УДК 519.217+681.5

ИНВАРИАНТНОСТЬ ОЦЕНКИ СОСТОЯНИЯ КОНЕЧНОЙ ЦЕПИ МАРКОВА С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

© **Е. А. Перепелкин**

Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения,
190000, г. Санкт-Петербург, ул. Большая Морская, 67А
E-mail: eap@list.ru

Работа посвящена решению задачи построения оценки состояния конечной цепи Маркова с дискретным временем. Цепь Маркова рассматривается как линейная динамическая система с неполной информацией о состоянии. Оценка состояния строится на основе наблюдателя Люенбергера. Получены условия инвариантности оценки состояния к возмущениям вероятностей переходов в цепи Маркова. Рассмотрен численный пример.

Ключевые слова: цепь Маркова, оценка состояния, наблюдатель Люенбергера, инвариантность.

DOI: 10.15372/AUT20210608

Введение. Конечные цепи Маркова как случайные процессы с дискретным и непрерывным временем хорошо изучены и находят применение в математическом моделировании, в процессах принятия решений, в теории систем массового обслуживания и управлении сложными системами [1].

Особый интерес представляют скрытые и частично наблюдаемые конечные цепи Маркова [2], для которых актуальными являются задачи построения последовательных оптимальных оценок состояния и параметров цепи Маркова по результатам наблюдений за поведением системы [3, 4].

Конечную цепь Маркова можно рассматривать как линейную динамическую систему. Соответственно можно применять методы теории линейных динамических систем для анализа и синтеза цепей Маркова с заданными характеристиками. Одной из основных задач теории динамических систем является задача построения оценки состояния системы на основе измерений выхода системы [5]. Аналогичная задача может быть рассмотрена и для цепи Маркова.

Данная работа посвящена решению задачи построения оценки состояния конечной цепи Маркова с дискретным временем на основе классического наблюдателя Люенбергера [5]. Предполагается, что вероятности переходов в цепи Маркова точно не известны. Определены условия существования наблюдателя, описан алгоритм синтеза наблюдателя, исследованы условия инвариантности оценки состояния к возмущениям вероятностей переходов в цепи Маркова, приведен численный пример и результаты компьютерного моделирования.

Работа является продолжением [6], в которой представлено решение задачи синтеза наблюдателя Люенбергера для конечной цепи Маркова с непрерывным временем и неконтролируемыми возмущениями в матрице вероятностей переходов цепи Маркова.

Постановка задачи. Рассмотрим систему, поведение которой описывается конечной цепью Маркова с дискретным временем. Обозначим через s_i, $i = \overline{1, n}$, состояния системы, через q_{ij} — вероятности перехода системы из состояния s_i в состояние s_j, через $p_i(k)$ — вероятность нахождения системы в состоянии s_i в момент времени $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Будем считать, что вероятности переходов q_{ij} могут быть представлены в следующем виде:

$$q_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \qquad 0 \leqslant a_{ij} \leqslant 1, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1. \tag{1}$$

Здесь значения a_{ij} известны, значения b_{ij} неизвестны. Значения b_{ij} будем называть возмущениями вероятностей переходов. Из (1) следует

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} = 0, \qquad -a_{ij} \leqslant b_{ij} \leqslant 1 - a_{ij}.$$

При этом предположении динамика системы описывается уравнением Колмогорова

$$p(k+1) = p(k)Q, \tag{2}$$

где

$$p(k) = [p_1(k) \ \dots \ p_n(k)], \qquad Q = A + B,$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}.$$

Матрицу B будем называть матрицей возмущений.

Матрица вероятностей переходов Q относится к классу стохастических матриц, поскольку она является неотрицательной и сумма элементов в каждой её строке равна единице. У стохастической матрицы, по крайней мере, одно собственное число равно единице.

Стохастическая матрица Q и соответствующая ей цепь Маркова называются правильными, если у матрицы Q нет собственных чисел, отличных от единицы и равных по модулю единице, и регулярной, если дополнительно единица является простым корнем характеристического уравнения матрицы Q [7].

Далее будем рассматривать регулярные цепи Маркова. Для регулярной цепи Маркова существует

$$\lim_{k \to \infty} p(k) = \bar{p},$$

и этот предел не зависит от начального распределения вероятностей $p(0)$ [7].

Систему (2) рассмотрим как линейную динамическую систему с неполной информацией о состоянии. Будем считать, что измерению доступны значения

$$y(k) = \sum_{i=1}^{n} c_i p_i(k).$$

Уравнение (2) дополним уравнением измерений

$$y(k) = p(k)c, \tag{3}$$

где c — вектор-столбец, $c = [c_1, \ \dots, \ c_n]^\top$. Например, если измерению доступна вероятность нахождения системы в состоянии s_i, то все коэффициенты вектора c равны 0 за исключением $c_i = 1$.

К уравнениям (2), (3) добавим уравнение выхода

$$z(k) = p(k)h, \tag{4}$$

где h — также вектор-столбец, $h = [h_1, \ \ldots, \ h_n]^\top$. Необходимо построить оценку состояния $\hat{p}(k)$ системы (2)–(4), инвариантную к возмущениям матрицы вероятностей переходов. Другими словами, ошибка оценки $e(k) = p(k) - \hat{p}(k)$ должна обладать свойством

$$\lim_{k\to\infty} e(k)h = 0$$

при любых начальных значениях $p(0)$, $\hat{p}(0)$ и любой допустимой матрице возмущений B.

Синтез наблюдателя. Для оценки состояния системы (2)–(4) применим наблюдатель Люенбергера [5]. Уравнение наблюдателя имеет следующий вид:

$$\hat{p}(k+1) = \hat{p}(k)A - (y(k) - \hat{p}(k)c)d. \tag{5}$$

Здесь d — вектор-строка коэффициентов наблюдателя.

Ошибка оценки удовлетворяет уравнению

$$e(k+1) = e(k)(A + cd) + p(k)B. \tag{6}$$

Коэффициенты наблюдателя определим из условия асимптотической устойчивости системы (6) при $B = 0$. Для асимптотической устойчивости системы

$$e(k+1) = e(k)(A + cd) \tag{7}$$

необходимо и достаточно, чтобы все собственные числа матрицы $A+cd$ находились внутри единичного круга на комплексной плоскости [5].

Из регулярности матрицы A следует, что спектр этой матрицы $\Lambda = \{\lambda_1; \lambda_2; \ldots; \lambda_n\}$ обладает свойством $\lambda_1 = 1$, $|\lambda_i| < 1$, $i = \overline{2, n}$.

Обозначим через v_1 левый собственный вектор матрицы A, отвечающий собственному числу $\lambda_1 = 1$. Вектор v_1 является вещественным и определяется однозначно с точностью до множителя. Далее будем считать, что $v_1 c \neq 0$. При этом предположении вектор v_1 можно найти как решение системы уравнений

$$v_1 A = v_1, \qquad v_1 c = 1.$$

Пусть μ — некоторое вещественное число. Рассмотрим матрицу $A+(\mu-1)cv_1$. Обозначим через w_i правые собственные векторы матрицы A, отвечающие собственным числам λ_i, $i = \overline{2, n}$. Заметим, что эти векторы ортогональны вектору v_1, поскольку $\lambda_1 \neq \lambda_i$, $i = \overline{2, n}$. Следовательно,

$$(A + (\mu - 1)cv_1)w_i = Aw_i = \lambda_i w_i, \qquad i = \overline{2, n}.$$

При этом справедливо равенство $v_1(A + (\mu - 1)cv_1) = \mu v_1$. Таким образом, мы показали, что спектр матрицы $A + (\mu - 1)cv_1$ состоит из чисел $\{\mu; \lambda_2; \ldots; \lambda_n\}$.

Зададим вектор коэффициентов наблюдателя $d = (\mu - 1)v_1$, где $-1 < \mu < 1$. Спектр матрицы $A + cd$ равен $\{\mu; \lambda_2; \ldots; \lambda_n\}$. При этом система (7) будет асимптотически устойчивой.

Алгоритм синтеза наблюдателя для системы (2)–(4) сводится к нахождению левого собственного вектора матрицы A, отвечающего собственному числу $\lambda_1 = 1$.

Пусть $B = 0$. Тогда из асимптотической устойчивости системы (7) следует

$$\lim_{k\to\infty} e(k)h = 0$$

при любом h и при любых начальных значениях $p(0)$ и $\hat{p}(0)$.

Пусть $B \neq 0$. Из регулярности цепи Маркова и асимптотической устойчивости системы (7) следует, что при любых начальных значениях $p(0)$ и $e(0)$ существуют

$$\lim_{k\to\infty} p(k) = \bar{p}, \qquad \lim_{k\to\infty} e(k) = \bar{e}$$

такие, что

$$\bar{p} = \bar{p}(A + B), \qquad \bar{e} = \bar{e}(A + cd) + \bar{p}B. \tag{8}$$

Заметим, что значения $\bar{p}$ и $\bar{e}$ не зависят от начальных значений $p(0)$ и $e(0)$ и определяются однозначно из системы уравнений (8) с точностью до множителя.

Рассмотрим матрицу $E - A - cd$, где E — единичная матрица. Эта матрица невырожденная, поскольку все собственные числа матрицы $A + cd$ по модулю меньше единицы, следовательно,

$$\bar{e} = \bar{p}B(E - A - cd)^{-1}.$$

Если

$$B(E - A - cd)^{-1}h = 0, \tag{9}$$

то $\bar{e}h = 0$ при любых начальных значениях $p(0)$ и $\bar{p}(0)$.

Предположим, что матрица возмущений может быть представлена в виде

$$B = \sum_{i=1}^{m} \beta_i B_i,$$

где матрицы B_i известны, параметры возмущений β_i неизвестны. Тогда из условия

$$B_i(E - A - cd)^{-1}h = 0, \qquad i = \overline{1, m}, \tag{10}$$

следует (9).

Условие (10) можно рассматривать как условие инвариантности оценки состояния цепи Маркова.

Пример. Рассмотрим цепь Маркова с матрицей вероятностей переходов

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}42 & 0{,}58 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}47 & 0{,}53 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}38 & 0{,}62 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}45 & 0{,}55 \\ 0{,}57 & 0 & 0 & 0 & 0{,}43 \end{bmatrix}.$$

Спектр матрицы A равен

$$\Lambda = \{1; -0{,}03 + 0{,}33i; -0{,}03 - 0,33i; 0{,}61 + 0{,}54i; 0,61 - 0,54i\}.$$

Пусть вектор $c = [1\ 0\ 0\ 0\ 0]^\top$. Это означает, что измерению доступна вероятность нахождения системы в состоянии s_1. Левый собственный вектор матрицы A, отвечающий собственному числу $\lambda_1 = 1$ и условию $v_1 c = 1$, равен

$$v_1 = [1\ 1{,}0943\ 0{,}9355\ 1{,}0545\ 1{,}0175].$$

Вектор коэффициентов наблюдателя $d = (\mu - 1)v_1$.

Предположим, что матрица возмущений $B = \beta_1 B_1 + \beta_2 B_2$, где

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Проверим условие инвариантности (10). Матрицы имеют вид

$$B_1(A+cd)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -100/53 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B_2(A+cd)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50/31 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, $B(A+cd)^{-1}h = 0$ при $h = [h_1\ 0\ 0\ h_4\ h_5]^\top$. При этих значениях h ошибка оценки обладает свойством

$$\lim_{k\to\infty} e(k)h = 0$$

при любых начальных значениях $p(0)$ и $\hat{p}(0)$.

Предположим, что нам необходимо построить оценку вероятности нахождения системы в состоянии s_5. Следовательно, $h = [0\ 0\ 0\ 0\ 1]^\top$. Условие инвариантности (10) выполняется.

Зададим $\mu = 0{,}8$. Вектор коэффициентов наблюдателя

$$d = [-0{,}2\ \ -0{,}2189\ \ -0{,}1871\ \ -0{,}2109\ \ -0{,}2035].$$

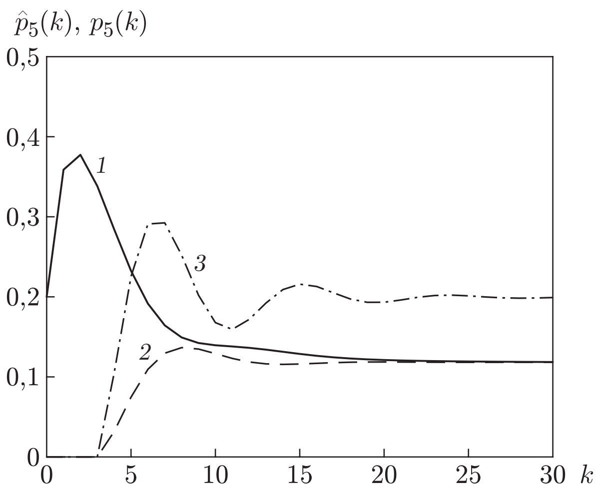

Рис. 1

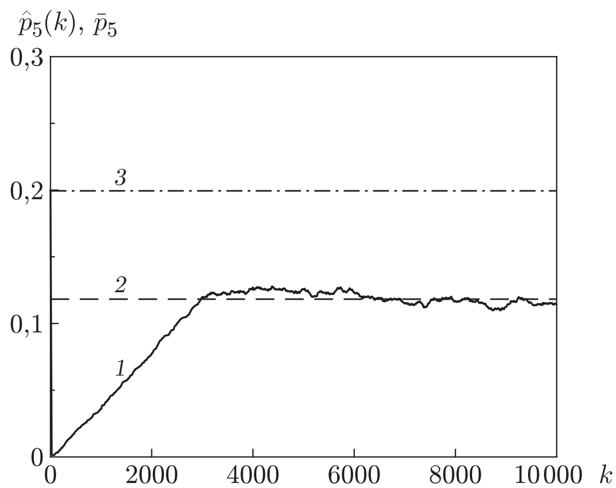

Рис. 2

Рис. 1. Аналитическое моделирование: $\hat{p}_5(k)$ (*1*); $p_5(k)$ при $\beta_1 = 0{,}3$, $\beta_2 = 0{,}5$ (*2*); $p_5(k)$ при $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0$ (*3*)

Рис. 2. Имитационное моделирование: $\hat{p}_5(k)$ (*1*); $\bar{p}_5$ при $\beta_1 = 0{,}3$, $\beta_2 = 0{,}5$ (*2*); $\bar{p}_5$ при $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0$ (*3*)

Аналитическое и имитационное моделирование выполнялось при $\beta_1 = 0{,}3$, $\beta_2 = 0{,}5$ и при начальных значениях

$$p(0) = [1\ 0\ 0\ 0\ 0], \qquad \hat{p}(0) = [0{,}2\ 0{,}2\ 0{,}2\ 0{,}2\ 0{,}2].$$

На рис. 1 даны решения уравнения Колмогорова (2) и уравнения наблюдателя (5). Оценка $\hat{p}_5(k)$ вероятности нахождения системы в состоянии s_5 получена при $\beta_1 = 0{,}3$, $\beta_2 = 0{,}5$. Для сравнения на этом рисунке показан график $p_5(k)$ при отсутствии возмущений ($\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0$).

На рис. 2 представлены результаты имитационного моделирования. Здесь $\bar{p}_5$ — предельное значение вероятности $p_5(k)$. Для определения вероятности нахождения системы в состоянии s_1 применялся фильтр скользящего среднего с величиной окна 3000.

Результаты имитационного моделирования подтверждают результаты аналитического моделирования.

Заключение. В данной работе показана возможность применения наблюдателя Люенбергера для построения оценки состояния конечной цепи Маркова с дискретным временем и возмущениями в матрице вероятностей переходов. Описан алгоритм синтеза наблюдателя и определены условия инвариантности оценки состояния к возмущениям вероятностей переходов в цепи Маркова. Численный пример, аналитическое и компьютерное моделирование подтверждают теоретические выводы. Результаты работы могут найти применение в системах контроля и диагностики состояния технических систем и процессов, поведение которых может быть описано конечными цепями Маркова с дискретным временем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ching W.-K., Ng M. K.** Markov Chains: Models, Algorithms and Applications. N. Y.: Springer, 2006. 205 p.
2. **Elliot R. J., Aggoun L., Moore J. B.** Hidden Markov Models: Estimation and Control. N. Y.: Springer, 2008. 377 p.
3. **Ledoux J.** Recursive filters for partially observable finite Markov chains // Journ. Appl. Probability. 2005. **42**, N 3. P. 684–697.
4. **Clempner J. B., Poznyak A. S.** Observer and control design in partially observable finite Markov chains // Automatica. 2019. **110**, N 12. 108587.
5. **Стрейц В.** Метод пространства состояний в теории линейных дискретных систем управления. М.: Наука, 1985. 296 с.
6. **Перепелкин Е. А.** Робастный наблюдатель состояния неоднородной цепи Маркова с непрерывным временем // Вестн. Томского гос. ун-та. Управление, вычислительная техника и информатика. 2021. № 54. С. 74–79.
7. **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 560 с.

Поступила в редакцию 06.07.2021
После доработки 25.08.2021
Принята к публикации 11.10.2021