L} - \frac{1}{2}, \quad k = \frac{1}{3.9} \frac{1}{We} Re \frac{h_0^2}{L^2}, \quad We = \frac{\sigma}{\rho U_0^2 L} \right)$$

Введя

$$\eta_1 = \eta k^{-1/3}, \quad \Phi = \partial f / \partial \eta_1$$

сводим уравнение (2.7) к уравнению Эйри [11]

$$\partial^2 \Phi / \partial \eta_1^2 - \eta_1 \Phi = 0 \quad (2.8)$$

Начало отсчета $\eta_1 = 0$ находится в середине участка непрерывности при $h = h_0$. Известно [11], что уравнение (2.8) имеет осциллирующие решения при $\eta_1 < 0$ и монотонные при $\eta_1 > 0$. Анализируя решения (2.7) на основе известного решения (2.8) [11] на участке непрерывности, можно утверждать, что качественно форма стационарной волны на поверхности пленки должна иметь вид фиг. 3.

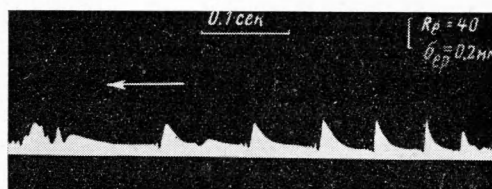
На фиг. 4 показана форма поверхности пленки, зарегистрированная теневым методом при ее стекании по поверхности вертикальной трубы большого диаметра при $Re \approx 40$. Такая же картина наблюдалась во многих работах по исследованию волнообразований на пленках [5].

Сопоставляя эксперимент и теорию, можно говорить лишь о качественном сходстве процессов и приблизительной периодичности волнового процесса.

Поступила 7 VIII 1972

ЛИТЕРАТУРА

- Капца П. Л. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости. ЖЭТФ, 1948, т. 18, вып. 1.
- Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959.
- Крылов В. С., Воротилин В. П., Левич В. Г. К теории волнового движения тонких пленок жидкости. Теоретические основы химической технологии, 1969, т. 3, № 4.
- Шкадов В. Я. Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 1.
- Dukler A. E. A lecture presented at the international Symposium on two phase System, Haifa, Israel, 1971.
- Стокер Дж. Дж. Волны на воде. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
- Нелинейная теория распространения волн. М., «Мир», 1970.
- Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. Новосибирск, Изд-во Новосибирск. гос. ун-та, 1968.
- Быховский Э. Б. Об автомодельных решениях типа распространяющейся волны одного квазилинейного уравнения и системы уравнений, описывающей течение воды в наклонном канале. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2.
- Новик О. Б. Модельное описание системы катящихся волн. ПММ, 1971, т. 35, вып. 6.
- Джеффрис Г., Свирлс Б. Методы математической физики, т. 2, 3. М., «Мир», 1970.



Фиг. 4