

2. Найдена зависимость времени формирования вихрей от числа Рейнольдса, количества возмущающих тел и количества полуволн n . Анализ полученных данных показывает, что при экстраполяции зависимости времени формирования вихрей в область больших n и Re ожидаемое время возникновения вихря будет меньше времени, необходимого для прихода отраженной волны. Из этого вытекает, что вихрь мог бы формироваться не только в стоячей, но и в бегущей волне и наличие отражающей поверхности необязательно. Этот предварительный прогноз требует прямого экспериментального подтверждения, но в приложении к атмосфере он означает следующее:

1) при взаимодействии мезоциклона с препятствием возникновение смерча может происходить за время, меньшее периода вращения мезоциклона; при обычной скорости движения мезоциклона такое время взаимодействия может быть обеспечено даже одной невысокой горой (перепад высоты на радиусе мезоциклона 100—500 м); вихрь станет зарождаться на расстоянии в несколько километров от нее, хотя это не означает, что он будет разрушительным, так как пока не изучено, чем определяется интенсивность вихря;

2) возникновение многозвенных вихрей ($n > 1$) в природе хотя и возможно, но менее вероятно, так как требует значительно больше времени;

3) для формирования вихря наличие в тропосфере отражающего инверсионного слоя (аналога крышки в эксперименте) необязательно.

Приведенные выше экспериментальные данные, конечно, не исчерпывают поставленной задачи. Дальнейшее продвижение в ее решении выходит за рамки одной статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Макаренко В. Г., Тарасов В. Ф. Экспериментальная модель смерча // ПМТФ.— 1987.— № 5.
2. Тарасов В. Ф., Макаренко В. Г. Экспериментальная модель смерча // ДАН СССР.— 1989.— Т. 305, № 2.
3. Макаренко В. Г., Тарасов В. Ф. О структуре течения вращающейся жидкости после движения в ней тела // ПМТФ.— 1988.— № 6.
4. Владимиров В. А., Макаренко В. Г., Тарасов В. Ф. Экспериментальное исследование неосесимметричных инерционных волн во вращающейся жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1987.— № 1.
5. Гринспен Х. П. Теория вращающихся жидкостей.— Л.: Гидрометеоиздат, 1975.

г. Новосибирск

Поступила 27/II 1992 г.

УДК 621.515 : 534

В. Б. Курзин

НИЗКОЧАСТОТНЫЕ СОБСТВЕННЫЕ АКУСТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В ПРОТОЧНОЙ ЧАСТИ ГИДРОТУРБИН

В современных гидротурбинах имеют место нестационарные явления, характер которых определяется законами акустики. Теоретическое исследование этих явлений в общем случае представляет собой достаточно трудную задачу из-за сложной геометрии проточной части турбины. В случае же низкочастотных колебаний их описание существенно упрощается, что позволило получить ряд результатов, представляющих практический интерес для инженерных расчетов. Однако работы в этом направлении, например [1, 2], как правило, ограничены рамками одной постановки соответствующих задач. Вместе с тем в результа-

© В. Б. Курзин, 1993

те взаимодействия с турбиной течение жидкости становится существенно неоднородным как для стационарной, так и для нестационарной ее составляющей.

В данной работе изучено влияние закрутки потока турбиной на характер низкочастотных гидроакустических колебаний в проточной части.

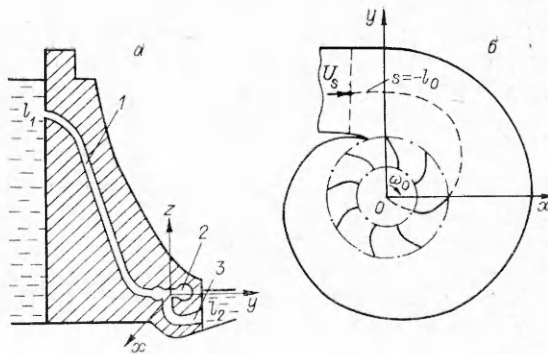


Рис. 1

1. Основные предположения.

Рассмотрим свободные гидроакустические колебания жидкости в проточной части гидротурбины. На рис. 1, а (1 — водовод, 2 — спиральная камера, 3 — отсасывающая труба) приведена схема вертикального сечения проточной части, а на рис. 1, б — горизонтальное сечение спиральной камеры, в которой расположена турбина. Введем естественную систему отсчета, связанную с линией, представляющей собой геометрическое место центров поперечных сечений проточной части. Начало отсчета поместим во входном сечении в отсасывающую трубу, а положительное направление отсчета будем считать совпадающим с направлением течения жидкости. В качестве характерного геометрического размера возьмем длину средней хорды лопасти турбины b и предположим, что для геометрических размеров основных элементов проточной части имеет место оценка

$$(1.1) \quad l_0 = O(b), \quad R_j = O(b) \quad (j = 1, 2);$$

$$(1.2) \quad b \ll l_2 \ll l_1,$$

где R_1, R_2 — внешний и внутренний радиусы рабочего колеса турбины; l_1 — длина водовода; l_2 — длина отсасывающей трубы; l_0 — эффективная длина спиральной камеры, значение которой будет определено в результате решения задачи.

Полагая, что площади поперечных сечений водовода и отсасывающей трубы $\Omega(s)$ меняются незначительно и достаточно плавно, для простоты примем

$$(1.3) \quad \Omega(s) = O(b^2) = \text{const} \quad \text{при} \quad -(l_0 + l_1) < s < -l_0, \quad 0 < s < l_2$$

(s — дуговая координата проточной части).

Жидкость будем считать идеальной, ее движение — изэнтропийным, а в водоводе, кроме того, и безвихревым. Предположим также отсутствие массовых сил. Полагая, наконец, что характерным размером, определяющим частоту собственных колебаний, является длина водовода, в соответствии с (1.2) приведенная частота колебаний запишется как

$$(1.4) \quad k = \frac{\omega b}{c} = 2\pi \frac{b}{\lambda} \ll 1$$

(ω — круговая частота колебаний, λ — длина волны, c — скорость звука в жидкости).

2. Постановка задачи. В области течения жидкости V (в проточной части) найдем собственные частоты и собственные функции свободных колебаний, удовлетворяющие в соответствии с предположениями п. 1 линеаризованной системе уравнений

$$(2.1) \quad \rho_0 [\partial \mathbf{u}' / \partial t + (\mathbf{U}_0 \nabla) \mathbf{u}' + (\mathbf{u}' \nabla) \mathbf{U}_0] + \rho' (\mathbf{U}_0 \nabla) \mathbf{U}_0 = -\nabla p';$$

$$(2.2) \quad \partial \rho' / \partial t + \nabla (\rho_0 \mathbf{u}' + \rho' \mathbf{U}_0) = 0;$$

$$(2.3) \quad \rho' = p' / c^2.$$

Здесь ρ_0, \mathbf{U}_0 — стационарные, а ρ', \mathbf{u}' — нестационарные составляющие

плотности и скорости; p' — нестационарная составляющая давления. При этом ρ_0 , U_0 — заданные величины, а ρ' , p' и u' — неизвестные, которые ищутся в виде

$$(2.4) \quad \rho' = \rho e^{i\bar{\omega}t}, \quad p' = p e^{i\bar{\omega}t}, \quad u' = u e^{i\bar{\omega}t},$$

где $\bar{\omega} = \omega(1 + i\delta)$; δ — параметр, характеризующий устойчивость колебательного процесса.

Амплитудные функции (2.4) должны удовлетворять следующим однородным граничным условиям:

непротекания через твердые стенки границ S , включая движущиеся поверхности лопастей:

$$(2.5) \quad u_{\nu} = 0 \text{ при } \rho \in S$$

(ν — направление нормали к S , ρ — радиус-вектор частиц жидкости); на открытых концах проточной части

$$(2.6) \quad p = 0 \text{ при } s = -(l_0 + l_1), l_2;$$

Жуковского — Кутта на задних кромках лопастей c_n

$$(2.7) \quad [p] = 0 \text{ при } \rho \in c_n;$$

на вихревых следах, сбегаящих с лопастей и моделируемых поверхностями контактного разрыва \mathcal{L}_n :

$$(2.8) \quad [u_{\nu_1}] = 0, \quad [p] = 0 \text{ при } \rho \in \mathcal{L}_n$$

(ν_1 — направление нормали к \mathcal{L}_n).

Решение поставленной задачи будем искать приближенно. С этой целью, учитывая (1.4), введем малый параметр

$$(2.9) \quad k = \varepsilon.$$

С точностью до величин второго порядка малости $O(\varepsilon^2)$ выражения для собственных функций в водоводе и отсасывающей трубе можно представить в аналитическом виде. Эти выражения могут быть связаны между собой с помощью интегральных законов сохранения масс и акустической энергии, примененных к области течения жидкости в спиральной камере.

3. Представление решения в водоводе. Принимая во внимание (1.2), (1.3), введем дополнительное предположение, состоящее в том, что стационарная составляющая скорости жидкости в водоводе имеет лишь одну продольную компоненту, а ее модуль

$$(3.1) \quad |U_0| = U_s = \text{const.}$$

Учитывая, кроме того, предположение о безвихревом характере течения в водоводе, амплитудную функцию нестационарной составляющей скорости представим с помощью потенциала

$$(3.2) \quad u_1 = \nabla \varphi_1(s).$$

Давление в этом случае также определяется через функцию φ_1 с помощью интеграла Коши — Лагранжа:

$$(3.3) \quad p_1 = -\rho_0(i\bar{\omega}\varphi_1 + U_0\nabla\varphi_1).$$

Подставляя (3.2), (3.3) в (2.1) — (2.3), с учетом (2.4) найдем

$$(1 - M^2) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial s^2} - 2i\bar{k}M \frac{\partial \varphi_1}{\partial s} + \bar{k}^2 \varphi_1 = 0.$$

Здесь и в дальнейшем координата s и все геометрические параметры считаем безразмерными величинами, отнесенными к b :

$$M = U_s/c, \quad \bar{k} = \bar{\omega}b/c = k(1 + i\delta).$$

Примем

$$(3.4) \quad M = O(\varepsilon), \quad \delta = O(\varepsilon).$$

Полагая (без нарушения общности), что $|\varphi_1/bc| \leq 1$, решение уравнения (3.3), удовлетворяющее условию (2.6) при $s = -(l_0 + l_1)$, можно представить следующим образом:

$$(3.5) \quad \varphi_1 = Abce^{i\bar{k}M(s+l_0+l_1)} [\sin \bar{k}(s+l_0+l_1) + iM \cos \bar{k}(s+l_0+l_1)]$$

(A — произвольная константа порядка $O(1)$).

Подставляя (3.5) в (3.2) и (3.3), найдем

$$(3.6) \quad u_1 = Akc \exp [i\bar{k}M(s+l_0+l_1)] \cos \bar{k}(s+l_0+l_1);$$

$$(3.7) \quad p_1 = -iAkc^2 \exp [i\bar{k}M(s+l_0+l_1)] \sin \bar{k}(s+l_0+l_1).$$

4. Представление решения в спиральной камере. В отличие от водовода течение жидкости в спиральной камере является существенно не одномерным. Представим искомые функции в спиральной камере u' , p' в виде сумм двух составляющих:

$$u' = u'_0 + u'_z, \quad p' = p'_0 + p'_z,$$

каждая из которых удовлетворяет системе (2.1) — (2.3). При этом считаем, что u'_0, p'_0 удовлетворяют условию склеивания с решением в водоводе при $s = -l_0$, т. е.

$$(4.1) \quad u'_{0s} = u'_1, \quad p'_0 = p'_1,$$

а также условию отсутствия циркуляции скорости u'_0 вокруг контуров L_n профилей лопастей турбины

$$(4.2) \quad \oint_{L_n} u'_0 d\rho = 0.$$

В соответствии с общей постановкой задачи u'_z, p'_z будут удовлетворять (2.5), (2.8) и согласно (2.7) условию

$$[p'_z] = [-p'_0] \quad \text{для } \rho \in c_n.$$

Из (4.1) следует, что на входе в спиральную камеру

$$u'_{zs} = 0, \quad p'_z = 0 \quad \text{при } s = -l_0.$$

Так как течение жидкости в водоводе является потенциальным, то в силу (4.1) и (4.2) по теореме Томпсона $\nabla \times u'_0 = 0$. Отсюда для функции u'_0 имеет место представление

$$(4.3) \quad u'_0 = \nabla \bar{\varphi}'_0 = \nabla \varphi_0 e^{i\omega t}.$$

Предположим, что акустические возмущения жидкости, создаваемые турбиной и описываемые функцией потенциала скорости φ_0 , на входе в отсасывающую трубу выравниваются так, что

$$\varphi_0(\rho) = \text{const}, \quad u_{0s}(\rho) = \text{const}, \quad p_0(\rho) = \text{const} \quad \text{при } s = 0.$$

Что касается течения жидкости, которое описывается функциями u'_z, p'_z , то оно представляет собой совокупность чисто циркуляционного движения вокруг лопастей решетки и движения, индуцируемого нестационарными вихревыми следами, сбегаящими с лопастей. Можно показать, что это течение обладает свойством

$$(4.4) \quad \int_{S_2} u_{zs}^{(0)} d\sigma = 0,$$

где S_2 — сечение на стыке с отсасывающей трубой; $u_{zs}^{(0)}$ — амплитудное значение проекции скорости u'_z на направление s в приближении несжимаемой жидкости.

5. Представление решения в отсасывающей трубе. Для аналитического описания течения в отсасывающей трубе введем цилиндрическую систему координат (r, θ, s) , полагая сечение трубы круглым. Пренебрегая течением в радиальном направлении, будем считать, что продольная компонента стационарной скорости удовлетворяет условию (3.1), а окружная является функцией одной координаты r :

$$U_\theta = U_\theta(r).$$

В рамках указанных предположений система (2.1)–(2.3) преобразуется следующим образом:

$$(5.1) \quad \rho_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}_0 \cdot \nabla \right) \mathbf{u}' = -\nabla p';$$

$$(5.2) \quad \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}_0 \cdot \nabla \right)^2 p' = \Delta p'.$$

Представим теперь искомые функции \mathbf{u}' и p' в виде сумм двух составляющих:

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u}'_2(s) + \mathbf{u}'_w, \quad p' = p'_2(s) + p'_w.$$

Здесь \mathbf{u}'_2, p'_2 — функции скорости и давления, описывающие одномерные акустические колебания жидкости в отсасывающей трубе; \mathbf{u}'_w, p'_w — соответствующие функции, описывающие волновое движение, индуцируемое вихревыми следами.

Ограничимся рассмотрением среднеинтегральных значений по сечениям $S(s)$ амплитудных функций

$$\tilde{p}_w = \frac{1}{\Omega} \int_S p_w d\sigma, \quad \tilde{u}_{ws} = \frac{1}{\Omega} \int_S u_{ws} d\sigma, \quad \tilde{u}_{w\theta} = \frac{1}{\Omega} \int_S u_{w\theta} d\sigma.$$

Интегрируя уравнение (5.2) по S , получим

$$(1 - M^2) \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial s^2} - 2i\bar{k}M \frac{\partial \tilde{p}}{\partial s} + \bar{k}^2 \tilde{p} = 0,$$

где $\tilde{p} = p_2 + \tilde{p}_w$. Решение этого уравнения, удовлетворяющее условию (2.6) при $s = l_2$, представим как

$$(5.3) \quad \tilde{p} = -iB\bar{k}c^2\rho_0 e^{i\bar{k}M(s-l_2)} \sin \bar{k}(s-l_2)$$

(B — произвольная константа).

Не нарушая общности, считаем

$$(5.4) \quad p_2 = \tilde{p}, \quad \tilde{p}_w = 0.$$

Одномерную функцию u'_2 определим как частное решение уравнения (5.1), правая часть которого выражается через функцию p'_2 . В результате выражение для амплитудной функции u_2 примет вид

$$(5.5) \quad u_2 = B\bar{k}c \left[e^{i\bar{k}M(s-l_2)} \cos \bar{k}(s-l_2) + O(\varepsilon^3) \right].$$

Очевидно, что одномерные акустические колебания жидкости, описываемые функциями u_2 и p_2 , являются потенциальными и соответствующая амплитудная функция потенциала скорости может быть представлена следующим образом:

$$(5.6) \quad \varphi_2 = Bcbe^{i\bar{k}M(s-l_2)} \left[\sin \bar{k}(s-l_2) + iM \cos \bar{k}(s-l_2) \right].$$

Интегрируя уравнение (5.1) по сечению S и учитывая (5.4), найдем

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_s \frac{\partial}{\partial s} \right) \tilde{\mathbf{u}}'_w = 0.$$

Отсюда

$$\tilde{u}_{ws} = C \bar{k} c e^{-i \frac{\bar{\omega}}{U_s} s}, \quad \tilde{u}_{w0} = D \bar{k} c e^{-i \frac{\bar{\omega}}{U_s} s}$$

(C и D — произвольные константы).

Напомним, что функции \tilde{u}_{ws} и \tilde{u}_{w0} описывают волновое движение жидкости, индуцируемое нестационарными вихревыми следами. Принимая во внимание свойство (4.4) соответствующего движения в спиральной камере, для константы C получим оценку $C = O(\varepsilon^2)$. Константа D характеризует нестационарную закрутку потока и может быть определена с помощью теоремы об изменении момента количества движения жидкости в результате ее взаимодействия с турбиной. Таким образом, условия склеивания решений в отсасывающей трубе и спиральной камере можно представить в виде

$$(5.7) \quad u_2 = u_0 [1 + O(\varepsilon^2)], \quad p_2 = p_0 + \tilde{p}_z \text{ при } s = 0,$$

где \tilde{p}_z — среднеинтегральное значение амплитудной функции составляющей давления p'_z в спиральной камере, связанной с закруткой потока турбиной. Константа B функций u_2 и p_2 , а также константа A функций u_1 , p_1 определяются из условий сопряжения, которые, как было отмечено выше, будем строить с помощью законов сохранения.

6. Первое условие сопряжения. Интегрируя уравнение (2.2) по области течения жидкости в спиральной камере V_0 и применяя теорему Гаусса — Остроградского, получим

$$(6.1) \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} p' dv = - \oint_{S_0} \left(\rho_0 \mathbf{u}' + \frac{1}{c^2} \mathbf{U}_0 p' \right) \cdot \mathbf{v} d\sigma$$

(\mathbf{v} — внешняя нормаль к границе S_0 области V_0).

Рассмотрим сначала интеграл по объему из выражения (6.1). С этой целью проведем оценку порядка величин функций \mathbf{u}' и p' в области V_0 . Согласно (3.6), (5.5) и (3.4), имеем

$$(6.2) \quad |\mathbf{u}'| = cO(\varepsilon), \quad p' = \rho_0 c^2 O(\varepsilon).$$

Из (2.1) и (2.2) следует

$$(6.3) \quad |\nabla \mathbf{u}'| = cO(\varepsilon^2), \quad |\nabla p'| = \rho_0 c^2 O(\varepsilon^2);$$

$$(6.4) \quad |\Delta \mathbf{u}'| = cO(\varepsilon^3), \quad \Delta p' = \rho_0 c^2 O(\varepsilon^3).$$

Учитывая (6.2) — (6.4), найдем

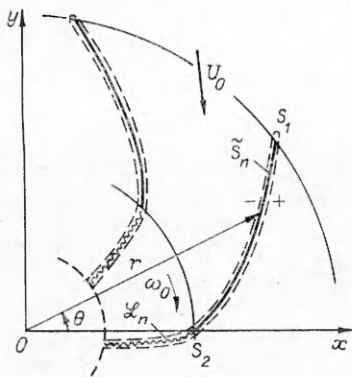
$$(6.5) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} p' dv = i \bar{\omega} \frac{V_0}{2} [(p'_1 + p'_2) + \rho_0 c^2 O(\varepsilon^3)],$$

где p'_1, p'_2 — нестационарные составляющие давления в водоводе и отсасывающей трубе в стыковых сечениях со спиральной камерой, амплитудные функции которых определяются по формулам (3.7), (5.3).

При вычислении интеграла по S_0 из выражения (6.1) необходимо иметь в виду, что частью S_0 являются поверхности \tilde{S}_n вращающихся лопастей турбины. Охватывая \tilde{S}_n , как схематически изображено на рис. 2, и учитывая, что на границе спиральной камеры $\mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}' \cdot \mathbf{v} = 0$, а на поверхности лопастей $\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v} = 0$, указанный интеграл представим в виде

$$(6.6) \quad J_{S_0} = \sum_{n=1}^N \oint_{\tilde{S}_n} \frac{p'}{c^2} \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{v} d\sigma + \left(\int_{S_2} - \int_{S_1} \right) \left(\rho_0 u'_s + \frac{M}{c} p' \right) d\sigma$$

(S_1 и S_2 — сечения спиральной камеры на стыке с водоводом и отсасывающей трубой соответственно).



Р и с. 2

В случае однородной решетки интегралы по поверхностям различных лопастей будут равны между собой. Применяя для простоты гипотезу плоских сечений и моделируя лопасти несущими поверхностями, сведем эти интегралы к повторным

$$(6.7) \quad J_{S_n} = \int_0^h \oint_L p' \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{v} d\sigma dz \quad (n = 1, 2, \dots, N)$$

($h(s)$ — высота лопасти). Для вычисления интеграла (6.7) представим \mathbf{U}_0 в виде $\mathbf{U}_0 = \mathbf{U}_r + \mathbf{U}_e$ (\mathbf{U}_r — вектор относительной скорости в системе отсчета, жестко связанной с вращающейся турбиной, \mathbf{U}_e — переносная

скорость). Принимая во внимание, что

$$\mathbf{U}_r \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{U}_e \cdot \mathbf{v} = (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{v} = \omega_0 r \sin \alpha$$

($\boldsymbol{\omega}_0$ — вектор угловой скорости вращения турбины, \mathbf{r} — радиус-вектор точек поверхности профилей относительно точек, лежащих на оси вращения, α — угол между векторами \mathbf{r} и \mathbf{v}), найдем

$$(6.8) \quad J_L = \oint_L p' \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{v} d\sigma = \omega_0 \int_{s_1}^{s_2} (p'^- - p'^+) r \sin \alpha ds.$$

Здесь s_1, s_2 — координата передней и задней кромок профиля, индекс плюс означает, что соответствующее значение p' взято на поверхности, обращенной в сторону движения лопасти, а минус — с противоположной стороны.

Нетрудно увидеть, что интеграл (6.8) определяет нестационарную составляющую момента гидродинамических сил, действующих на профиль, относительно оси вращения решетки. Учитывая это обстоятельство, первый член (6.6) представим как

$$(6.9) \quad \sum_{n=1}^N \oint_{S_n} \frac{p'}{c^2} \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{v} d\sigma = \frac{\omega_0}{c} \int_0^h M'_Q dz = \rho_0 M \frac{\omega_0}{c} R_2 \Omega m_Q u'_2,$$

где M'_Q — погонный момент гидродинамических сил, действующих на лопасти турбины вследствие колебаний расхода жидкости по закону $Q = \rho_0 \Omega u'_2$; m_Q — безразмерный комплексный коэффициент момента.

Интегралы (6.6) по стыковым сечениям S_j имеют вид

$$(6.10) \quad J_{S_j} = \Omega \left(\rho_0 u'_{js} + \frac{M}{c} p_j \right) \quad (j = 1, 2).$$

Подставляя (6.5) и (6.6) в (6.1), с учетом (6.9) и (6.10) получим

$$(6.11) \quad u_1 + \frac{1}{\rho_0 c} \left(M - i k \frac{V_0}{2\Omega b} \right) p_1 = \left(1 + M \frac{\omega_0 R_2}{c} m_Q \right) u_2 + \\ + \frac{1}{\rho_0 c} \left(M + i k \frac{V_0}{2\Omega b} \right) p_2 + cO(\varepsilon^4).$$

Это соотношение рассмотрим в качестве первого условия сопряжения искомых функций, определяющих акустические колебания в водоводе и отсасывающей трубе.

7. Второе условие сопряжения получим с помощью закона сохранения акустической энергии, который будем применять к акустическим колебаниям в области V_0 , описываемым функцией φ'_0 . В соответствии с [3] и в рамках предположений поставленной задачи в интегральной

форме этот закон имеет вид

$$(7.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} E dv + \int_{S_0} \mathbf{I} \cdot \mathbf{v} d\sigma = V_0 c^2 O(\varepsilon^3),$$

где E , \mathbf{I} — плотность и вектор интенсивности потока акустической энергии:

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{p_0'}{c^2} + \rho_0 u_0'^2 \right) + \frac{p_0'}{c^2} \mathbf{u}_0' \cdot \mathbf{U}_0, \quad \mathbf{I} = \left(\frac{p_0'}{\rho_0} + \mathbf{u}_0' \cdot \mathbf{U}_0 \right) \left(\rho_0 \mathbf{u}_0' + \frac{p_0'}{c^2} \mathbf{U}_0 \right).$$

Для амплитудных функций нестационарных составляющих параметров течения соотношение (7.1) с учетом (4.3) с точностью до величин порядка $V_0 c^2 O(\varepsilon^2)$ преобразуется к виду

$$(7.2) \quad J = \int_{V_0} \left[-\frac{k^2}{b^2} \Phi_0^2 + (\nabla \Phi_0)^2 \right] dv - \int_{S_0} \Phi_0 \left[\nabla \Phi_0 - \frac{ikU_0}{bc} \Phi_0 \right] \mathbf{v} d\sigma = 0.$$

Рассмотрим сначала интеграл по объему из (7.2). Так как функция Φ_0 нам неизвестна, то этот интеграл, как и (6.5), будет определяться через параметры течения жидкости в водоводе и отсасывающей трубе в стыковых сечениях S_j с учетом (4.1) и (5.7). При этом следует отметить, что в соотношении (5.7) \tilde{p}_z является неизвестной. Для ее нахождения применим закон сохранения масс к акустическим колебаниям в области V_0 , описываемым функцией Φ_0 . Действуя аналогично п. 6, получим

$$(7.3) \quad u_1 + \frac{1}{\rho_0 c} \left(M - i\bar{k} \frac{V_0}{2\Omega b} \right) p_1 = u_2 + \frac{1}{\rho_0 c} \left(M + i\bar{k} \frac{V_0}{2\Omega b} \right) p_0 + \frac{\omega_0}{\rho_0 c^2} M_0 + cO(\varepsilon^3),$$

где M_0 — амплитуда нестационарной составляющей момента гидродинамических сил, действующих на лопасти решетки при условии (4.2). Значение M_0 можно определить с помощью теоремы об изменении момента количества движения жидкости в спиральной камере. Выражая это изменение через параметры течения на входе и выходе из спиральной камеры и принимая во внимание, что в рассматриваемом случае $\mathbf{u}_0 = 0$ при $s = 0$, найдем

$$(7.4) \quad M_0 = -\rho_0 u_2 [1 + O(\varepsilon)] \int_{S_2} U_\theta r d\sigma.$$

Вычитая из (6.11) соотношение (7.3), с учетом (5.7) и (7.4) имеем

$$\tilde{p}_z (M + ikV_0) = -\rho_0 \omega_0 R_2 u_2 (M m_q + m_z(\mathbf{U}_0)),$$

где

$$\bar{V}_0 = V_0 / 2\Omega b; \quad m_z(\mathbf{U}_0) = \frac{1}{cR_2 \Omega} \int_{S_2} U_\theta r d\sigma.$$

Запишем теперь условие склеивания для Φ_0 при $s = 0$:

$$(7.5) \quad \Phi_0(0) = \frac{i}{\omega} \left(\frac{p_2 - \tilde{p}_z}{\rho_0} + u_2 U_s \right) = \Phi_2(0) - i \frac{\tilde{p}_z}{\rho_0 \omega}.$$

Учитывая (7.5), из (7.2) аналогично п. 6 получим выражение

$$(7.6) \quad \left[\Phi_1 \left(u_1 + \frac{M}{\rho_0 c} p_1 \right) + \bar{V}_0 b \left(-\frac{k^2}{b^2} \Phi_1^2 + u_1^2 \right) \right]_{s=-l_2} = \\ = \left[\Phi_2 \left(u_2 + \frac{M}{\rho_0 c} p_2 \right) - \bar{V}_0 b \left(-\frac{k^2}{b^2} \Phi_2^2 + u_2^2 \right) - i \frac{\tilde{p}_z}{\rho_0 \omega} u_2 \right]_{s=0},$$

которое будем рассматривать в качестве второго условия сопряжения искомых функций.

8. Собственные значения и собственные функции. Подставляя (3.5)–(3.7), (5.3)–(5.6) в (6.14) и (7.6), найдем

$$(8.1) \quad A \exp(ikM(l_1 + l_2)) [\cos kl_1 - (k\bar{V}_0 + iM) \sin kl_1] = \\ = B [\cos kl_2 + iM \sin kl_2 - kV_0 \sin kl_2];$$

$$(8.2) \quad A^2 \exp(2i\bar{k}M(l_1 + l_2)) \left[\frac{1}{2} (1 + M^2) \sin 2\bar{k}l_1 + (iM + \bar{k}\bar{V}_0 \cos 2\bar{k}l_1) \right] = \\ = B^2 [(\cos \bar{k}l_2 + iM \sin \bar{k}l_2)(\sin \bar{k}l_2 - iM \cos \bar{k}l_2) + \bar{k}\bar{V}_0 \cos 2\bar{k}l_2 - k\Phi \cos^2 \bar{k}l_2],$$

где

$$\Phi = \Phi' + i\Phi'' = i \frac{\omega_0 R_2}{\omega b} \frac{m_Q M + m_z (U_0)}{M + i\bar{k}\bar{V}_0}.$$

Возведя в квадрат левую и правую части уравнения (8.1), в совокупности с (8.2) имеем однородную систему алгебраических уравнений относительно неизвестных A^2 и B^2 . Из условия равенства нулю определителя этой системы найдем комплексные собственные значения поставленной задачи с точностью до величин порядка $O(\varepsilon^2)$:

$$(8.3) \quad \bar{k}_m = \frac{m\pi}{l_0 + l_1 + l_2} \left(1 + i \frac{\cos^2 kl_2}{l_1 + l_2} \Phi'' \right) \quad (m = 1, 2, \dots);$$

$$(8.4) \quad \bar{k}_{jn} = \frac{\pi}{l_j + \bar{V}_0} \left[\left(\frac{1}{2} + n \right) + i(-1)^j \frac{M}{\pi} \right] \quad (j = 1, 2; n = 0, 1, 2, \dots).$$

Здесь $l_0 = 2\bar{V}_0 - \Phi' \cos^2 kl_2$ — приведенная эффективная длина спиральной камеры. Учитывая (8.3) и (8.4), из (8.1) получим соотношения

$$(8.5) \quad B_m = (-1)^m \exp(i\bar{k}M(l_1 + l_2)) \left(1 + \frac{2\bar{V}_0 + \Phi \cos^2 kl_2}{l_1 + l_2} \right) A_m, \quad B_{1n} = A_{2n} = 0,$$

подставляя которые в (3.5) и (5.6), найдем выражения для собственных функций в водоводе и отсасывающей трубе.

9. Обсуждение результатов. Полученное множество собственных значений, область определения которых ограничена условием (1.3), можно подразделить на три подмножества:

$\{k_m\}$ — собственные значения, определяющие собственные частоты колебаний жидкости в проточной части, общая длина которой l кратна половинам соответствующих длин волн:

$$l = l_0 + l_1 + l_2 = m \frac{\lambda_m}{2} \quad \left(\lambda_m = cT_m = \frac{2\pi b}{k_m} \right);$$

$\{\bar{k}_{jn}\}$ — собственные значения, определяющие собственные частоты колебаний жидкости в водоводе ($j = 1$) и отсасывающей трубе ($j = 2$), длины которых, сложенные с половиной эффективной длины спиральной камеры, кратны четверти соответствующих длин волн:

$$l_j + \bar{V}_0 = (1 + 2n) \frac{\lambda_{jn}}{4} \quad \left(\lambda_{jn} = \frac{2\pi b}{k_{jn}} \right).$$

Из соотношения (8.5) следует, что нестационарные составляющие параметров течения, отвечающие элементам подмножества $\{k_m\}$, являются непрерывными функциями от s . При этом амплитуда колебаний скорости течения в окрестностях турбины близка к максимальному ее значению. При колебаниях же, отвечающих элементам подмножества $\{\bar{k}_{jn}\}$, амплитуда колебаний скорости в окрестности турбины равна нулю, а нестационарная составляющая давления претерпевает разрыв при переходе через турбину. Последнее обстоятельство свидетельствует о том, что эти колебания по отдельности реализоваться не могут, так как разрыв нестационарной составляющей давления может возникнуть лишь при нестационарной закрутке потока, которая, в свою очередь, пропор-

циональна амплитуде колебаний жидкости в окрестности турбины. Они порождаются колебаниями, соответствующими элементам подмножества $\{k_m\}$, и могут происходить в совокупности с ними как связанные. Механизм возникновения колебаний, отвечающих $\{k_m\}$, по-видимому, связан с нелинейностью процесса взаимодействия турбины с нестационарным потоком, описание которого неявно содержится во втором условии сопряжения. Поэтому такие колебания будем называть квазисобственными. Существование их подтверждают результаты эксперимента, проведенного В. Х. Армом [4]. Частоты колебаний жидкости в проточной части гидротурбины, выявленные в [4] путем спектрального анализа результатов натурных исследований, с точностью до величин порядка $cO(\epsilon)/b$ совпали с частотами ω_1 ($m=1$), ω_{10} , рассчитанными с помощью формул (8.3), (8.4). Установленный в эксперименте факт резкого возрастания интенсивности колебаний в окрестности режима максимального расхода жидкости также согласуется с полученными теоретическими результатами. В соответствии с (8.3) наблюдаемое явление может быть интерпретировано как неустойчивость колебаний, условием которой служит неравенство

$$\Phi'' = M \frac{\omega_0 R_2 m_z(U_0) + k\bar{V}_0 m_Q'' + Mm_Q'}{\omega b (M^2 + k^2 \bar{V}_0^2)} < 0,$$

так как, во-первых, в указанном режиме $m_z(U_0) < 0$ и, во-вторых, согласно теории решеток в нестационарном потоке, на отрывных и околоотрывных режимах имеется большая вероятность изменения знаков с положительного на отрицательный как мнимой, так и действительной части коэффициента нестационарной составляющей момента m_Q . Следует отметить, что теоретическое определение коэффициентов m_Q представляет собой достаточно сложную задачу даже для безотрывного обтекания лопастей [5, 6]. Некоторое представление о поведении нестационарных гидродинамических характеристик на отрывных режимах обтекания дают экспериментальные результаты, полученные для осевых решеток [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Li X., Brekke H. Analyse des vibrations hydrauliques libres par la matrice de structure // 15th Sympos. MAGI: Modern technology in hydraulic energy production, Belgrade, 1990: Proc.
2. Pulpitel L. Oscillation de pression a base frequence on systems hydrauliques et l'influence de lacration // Ibid.
3. Мервин Е. Голдштейн. Аэроакустика.— М.: Машиностроение, 1981.
4. Арм В. Х., Курзин В. Б. Низкочастотные гидроакустические колебания в проточной части турбомашин // Аэроупругость турбомашин: Тез. докл. XIII Всесоюз. конф.— М., 1991.— (Тр. ЦИАМ; № 1294).
5. Tsujimoto Y., Imaichi K., Tomohiro T., Gotoo M. An analysis of torque on a quasi-three-dimensional centrifugal impeller // Bull. JSME.— 1984.— V. 27, N 232.
6. Tsujimoto Y., Imaichi K., Tomohiro T., Gotoo M. A two-dimensional analysis of unsteady torque on mixed flow impellers // Trans. ASME. Ser. D. J. Basic Eng.— 1986.— V. 108, N 2.
7. Новости зарубежной науки и техники. Сер. Авиационное двигателестроение.— 1984.— Вып. 8.

г. Новосибирск

Поступила 29/II 1992 г.,
в окончательном варианте — 27/III 1992 г.