

УДК 532.54:519.63

О ВОЗДЕЙСТВИИ ВНУТРЕННИХ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА НА КОНВЕКТИВНЫЕ ДВИЖЕНИЯ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ, ПОДОГРЕВАЕМОЙ СНИЗУ

В. Н. Говорухин

Южный федеральный университет, 344090 Ростов-на-Дону

E-mail: vgov@math.sfedu.ru

Численно исследовано влияние внутренних источников тепла на характер течений в задаче фильтрационной конвекции, обладающей косимметрией. Рассмотрены источники тепла малой интенсивности, наличие которых приводит к нарушению косимметрии и распаду однопараметрического семейства стационарных режимов. Подтверждены теоретически предсказанные сценарии распада семейства на конечное число стационарных режимов, а также возникновение медленных периодических движений. При достаточно больших числах Рэлея установлено существование релаксационных колебаний.

Ключевые слова: фильтрационная конвекция, косимметрия, конвекция, стационарные режимы.

В настоящей работе исследуется задача фильтрационной конвекции в горизонтальном цилиндре при постоянно поддерживаемом линейном по вертикали профиле температуры на его границе, представляющая теоретический интерес. В частности, сначала формально [1], а затем строго [2] было установлено, что в результате первого бифуркационного перехода всегда возникает бесконечное число устойчивых стационарных конвективных режимов (однопараметрическое семейство, цикл). Это обусловлено наличием нетривиальной косимметрии у соответствующей системы уравнений в частных производных [2]. При малых параметрах надкритичности все стационарные режимы устойчивы, а само семейство глобально-устойчиво [2]. Конвективные режимы, принадлежащие семейству, различаются по физическим характеристикам и диапазонам устойчивости.

Установленные теоретически факты подтверждены в физических экспериментах [3, 4] и расчетах [5–8]. В физических экспериментах при одной и той же интенсивности подогрева реализовывались конвективные режимы с различными характеристиками теплопередачи, количеством и структурой конвективных ячеек. При увеличении интенсивности подогрева возникает неустойчивость семейства и в решении задачи появляются “дуги” неустойчивых стационарных режимов [5–7]. В [5, 6] показано, что неустойчивость может быть как колебательной, так и монотонной. С увеличением числа Рэлея семейство перестает быть глобально-устойчивым, возникают нестационарные течения [8], все стационарные режимы становятся неустойчивыми.

При наличии просачивания жидкости сквозь область, анизотропии пористой среды, неравномерного подогрева жидкости или внутренних источников тепла косимметрия в рас-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14-01-00470).

смаатриваемой задаче фильтрационной конвекции нарушается. В случае возмущений, нарушающих косимметрию, непрерывные семейства стационарных режимов распадаются или исчезают [9, 10]. В [10] построена теория таких бифуркаций, сформулировано селекционное уравнение, количество решений которого определяется влиянием возмущений на распад однопараметрического семейства режимов равновесия. Доказано, что при наличии равномерно распределенных источников тепла малой интенсивности внутри области течения семейство распадается, порождая два стационарных режима: устойчивый и неустойчивый. В случае если селекционное уравнение не имеет решений, возникают медленные (с большим периодом) периодические движения, возможны также более сложные режимы. В [9, 11] в результате численных расчетов обнаружены медленные периодические движения, возникающие при просачивании жидкости, а также устойчивый стационарный режим, имеющий место при неравномерном подогреве на границе. В [9–11] изучено влияние нарушающих косимметрию возмущений на семейство стационарных режимов при числах Рэлея, соответствующих малым параметрам надкритичности, когда это семейство полностью устойчиво. Исследование процесса распада указанного семейства при увеличении числа Рэлея и наличии нарушающих косимметрию воздействий до сих пор не проводилось. Изучению этих явлений при наличии малых внутренних источников тепла посвящена данная работа.

1. Математическая формулировка задачи. Рассмотрим горизонтально расположенный бесконечный параллелепипед с поперечным сечением $D = [0, a] \times [0, b]$. Все границы параллелепипеда предполагаются непроницаемыми, на нижней и верхней границах поддерживаются температуры $T_0 + A$ и T_0 соответственно. При таких условиях состояние потока жидкости возможно только при линейном по вертикальной координате распределении температуры. Введем систему координат (x, y, z) , ось z которой направлена параллельно бесконечной образующей параллелепипеда, а ось y — вертикально вверх. Далее ограничимся рассмотрением плоских течений, для которых $v_z = 0$ и все параметры задачи не зависят от z . При таких предположениях задача сводится к двумерной задаче, в которой областью течения является прямоугольник D .

Уравнения плоской конвекции в пористой среде в приближении Дарси — Буссинеска в безразмерных переменных, записанные с использованием функции тока $\psi(t, x, y)$ и отклонения $\theta(t, x, y)$ температуры от равновесного по вертикали профиля при наличии внутренних источников тепла, имеют вид [1, 2]

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= \theta_x, \\ \theta_t + \psi_y\theta_x - \psi_x\theta_y &= \Delta\theta + \lambda\psi_x + \mu f(x, y), \end{aligned} \quad (1)$$

где x, y — декартовы координаты; t — время; λ — аналог числа Рэлея; $f(x, y)$ — функция распределения интенсивности внутренних источников тепла; μ — параметр; индекс у функции обозначает соответствующую производную.

На границе области D заданы условия

$$[\theta]_{\partial D} = [\psi]_{\partial D} = 0. \quad (2)$$

Начальное условие для системы (1), (2) имеет вид

$$\theta(0, x, y) = \theta_0(x, y), \quad (3)$$

где $\theta_0(x, y)$ — функция, заданная в области D .

При любом фиксированном значении t из первого уравнения (1) можно выразить ψ через θ , решая краевую задачу Дирихле для уравнения Пуассона. В результате получаем

$$\psi = G\theta_x, \quad (4)$$

где G — оператор Грина.

При $\mu = 0$ задача (1), (2) глобально разрешима и диссипативна, при малых значениях параметра λ состояние покоя глобально-устойчиво. Выражение для критических значений параметра устойчивости состояния покоя имеет вид [12]

$$\lambda_{m,n} = 4\pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right), \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (5)$$

При $\mu = 0$ задача (1)–(3) обладает косимметрией [2, 12], которая задается функцией ψ . Это означает, что с учетом (4) выполняется равенство

$$\int_D (\Delta\theta - \psi_y\theta_x + \psi_x\theta_y + \lambda\psi_x)\psi \, dx \, dy = 0.$$

Каждому переходу параметра λ через критическое значение (5) соответствует бифуркация — возникновение однопараметрического семейства стационарных режимов. Поскольку первое критическое значение $\lambda_{1,1}$ всегда кратно, при $\lambda = \lambda_{1,1}$ от состояния покоя ответвляется цикл устойчивых стационарных режимов [2]. При $\lambda \approx \lambda_{1,1}$ все режимы семейства нейтрально-устойчивы вдоль цикла и асимптотически устойчивы в трансверсальных к нему направлениях, их спектр устойчивости зависит от координат режима. Изменение собственных значений, соответствующих состояниям равновесия вдоль семейства, означает, что эти состояния не могут быть обусловлены влиянием группы симметрий [12]. При каждом переходе λ через следующие значения $\lambda_{m,n}$ возникают семейства неустойчивых стационарных режимов.

При $\mu = 0$ система уравнений (1) имеет две дискретные симметрии в силу инвариантности относительно следующих замен:

$$\begin{aligned} x &\rightarrow -x, & y &\rightarrow y, & \psi &\rightarrow -\psi, & \theta &\rightarrow \theta, \\ x &\rightarrow x, & y &\rightarrow -y, & \psi &\rightarrow -\psi, & \theta &\rightarrow -\theta. \end{aligned}$$

При $\mu \neq 0$ косимметрия задачи нарушается, и, как показано в [10], из всего однопараметрического семейства стационарных режимов при $|f(x, y)| \ll 1$ остаются только те режимы, которые являются решениями селекционного уравнения. В рассматриваемой в данной работе задаче селекционное уравнение имеет вид

$$\int_D f(x, y)\psi \, dx \, dy = 0. \quad (6)$$

При $f(x, y) = \text{const}$ и $\lambda - \lambda_{1,1} \ll 1$ таких режимов всего два, причем один из них устойчив, а второй неустойчив [10]. Ниже проводится численное исследование распада однопараметрического семейства режимов при увеличении λ и наличии распределенных внутренних источников тепла.

2. Схема численного исследования. Для аппроксимации задачи (1)–(3) используется метод Галеркина. Решение задачи будем искать в следующей форме:

$$\begin{aligned} \psi &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \psi_{i,j}(t) \varphi_{i,j}(x, y), & \theta &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \theta_{i,j}(t) \varphi_{i,j}(x, y), \\ \varphi_{i,j}(x, y) &= \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin\left(i \frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(j \frac{\pi y}{b}\right). \end{aligned} \quad (7)$$

Каждая функция $\varphi_{ij}(x, y)$ является собственной функцией оператора Лапласа, т. е. $\Delta\varphi_{ij}(x, y) = \sigma_{ij}\varphi_{ij}(x, y)$, где σ_{ij} — собственное значение.

Подставляя (7) в (1) и выполняя проектирование, получаем конечномерную систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) порядка $N = n^2$ относительно функций $\theta_{i,j}$:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_{ij}}{dt} + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \psi_{kl}(t) \theta_{pq}(t) \left(\frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial y} \frac{\partial \varphi_{pq}}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{pq}}{\partial y}, \varphi_{ij} \right) = \\ = -\sigma_{ij} \theta_{ij}(t) + \lambda \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \psi_{kl} \left(\frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial x}, \varphi_{ij} \right) + \mu f_{i,j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $f_{i,j} = (f(x, y), \varphi_{ij})$.

С учетом аппроксимации (7) коэффициенты ψ_{ij} однозначно выражаются из первого уравнения системы (1) через неизвестные θ_{ij} :

$$\psi_{ij}(t) = -\frac{1}{\sigma_{ij}} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \theta_{kl}(t) \left(\frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial x}, \varphi_{ij} \right), \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (9)$$

В (8), (9) круглые скобки обозначают скалярное произведение в гильбертовом пространстве.

Полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений при $\mu = 0$ сохраняет свойство косимметричности, а сама косимметрия определяется правой частью выражения (9). Стационарным режимам задачи (1)–(3) соответствуют состояния равновесия $\hat{\theta}_{i,j}$, $i, j = 1, \dots, n$ системы (8). Все рассматриваемые в данной работе семейства режимов равновесия систем Галеркина обыкновенных дифференциальных уравнений являются замкнутыми кривыми в фазовом пространстве, для каждого из этих семейств целесообразно ввести параметризацию $s \in [0, 1]$, которая задает континуальный “номер” состояния равновесия $\hat{\theta}_{i,j}(s)$.

Необходимое для получения корректных результатов количество членов (число N) в разложении (7) зависит от значений параметров. В работах [6, 7] показано, что для воспроизведения результатов численных расчетов в случае вытянутых по вертикали контейнеров достаточно использовать 49 ($n = 7$) коэффициентов Галеркина. При исследовании аппроксимаций меньших размерностей могут быть получены неверные результаты. Таким образом маломодовые модели неточно описывают нелинейные явления в исследуемой задаче. В данной работе $N = 81$, $n = 9$, что обеспечивает достоверность результатов при рассматриваемых значениях параметров.

Наличие у систем дифференциальных уравнений косимметрии обуславливает существование кривой равновесий с неявно заданным параметром и сильное вырождение задач поиска и анализа состояний равновесия. В [13, 14] описан алгоритм, позволяющий анализировать такие семейства. В данной работе этот алгоритм используется для поиска однопараметрических семейств состояния равновесия при $\mu = 0$. Метод вычисления основан на варианте теоремы о неявной функции с учетом косимметрии [2]. Ветвь состояний равновесия является решением задачи Коши для вспомогательной системы ОДУ, правая часть которой определяется ядром оператора исходной системы, линеаризованного в окрестности семейства режимов. С использованием алгоритма можно получить точку семейства $\hat{\theta}_{i,j}(s)$ при любом значении s . При численном решении задач Коши для систем ОДУ применяется метод Рунге — Кутты четвертого порядка.

Дискретный аналог селекционного уравнения (6) принимает вид

$$G(s) = \sum_{i,j=1}^n f_{i,j} \hat{\psi}_{i,j}(s) = \sum_{i,j=1}^n \left[f_{i,j} \frac{1}{\sigma_{ij}} \sum_{k,l=1}^n \hat{\theta}_{kl}(s) \left(\frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial x}, \varphi_{ij} \right) \right] = 0. \quad (10)$$

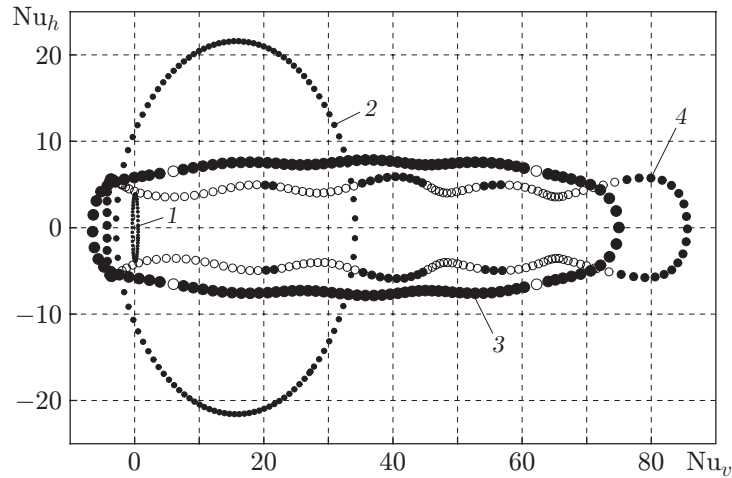


Рис. 1. Зависимость положения семейства стационарных конвективных режимов от параметра λ :

1 — $\lambda = 0,1149$, 2 — $\lambda = 0,1639$, 3 — $\lambda = 0,2494$, 4 — $\lambda = 0,2750$; темные точки — устойчивые режимы, светлые точки — неустойчивые режимы

Выражение (10) позволяет провести анализ распада однопараметрического семейства равновесий: выполнение условия $G(s_*) = 0$ означает, что состояние равновесия (стационарный режим), соответствующее параметру s_* , сохраняется при $\mu \ll 1$ и заданной функции $f(x, y)$.

Для анализа результатов численных расчетов используются значения расхода тепла в вертикальном направлении через нижнюю границу Nu_v и расхода тепла в горизонтальном направлении через середину прямоугольника Nu_h :

$$Nu_v = \int_0^a \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=0} dx, \quad Nu_h = \int_0^b \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=a/2} dy.$$

3. Результаты исследования. В данной работе рассмотрен случай вытянутого по вертикали прямоугольного контейнера со сторонами $a = 20$, $b = 50$. При таких размерах и $\lambda_{1,1} = 0,1145$ состояние покоя теряет устойчивость, в результате чего возникает семейство устойчивых стационарных режимов. Изменение семейства стационарных режимов в зависимости от числа Рэлея представлено на рис. 1. При малых значениях параметра надкритичности, например при $\lambda = 0,1149$, в фазовом пространстве семейство имеет форму, близкую к окружности. С увеличением λ форма семейств усложняется ($\lambda = 0,1639$), а при $\lambda \approx 0,2494$ одновременно четыре режима теряют устойчивость. При $\lambda > 0,2494$ существуют “дуги” неустойчивых режимов, возникают новые участки неустойчивости.

При $\lambda \approx \lambda_{1,1}$ конвективные режимы имеют от трех до двух “дуг”. На рис. 2 приведены линии тока стационарных течений семейства при $\lambda = 0,12$. При увеличении температуры динамика жидких частиц усложняется (рис. 3). На рис. 1, 2 представлены линии тока для восьми режимов из бесконечного числа возможных. Поля течений трансформируются непрерывно при изменении параметра s на семействе.

В аппроксимации (8) задачи (1)–(3) наличие внутренних источников тепла характеризуется постоянным вектором $F = \{f_{i,j}, i, j = 1, \dots, n\}$, где $f_{i,j}$ — коэффициенты разложения функции $f(x, y)$ в ряд по функциям $\varphi_{i,j}(x, y)$ (7). Полагая все компоненты F , кроме одной, равными нулю, можно получить оценку возможного количества нулей функции $G(s)$ (см. (10)), а значит, и количество стационарных режимов, сохраняющихся при

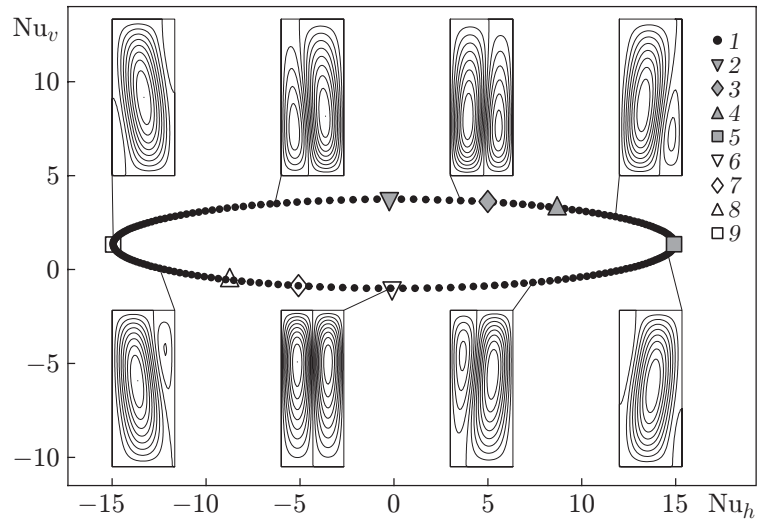


Рис. 2. Режимы конвективного движения и соответствующие им линии тока:
 1 — семейство устойчивых стационарных режимов при $\lambda = 0,12$, $\mu = 0$, 2–9 — режимы, сохраняющиеся при различных распределениях источников тепла и $0 < \mu \ll 1$ (2–5 — режимы, остающиеся устойчивыми, 6–9 — режимы, остающиеся неустойчивыми); 2, 6 — $f(x, y) = 1$, $f(x, y) = y$, 3, 7 — $f(x, y) = x$, 4, 8 — $f(x, y) = x - 5$, 5, 9 — $f(x, y) = x - 10$

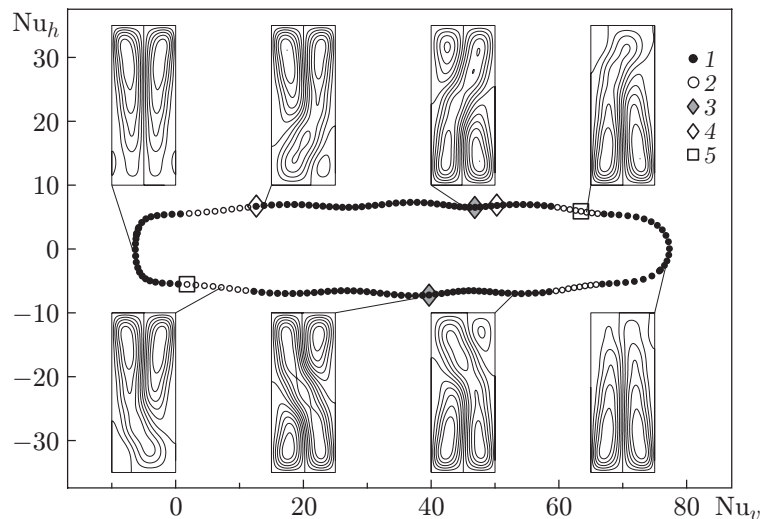


Рис. 3. Режимы конвективного движения и соответствующие им линии тока:
 1, 2 — семейство стационарных режимов при $\lambda = 0,255$, $\mu = 0$ (1 — устойчивые режимы, 2 — неустойчивые режимы), 3–5 — режимы, сохраняющиеся при различных распределениях источников тепла и $0 < \mu \ll 1$ (3 — устойчивый режим при наличии источника тепла, задаваемого формулой (11) при $\alpha = 0,63$, 4 — неустойчивый режим при наличии источника тепла, задаваемого формулой (11) при $\alpha = 0,63$, 5 — неустойчивый режим при наличии источника тепла, задаваемого формулой (12) при $x_c = 0,75$, $y_c = 0,25$)

Число нулей коэффициентов $\hat{\psi}_{i,j}(s)$ разложения (7)
на семействе режимов равновесия при различных значениях λ

λ	$\hat{\psi}_{1,1}$	$\hat{\psi}_{1,2}$	$\hat{\psi}_{1,3}$	$\hat{\psi}_{2,1}$	$\hat{\psi}_{2,2}$	$\hat{\psi}_{2,3}$	$\hat{\psi}_{3,1}$	$\hat{\psi}_{3,2}$	$\hat{\psi}_{3,3}$
0,1149	2	4	2	2	0	2	2	4	2
0,1639	2	4	6	2	0	2	6	4	2
0,2494	2	4	6	6	0	2	10	12	6
0,3000	2	4	6	6	0	10	10	12	14

распаде семейства. Для этого достаточно определить число нулей каждого из коэффициентов $\hat{\psi}_{i,j}(s)$ разложения функции тока на семействе, что нетрудно сделать, используя (9) и $\theta_{i,j}(s)$. Таким образом, при плотности распределения внутренних источников тепла $f(x, y) = \varphi_{i,j}(x, y)$ остается столько стационарных режимов, сколько раз обращается в нуль функция $\hat{\psi}_{i,j}(s)$, $s \in [0, 1]$. Вопрос об устойчивости сохраняющихся режимов должен рассматриваться отдельно. Для значений λ , при которых в случае $\mu = 0$ семейство состоит из устойчивых режимов равновесия, половина сохраняющихся режимов являются устойчивыми, а остальные — неустойчивыми, причем при обходе семейства по параметру s устойчивые и неустойчивые режимы чередуются. При наличии неустойчивых “дуг” ситуация осложняется, поэтому необходимо численно исследовать устойчивость. При $\hat{\psi}_{i,j}(s) \neq 0$ для всех $s \in [0, 1]$ вместо семейства режимов равновесия возникает медленный нестационарный режим.

В таблице приведены результаты анализа возможных сценариев распада семейства стационарных режимов при различных значениях параметра λ и старших коэффициентов $\hat{\psi}_{i,j}$. При $\lambda = 0,1149$ возможно сохранение четырех режимов, а при увеличении числа Рэлея количество таких режимов увеличивается, и при $\lambda = 0,3$ их может быть 14. Коэффициент $\hat{\psi}_{2,2}(s)$ не имеет нулей во всех рассмотренных случаях. Это означает, что при распределении интенсивности внутренних источников вида $f(x, y) = \sin(2\pi x/a) \sin(2\pi y/b)$ возникают нестационарные движения жидкости. Расчеты показали, что при $\mu = 0,001$ и всех рассмотренных значениях λ устанавливаются медленные периодические режимы с траекторией, близкой к траектории распавшегося семейства режимов равновесия.

При рассмотрении распределений $f(x, y)$, отличающихся от распределений $\varphi_{i,j}(x, y)$, анализ сценариев распада семейства сводится к разложению функции $f(x, y)$ в ряд по $\varphi_{i,j}(x, y)$ и анализу функции $G(s)$, $s \in [0, 1]$.

В работе [10] показано, что при наличии равномерно распределенных внутренних источников тепла с постоянной плотностью $f(x, y) = 1$ при $\lambda \approx \lambda_{1,1}$ однопараметрическое семейство распадается, при этом возникает два изолированных режима (устойчивый и неустойчивый). Результаты расчетов показывают, что при увеличении λ и $f(x, y) = 1$ в случае полностью устойчивого семейства такой распад сохраняется: при $0 < \mu \ll 1$ остаются один устойчивый и один неустойчивый стационарные режимы. В случае прямоугольного контейнера при $0,1149 < \lambda < 0,2550$ устойчивым режимом является симметричный режим в инвариантном подпространстве, которому соответствует точка семейства с координатами $s = 0$. На рис. 2 этим симметричным режимам соответствуют точки 2, 4. Сценарий распада семейства стационарных режимов при $f(x, y) = y$ аналогичен: стационарные режимы те же, что и при $f(x, y) = 1$.

Если плотность источников тепла зависит от горизонтальной координаты, то сохраняются другие, несимметричные стационарные режимы. При $\lambda - \lambda_{1,1} \ll 1$ этих режимов по-прежнему два, причем только один из них устойчив. Какой из режимов сохраняется, зависит от вида функции f (см. рис. 2). При увеличении λ может сохраняться большее количество стационарных режимов.

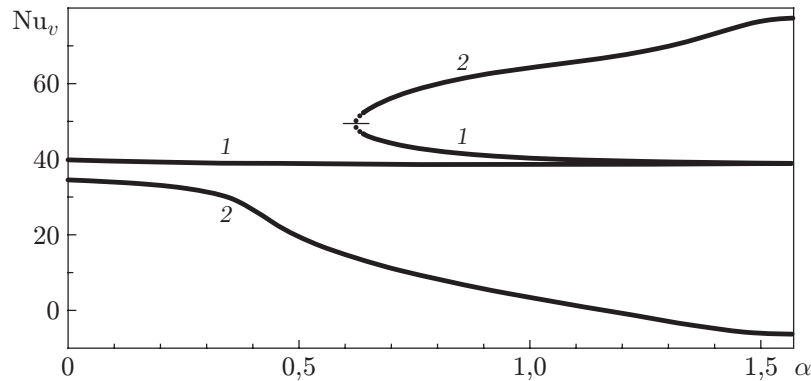


Рис. 4. Сохраняющиеся режимы семейства при распределении внутренних источников, задаваемом функцией вида (11):

1 — устойчивые режимы, 2 — неустойчивые режимы

Изучим подробнее случай $\lambda = 0,255$. При этом значении λ при $\mu = 0$ существуют “дуги” неустойчивых стационарных режимов на семействе (см. рис. 3). Рассмотрим два варианта распределений интенсивности внутренних источников тепла, причем в обоих случаях будем полагать, что на границе D источники отсутствуют:

$$f(x, y) = \varphi_{1,1}(x, y)((10 - x) \cos \alpha + (25 - y) \sin \alpha + 1), \quad \alpha \in [0, 2\pi]; \quad (11)$$

$$f(x, y) = \varphi_{1,1}(x, y)(1 - (x/a - x_c)^2 - (y/b - y_c)^2), \quad x_c, y_c \in [0, 2, 0, 8]. \quad (12)$$

Выражение (11) задает на границе D функцию с одним максимумом (с положительным значением) и одним минимумом (с отрицательным значением), координаты которых при изменении α вращаются вокруг центра граничной плоскости D . Плотность распределения (12) положительна и имеет один экстремум (максимум).

При распределении источников, задаваемом формулой (11), и малом значении μ семейство режимов распадается, и в зависимости от α сохраняется два или четыре стационарных режима. На рис. 4 приведена зависимость значений Nu_v для этих режимов от параметра $\alpha \in [0, \pi]$ (вторая половина графика симметрична). Для каждого значения α половина режимов равновесия являются устойчивыми, а остальные — неустойчивыми. На рис. 3 показано четыре сохраняющихся режима при $\alpha = 0,63$ (точки 3, 4). При $0 < \mu \ll 1$ эволюция системы включает два этапа: сначала траектория системы выходит из начальной точки в окрестность распавшегося семейства, а затем медленно движется вдоль него к одному из сохранившихся устойчивых стационарных режимов. Несколько таких траекторий с начальными данными в точках семейства приведено на рис. 5.

При распределении плотности источников тепла, задаваемом формулой (12), возникает ситуация, когда оба сохраняющихся при распаде стационарных режима являются неустойчивыми. Этот сценарий возможен только в том случае, если на семействе имеются “дуги” неустойчивых режимов. При этом один из сохраняющихся режимов теряет устойчивость в результате нарушения косимметрии, а другой принадлежит неустойчивой “дуге” семейства. Для такого случая численно обнаружены релаксационные колебания при $\mu = 0,0010; 0,0001$ и $x_c = 0,75, y_c = 0,25$. Соответствующая проекция траектории на плоскость (Nu_v, Nu_h) приведена на рис. 5 (5). Эволюция этого режима включает два этапа: медленное движение системы вдоль отрезка кривой, соответствующей распавшемуся семейству стационарных режимов, а затем быстрые движения от одного конца отрезка кривой к другому. На рис. 6 приведена зависимость Nu_v от времени для таких релаксационных колебаний. В увеличенном масштабе показан один из этапов быстрых движений.

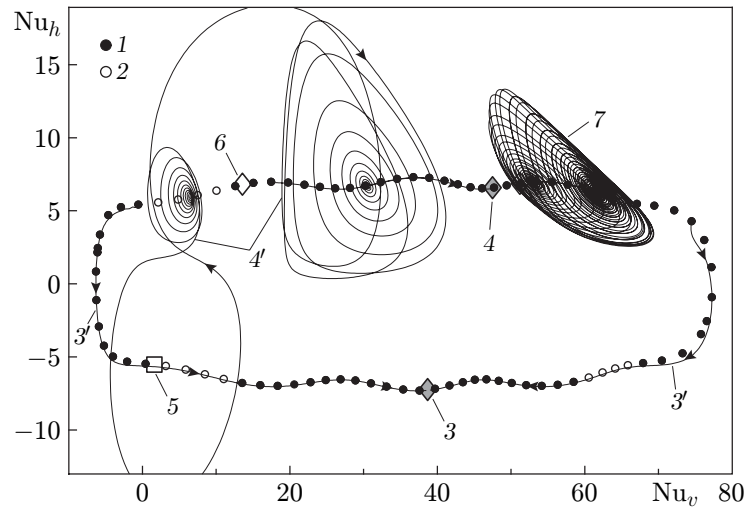


Рис. 5. Режимы конвективного движения и соответствующие им линии тока: 1, 2 — семейство стационарных режимов при $\lambda = 0,255, \mu = 0$ (1 — устойчивые режимы, 2 — неустойчивые режимы), 3–6 — стационарные режимы при $\lambda = 0,255, \mu = 0,001$ и распределении источников тепла, задаваемом формулой (11) при $\alpha = 0,63$ (3, 4 — устойчивые режимы, 3', 4' — соответствующие им траектории, 5, 6 — неустойчивые режимы), 7 — релаксационный нестационарный режим при $\lambda = 0,255, \mu = 0,001$ и распределении источников тепла, задаваемом формулой (12) при $x_c = 0,75, y_c = 0,25$

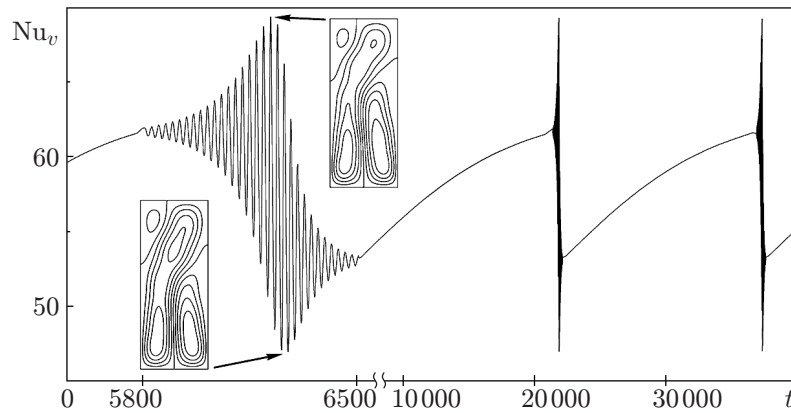


Рис. 6. Динамика числа Нуссельта Nu_v и линии тока конвективного движения в случае нестационарного релаксационного режима

Видно, что на этой стадии движений число Нуссельта (так же, как и функция тока) многократно меняется за малый промежуток времени. На медленной стадии при небольших временах режим конвекции изменяется незначительно.

Заключение. В работе изучены возможные сценарии распада однопараметрического семейства стационарных конвективных режимов в задаче фильтрационной конвекции с косимметрией при наличии внутренних источников тепла малой интенсивности. Обнаружены теоретически предсказанные сценарии: распад семейства на конечное число стационарных режимов и возникновение медленных периодических движений. Кроме того, найдены релаксационные колебательные режимы, включающие две стадии: медленные движения с траекторией, принадлежащей “дуге” распавшегося семейства, и быстрые колебания. Такой сценарий возможен в том случае, если при распаде семейства все сохраняющиеся стационарные режимы являются неустойчивыми.

Применительно к рассмотренной задаче естественно предположить, что условия реальных физических процессов и экспериментов не полностью удовлетворяют идеальной математической постановке задачи (реальная пористая среда неоднородна, подогрев неравномерен и т. д.). В результате косимметрия задачи нарушается, и реализуются условия, близкие к условиям распада семейства стационарных режимов, поэтому следует ожидать медленных движений (периодических или стремящихся к стационарному режиму) и возникновения релаксационных колебаний.

Полученные результаты позволяют управлять стационарными режимами с необходимыми характеристиками путем введения внутренних источников тепла с неоднородным распределением плотности.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Любимов Д. В.** О конвективных движениях в пористой среде, подогреваемой снизу // ПМТФ. 1975. № 2. С. 131–137.
2. **Юдович В. И.** Косимметрия, вырождение решений операторных уравнений, возникновение фильтрационной конвекции // Мат. заметки. 1991. Т. 49, № 5. С. 142–148.
3. **Глухов А., Любимов Д., Путин Г.** Конвективные движения в пористой среде вблизи порога неустойчивости равновесия // Докл. АН СССР. 1978. Т. 238, № 3. С. 549–551.
4. **Глухов А. Ф., Путин Г. Ф.** Экспериментальное исследование конвективных структур в насыщенной жидкостью пористой среде вблизи порога неустойчивости механического равновесия // Гидродинамика: Сб. науч. тр. Перм. гос. ун-та. Пермь: Перм. гос. ун-т, 1999. Т. 12. С. 104–120.
5. **Говорухин В. Н.** Численное исследование потери устойчивости вторичными стационарными режимами в задаче плоской конвекции Дарси // Докл. АН. 1998. Т. 363, № 6. С. 752–754.
6. **Говорухин В. Н.** Анализ семейств вторичных стационарных режимов в задаче плоской фильтрационной конвекции в прямоугольном контейнере // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1999. № 5. С. 53–62.
7. **Говорухин В. Н., Шевченко И. В.** Численное исследование второго перехода в задаче плоской фильтрационной конвекции // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2003. № 5. С. 115–128.
8. **Говорухин В. Н., Шевченко И. В.** Сценарии возникновения нестационарных режимов в задаче плоской фильтрационной конвекции // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2006. № 6. С. 125–134.
9. **Bratsun D. A., Lyubimov D. V., Roux B.** Co-symmetry breakdown in problems of thermal convection in porous medium // Phys. D. 1995. V. 82, N 4. P. 398–417.
10. **Юдович В. И.** О бифуркациях при возмущениях, нарушающих косимметрию // Докл. АН. 2004. Т. 398. С. 57–61.
11. **Tsybulin V., Karasözen B.** Destruction of the family of steady states in the planar problem of Darcy convection // Phys. Lett. A. 2008. V. 372, N 35. P. 5639–5643.
12. **Yudovich V. I.** Secondary cycle of equilibria in a system with cosymmetry, its creation by bifurcation and impossibility of symmetric treatment of it // Chaos. 1995. V. 5, N 2. P. 402–411.
13. **Govorukhin V.** Calculation of one-parameter families of stationary regimes in a cosymmetric case and analysis of plane filtrational convection problem // Continuation methods in fluid dynamics. Braunschweig: Vieweg, 2000. P. 133–144. (Notes Numer. Fluid Mech.; V. 74).
14. **Говорухин В. Н.** Бифуркации однопараметрических семейств стационарных режимов в модели фильтрационной конвекции // Изв. вузов. Прикл. нелинейная динамика. 2012. Т. 20, № 6. С. 3–14.

Поступила в редакцию 16/V 2013 г.