УДК 539.375

КОЭФФИЦИЕНТЫ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ И УСЛОВИЯ ДЕВИАЦИИ ТРЕЩИНЫ В ХРУПКОМ АНИЗОТРОПНОМ ТЕЛЕ

С. А. Назаров

Институт проблем машиноведения РАН, 199178 Санкт-Петербург
E-mail: serna@snark.ipme.ru

При произвольной анизотропии в линеале сингулярных решений, порождающих корневые особенности напряжений в вершине трещины, введен специальный базис, который обладает теми же свойствами, что и в изотропном случае, и позволяет получить простые интегральные представления для атрибутов энергетического критерия разрушения, в частности, определить условия отклонения трещины от прямолинейного пути.

Ключевые слова: трещина, коэффициенты интенсивности, хрупкое анизотропное тело.

1. Нормировки сингулярных решений. Для изотропных и некоторых ортотропных плоских упругих сред прямые вычисления (см. [1–3] и др.) показывают, что напряжения имеют корневые особенности $O(r^{-1/2})$ вблизи вершины $\mathcal{O}$ трещины. При этом угловые части соответствующих векторов смещений

$$U^j(x) = r^{1/2}\Phi^j(\varphi), \qquad j = 1,2 \tag{1.1}$$

выбираются в соответствии с классическим определением коэффициентов интенсивности напряжений (КИН)

$$K_i = \lim_{x\to+0}(2\pi r)^{1/2}\sigma_{3-i,2}(u;x_1,0), \qquad i = 1,2. \tag{1.2}$$

В (1.1), (1.2) $x = (x_1, x_2)$ и (r,φ) — декартовы и полярные системы координат с центром $\mathcal{O}$, причем положительная полуось $\mathcal{O}x_1$ и полярная ось лежат на продолжении трещины, вдоль которого и вычисляется предел (1.2); $\sigma_{jk}(u)$ — декартовы компоненты тензора напряжений, найденные по полю смещений $u = (u_1, u_2)$. В работах [4, 5] установлено, что корневая сингулярность сохраняется при любой анизотропии, а в [6] проверено, что определение КИН (1.2) остается непротиворечивым. Последняя проверка весьма проста. Если для смещений (1.1) напряжения $\sigma_{k2}(U^j;x_1,0)$ линейно зависимы на $\mathcal{O}x_1$, то найдется поле $U(x) = r^{1/2}\Phi(\varphi)$, для которого

$$\sigma_{21}(U;x_1,0) = \sigma_{22}(U;x_1,0) = 0, \qquad x_1 > 0. \tag{1.3}$$

Вместе с уравнениями равновесия и краевыми условиями

$$\begin{gathered}-\frac{\partial}{\partial x_1}\,\sigma_{1k}(U;x) - \frac{\partial}{\partial x_2}\,\sigma_{2k}(U;x) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Lambda, \quad k = 1,2,\\ \sigma_{21}(U;x_1,0) = 0, \qquad \sigma_{22}(U;x_1,0) = 0, \qquad x_1 < 0,\end{gathered} \tag{1.4}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 03-01-00835).

где $\Lambda = \{x \in \mathbb{R}^2\colon x_1 \leqslant 0,\ x_2 = 0\}$ — полубесконечный разрез, соотношения (1.3) показывают, что U — решение однородной задачи теории упругости в верхней полуплоскости, ограниченное в любой окрестности точки $\mathcal{O}$. Как известно, такое решение гладкое, т. е. особенность $O(r^{1/2})$ запрещена. Полученное противоречие показывает, что всегда базис (1.1) сингулярных решений можно подчинить условиям нормировки

$$\sigma_{3-i,2}(U^j; r, 0) = \delta_{i,j}(2\pi r)^{-1/2}, \qquad i, j = 1, 2 \tag{1.5}$$

и тем самым дать корректное определение двум КИН — K_1 и K_2. В правой части (1.5) $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера.

Базис (1.1), удовлетворяющий условиям (1.5), следует считать адаптированным к силовым критериям разрушения Ирвина, Новожилова и др. В работах [6, 7] предложены базисы, приспособленные соответственно к энергетическому и деформационному критериям. Во втором случае условия нормировки, заменяющие (1.5), имеют вид

$$(1/2)[U_i^j](-r) = 4(2\pi)^{-1/2} B_{11,11} \delta_{3-i,j} r^{1/2}, \qquad i, j = 1, 2. \tag{1.6}$$

Здесь $[u](x_1) = u(x_1, +0) - u(x_1, -0)$ — скачок вектора смещений на берегах трещины Λ; $B_{jk,pq}$ — элементы тензора податливости, обратного для тензора жесткости A в законе Гука $\sigma = A\varepsilon$ (ε — тензор деформаций). Как и ранее, возможность соблюсти условия (1.6) устанавливается от противного: если у поля смещений $U(x) = r^{1/2}\Phi(\varphi)$ нулевой скачок на разрезе Λ, то в силу (1.4) оно является решением уравнений равновесия на проколотой плоскости $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}$, а значит, может иметь только целый показатель однородности, но не 1/2. Причины появления в правой части (1.6) элемента $B_{11,11}$, а не более естественных элементов $B_{22,22}$ и $B_{12,12}$ станут понятны далее.

Множители в правой части (1.6) (они не были введены в работе [7]) подобраны так, что для изотропного тела нормировки (1.5) и (1.6) дают один и тот же базис (1.1). В анизотропном случае базисы $\{U^{j\sigma}\}$ и $\{U^{j\varepsilon}\}$, вообще говоря, различаются. Для них и для коэффициентов K_j^σ и K_j^ε в разложениях вблизи вершины трещины $\mathcal{O}$ поля смещений

$$u(x) = K_1^\sigma U^{j\sigma}(x) + K_2^\sigma U^{j\sigma}(x) + \ldots = K_1^\varepsilon U^{1\varepsilon}(x) + K_2^\varepsilon U^{2\varepsilon}(x) + \ldots \tag{1.7}$$

имеются связи

$$U^{j\sigma} = T_{1j} U^{1\varepsilon} + T_{2j} U^{2\varepsilon}, \qquad K_j^\varepsilon = K_1^\sigma T_{j1} + K_2^\sigma T_{j2}. \tag{1.8}$$

Элементы T_{jk} матрицы T размером 2×2 зависят как от упругих свойств материала, так и от направления трещины (см. далее (4.7)). Отметим, что в соответствии с требованием (1.6) коэффициенты во втором представлении (1.7) находятся по формуле

$$K_i^\varepsilon = (1/8)(2\pi)^{1/2} B_{11,11}^{-1} \lim_{x \to -0} r^{-1/2} [u_{3-i}](x_1), \qquad i = 1, 2. \tag{1.9}$$

Согласно [8] (см. также [6, разд. 4]) для каждого базиса (1.1) можно единственным образом определить базис весовых функций

$$V^k(x) = r^{-1/2}\Psi^k(\varphi), \qquad k = 1, 2, \tag{1.10}$$

при котором выполнены условия биортогональности

$$Q(U^j, V^k; \Gamma) = \delta_{j,k}, \qquad j, k = 1, 2. \tag{1.11}$$

Здесь Q — антисимметричная (т. е. $Q(u, v; \Gamma) = -Q(v, u; \Gamma)$) форма, возникающая как контурный интеграл в формуле Грина,

$$Q(u, v; \Gamma) = \int\limits_\Gamma \{v(x) \cdot \sigma^{(n)}(u; x) - u(x) \cdot \sigma^{(n)}(v; x)\}\, ds, \tag{1.12}$$

где ds — элемент длины простой дуги Γ, соединяющей берега $\Lambda^{\pm}$ разреза и охватывающей вершину $\mathcal{O}$; $\sigma^{(n)} = \sigma n$ — вектор нормальных напряжений; n — единичная внешняя нормаль к границе области, содержащейся внутри Γ. Если u и v удовлетворяют задаче (1.4), то в силу формулы Грина интеграл (1.12) не зависит от пути Γ. Кроме того, в работе [9] (см. также [6, разд. 4]) доказана формула, напоминающая правило интегрирования по частям, а именно

$$Q(\partial_1 u, v; \Gamma) = -Q(u, \partial_1 v; \Gamma), \tag{1.13}$$

где $\partial_1 = \partial/\partial x_1$ — дифференцирование вдоль трещины.

Производная $\partial_1 U^j$ по-прежнему решает задачу (1.4), но приобретает особенности $O(r^{-1/2})$ в вершине трещины, и поэтому

$$\partial_1 U^j(x) = -M_{j1} V^1(x) - M_{j2} V^2(x), \qquad j = 1, 2. \tag{1.14}$$

Благодаря соотношениям (1.11) и (1.13) верны интегральные представления

$$M_{jk} = Q(\partial_1 U^j, U^k; \Gamma) = Q(\partial_1 U^k, U^j; \Gamma) = M_{kj}, \tag{1.15}$$

т. е. матрица M размером 2×2, составленная из коэффициентов в разложении (1.14), является симметрической. К тому же, в [9, 6] установлена ее положительная определенность. Следовательно, можно найти базис $\{U^{je}\}$, для которого справедливы равенства $\partial_1 U^{je} = -m_j V^{je}$, а $m_j > 0$ — (положительные) собственные значения матрицы M. Такой базис связывается с энергетическим критерием разрушения (см. [6, разд. 5]) и для него выполнены подобные (1.7) и (1.8) представления.

2. Дополнительные свойства деформационного базиса. Всюду далее обозначаем $U^j = U^{j\varepsilon}$. Если $\{x : x_2 = 0\}$ — плоскость упругой симметрии, то U_k^j — четные функции переменной при $j \neq k$ и нечетные при $j = k$. В частности,

$$U_1^1(x_1, \pm 0) = 0, \qquad U_1^2(x_1, +0) = -U_1^2(x_1, -0) \qquad \text{при} \quad x_1 < 0. \tag{2.1}$$

Еще одно наблюдение относится к изотропному случаю: явные формулы для первой моды U^1 (см., например, [2, с. 316]) показывают, что

$$\sigma_{11}(U^1; x_1 \pm 0) = 0 \qquad \text{при} \quad x_1 < 0. \tag{2.2}$$

Иными словами, согласно краевым условиям (1.4) при $x_1 < 0$ и формуле (2.2) на берегах $\Lambda^{\pm}$ разреза аннулируются все напряжения, а значит, ввиду уравнений равновесия верны формулы

$$\begin{gathered} \partial_2 \sigma_{k2}(U^1; x_1, \pm 0) = -\partial_1 \sigma_{k1}(U^1; x_1, \pm 0) = 0, \qquad x_1 < 0, \quad k = 1, 2, \\ \partial_2^2 \sigma_{22}(U^1; x_1, \pm 0) = -\partial_1 \partial_2 \sigma_{k1}(U^1; x_1, \pm 0) = \partial_1^2 \sigma_{11}(U^1; x_1, \pm 0) = 0, \qquad x_1 < 0. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Ближайшая цель — доказательство соотношений (2.1)–(2.3) при произвольной анизотропии.

Пусть e — тензор с декартовыми компонентами $e_{11} = 1$ и $e_{pq} = 0$ при $p + q > 2$. Поскольку $B_{11,11} = e \cdot Be$ и $\sigma(U^j) = e\sigma_{11}(U^j)$ на $\Lambda^{\pm}$ в силу краевых условий (1.4), находим, что

$$\begin{aligned} \partial_1 U^j(x_1, \pm 0) = \varepsilon_{11}(U^j; x_1, \pm 0) = e \cdot \varepsilon(U^j; x_1, \pm 0) = \\ = e \cdot B\sigma(U^j; x_1, \pm 0) = B_{11,11} \sigma_{11}(U^j; x_1, \pm 0), \qquad x_1 < 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Итак, равенство (2.2), а затем и равенства (2.3) выводятся из свойств (2.1) базиса. Для проверки этих свойств подставим поля $\partial_2 U^2$ и U^j в формулу Грина для разомкнутого кольца $\Xi = \{x\colon 0 < a < r < b,\ \varphi \in (-\pi, \pi)\}$. Используя уравнение (1.4), находим, что

$$Q(\partial_2 U^2, U^j; \Gamma_b) - Q(\partial_2 U^2, U^j; \Gamma_a) = \sum_{\pm} \pm \int\limits_a^b \sum_{k=1}^{2} U_k^j(-r, \pm 0) \sigma_{k2}(\partial_2 U^2; -r, \pm 0)\, dr. \tag{2.5}$$

При этом Γ_ρ — окружность радиусом ρ и, так как подынтегральное выражение в (1.12) при $u=U^j$ и $v=\partial_2 U^2$ составляет $O(r^{-1})$, интеграл $Q(\partial_2 U^2, U^j; \Gamma_\rho)$ не зависит от ρ, т. е. левая часть (2.5) равна нулю. Кроме того, $\partial_2\sigma_{k2}(U^2) = -\partial_1\sigma_{k1}(U^2)$ и, следовательно, при помощи краевых условий (1.4) при $x_1<0$ и равенства (2.4) преобразуем формулу (2.5) к виду

$$0 = B^{-1}_{11,11}\sum_{\pm}\pm\int\limits_a^b U_1^j(-r,\pm 0)\partial_1^2 U_1^2(-r,\pm 0)\,dr =$$

$$= B^{-1}_{11,11}\ln\frac{a}{b}\,\{\Phi_1^j(+\pi)\Phi_1^2(+\pi) - \Phi_1^j(-\pi)\Phi_1^2(-\pi)\}.$$

Обращение в нуль разности из фигурных скобок означает, что

$$[U_1^j](-r)\sum_{\pm} U_1^2(-r,\pm 0) + [U_1^2](-r)\sum_{\pm} U_1^j(-r,\pm 0) = 0,$$

т. е. искомые соотношения (2.1) выполняются благодаря нормировке (1.6).

Укажем одно занятное следствие формул (2.3), в силу которых производная $\partial_2 U^1$ (дифференцирование ведется поперек трещины!) является степенным решением задачи (1.4), но приобретает особенность $O(r^{-1/2})$ в вершине $\mathcal{O}$. Так как согласно (2.2) тензор деформаций $\varepsilon(U^1)$ аннулируется на берегах разреза, при учете условий (1.6) определяем скачки

$$[\partial_2 U_1^1](-r) = 2[\varepsilon_{12}(U^1)](-r) - [\partial_1 U_2^1](-r) = 4(2\pi)^{-1/2}B_{11,11}r^{-1/2},$$

$$[\partial_2 U_2^1](-r) = [\varepsilon_{22}(U^1)](-r) = 0.$$

Они такие же, как у $-\partial_1 U^2$, и, следовательно, ввиду единственности разложения по базису $\{\partial_1 U^j\}$ степенных решений с показателем $-1/2$ (весовых функций; см. (1.10) и (1.14)), выполняется равенство

$$\partial_2 U^1 = -\partial_1 U^2. \tag{2.6}$$

3. Определение коэффициентов интенсивности напряжений. В работах [10–12, 7] и др. соотношения (2.1), (2.2) и (2.6), найденные для изотропного материала прямыми вычислениями, использовались для образования и применения весовых функций и инвариантных интегралов, в том числе высших порядков, для определения формы искривления пути трещин (малыми) сдвиговыми нагрузками. Знаменателен тот факт, что две связи, не отмеченные в (2.1), но обеспеченные свойствами симметрии в изотропном случае, не были востребованы в цитированных выше работах. Все это побуждает принять "деформационный" базис сингулярных решений, подчиненный условиям нормировки (1.6), в качестве основного.

Для того чтобы придать смысл КИН коэффициентам K_j^ε, фигурирующим в формулах (1.7) и (1.9), перепишем соотношения (1.6), используя только напряжения. Из (2.4) и (1.6) вытекает, что

$$[\sigma_{11}(U^j)](-r) = -4(2\pi r)^{-1/2}\delta_{2,j}, \qquad j=1,2. \tag{3.1}$$

Ввиду тождества (2.2) приведенная формула не позволяет однозначно восстановить U^1, однако благодаря соотношениям (2.6) и (3.1) получаем еще одну формулу

$$[\partial_2\sigma_{11}(U^1)](-r) = -[\partial_1\sigma_{11}(U^2)](-r) = 2(2\pi)^{-1/2}r^{-3/2}. \tag{3.2}$$

Подчеркнем, что $\partial/\partial x_1 = -\partial/\partial r$ на разрезе Λ. Теперь базис $\{U^{j\varepsilon}\}$ и КИН K_j^ε определены. Отметим еще, что согласно второму равенству в (2.1) левую часть (1.6) при $j=2$ можно заменить на $\pm U_1^2(x_1,\pm 0)$, а для нормировки U^1 пользоваться формулой (2.6) вместо (3.2).

Все приведенные выкладки и выводы сохраняют силу для трещины на стыке анизотропных сред при условии, что показатели сингулярностей напряжений остаются вещественными (см. работу [6] и цитируемую в ней литературу). В силу требования (1.6) соотношение $K_1 > 0$ обеспечивает раскрытие устья трещины (отсутствие контакта берегов вблизи вершины $\mathcal{O}$) и выполнение односторонних связей в задаче Синьорини

$$\begin{gathered} \sigma_{21}(U; x_1, \pm 0) = 0, \qquad [\sigma_{22}(U)](x_1) = 0, \qquad \sigma_{22}(U)(x_1, \pm 0) \leqslant 0, \\ [U_2](x_1) \geqslant 0, \qquad [U_2](x_1)\sigma_{22}(U)(x_1, \pm 0) = 0, \qquad x_1 < 0. \end{gathered} \tag{3.3}$$

Подчеркнем, что при наличии степенных решений $r^{\pm i\gamma + 1/2}\Phi^{\pm}(\varphi)$ с $\gamma > 0$ соотношения (3.3) нарушены при любых ненулевых (комплексных) КИН, т. е. без полного решения задачи Синьорини не обойтись — по сути в [13, 14] решается именно нелинейная задача, хотя и используются линейные определяющие соотношения. В связи с этим отметим работы [15, 16], в которых найдена скорость высвобождения потенциальной энергии деформации для прямолинейно растущей трещины при возможном контакте ее берегов.

Еще одно преимущество деформационного базиса $\{U^{j\varepsilon}\}$ перед силовым $\{U^{j\sigma}\}$ — сохранение $U^{2\varepsilon}$ как (единственного) степенного решения в модельной задаче о трещине с сомкнутыми берегами (ср. с [13, 14], см. также краевые условия (3.3), где знаки "$\geqslant$" и "$\leqslant$" заменены на "$=$"). Кроме того, элемент $U^{2\varepsilon}$ не нуждается в перестройке при преобразованиях, реализующих алгебраическую эквивалентность анизотропных сред [17, 3].

4. Об условии девиации трещины. Согласно общим результатам [18, 19, гл. 7], приспособленным в [6, 7] к линейным задачам теории упругости, скорость высвобождения энергии при образовании отростка с малой длиной $h > 0$, направленного под углом θ из вершины магистральной трещины, находится по формуле

$$\Delta U(h, \theta) = -\frac{1}{2}\, h \sum_{j,k=1}^{2} \mathcal{M}_{jk}(\theta) K_j K_k + O(h^{3/2}), \qquad h \to +0, \tag{4.1}$$

в которой $\Delta U(h, \theta)$ — приращение потенциальной энергии деформации; $K_j = K_j^{\varepsilon}$ — КИН (1.9) в формуле (1.7) для решения задачи о трещине в начальном положении. В работе [6] показано, что

$$\mathcal{M}(0) = M, \tag{4.2}$$

а элементы матрицы M берутся из соотношений (1.14), (1.15). В той же работе дано другое представление для $\Delta U(h, \theta)$, интерпретируемое как "апостериорная" формула Гриффитса и связанное с одним из инвариантных интегралов.

При помощи асимптотического представления (4.1) находится связь между матрицами M и T из формул (1.14), (4.2) и (1.7), (1.8). Обозначим через u и u^h решения задач о деформации тела Ω с краевыми прямолинейными трещинами Λ и Λ^h в отсутствие массовых сил и при одинаковых поверхностных нагрузках g, приложенных к внешней границе $\partial\Omega$ и равных нулю на берегах трещин. Подставив u и u^h в формулу Грина для области $\Omega \setminus \Lambda^h$, получаем равенство

$$\int\limits_{\partial\Omega} \big(u^h \cdot \sigma^{(n)}(u) - u \cdot \sigma^{(n)}(u^h)\big)\, ds = \sum_{\pm} \int\limits_{\Lambda^h_{\pm} \setminus \Lambda_{\pm}} \big(u \cdot \sigma^{(n)}(u^h) - u^h \cdot \sigma^{(n)}(u)\big)\, ds =$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \int\limits_0^h [u_i^h](x_1) \sigma_{2i}(u; x_1, 0)\, dx_1. \tag{4.3}$$

Так как $\sigma^{(n)}(u) = \sigma^{(n)}(u^h) = g$ на $\partial\Omega$, левая часть I_l формулы (4.3) совпадает с приращением работы внешних сил и по теореме Клапейрона

$$I_l = \int\limits_{\partial\Omega} g \cdot (u^h - u)\, ds = -2\Delta U(h, 0). \tag{4.4}$$

Как доказано в [9] (см. также [6]), вблизи вершины $\mathcal{O}^h$ удлиненной трещины Λ^h поле $u^h(x)$ с точностью $O(h^{3/2})$ приближается суммой

$$c + K_1^\varepsilon U^{1\varepsilon}(x_1 - h, x_2) + K_2^\varepsilon U^{2\varepsilon}(x_1 - h, x_2), \tag{4.5}$$

где c — постоянный вектор; K_i^ε — КИН при начальном положении трещины; $(x_1 - h, x_2)$ — декартовы координаты с центром $\mathcal{O}^h$. Для вычисления правой части I_r равенства (4.3) воспользуемся приближением (4.5) для u^h и первым представлением (1.7) для u. При учете условий нормировки (1.6), (1.5) и связи (1.8) КИН K_i^ε и K_i^σ находим, что

$$I_r = \frac{4}{\pi} B_{11,11} \sum_{i=1}^{2} K_i^\sigma K_i^\varepsilon \int\limits_0^h r^{-1/2}(h-r)^{1/2}\, dr =$$
$$= 2hB_{11,11} \sum_{i=1}^{2} K_i^\sigma K_i^\varepsilon + o(h) = 2hB_{11,11} \sum_{i,j=1}^{2} T_{ij}^{-1} K_i^\varepsilon K_j^\varepsilon + o(h). \tag{4.6}$$

Здесь T_{ij}^{-1} — элементы матрицы T^{-1}, обратной для T. Сравнивая выражения (4.4), (4.6) и (4.3) с членами асимптотики (4.1), приходим к соотношению

$$M = 2B_{11,11} T^{-1}. \tag{4.7}$$

Отсюда, в частности, следует, что матрица T перехода от деформационного базиса к силовому является симметрической и положительно определенной.

Элементы матрицы $\mathcal{M}(\theta)$, также симметрической и положительно определенной [7], являются коэффициентами в разложении на бесконечности

$$w^j(x) = U^j(x) + \sum_{k=1}^{2} \mathcal{M}_{jk}(\theta) V^k(x) + O(r^{-1}), \qquad r \to \infty \tag{4.8}$$

решения задачи о полубесконечном разрезе Λ с отростком $\Upsilon(\theta) = \{x \colon x_1 \in [0, \cos\theta],\ x_2 = x_1 \operatorname{tg}\theta\}$

$$\begin{gathered} \partial_1 \sigma_{1k}(w^j; x) - \partial_2 \sigma_{2k}(w^j; x) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^2 \setminus (\Lambda \cup \Upsilon(\theta)), \quad k = 1, 2, \\ \sigma^{(n)}(w^j; x) = \sigma(w^j; x) n(x) = 0, \qquad x \in \Lambda^\pm \cup \Upsilon(\theta)^\pm. \end{gathered} \tag{4.9}$$

Здесь n — единичный вектор внешней нормали,

$$n = (0, \mp 1) \quad \text{на} \quad \Lambda^\pm, \qquad n = (\pm\sin\theta, \mp\cos\theta)) \quad \text{на} \quad \Upsilon(\theta)^\pm. \tag{4.10}$$

Подчеркнем, что согласно соотношениям (4.8) и (1.1) смещения $w^j(x)$ растут на бесконечности, решение однородной задачи (4.9) оказывается нетривиальным, а коэффициенты $\mathcal{M}_{jk}(\theta)$ при затухающих составляющих (1.10) определяются однозначно.

Пусть нагружение простое, т. е. КИН $K_j = \tau K_j^0$ пропорциональны общему времениподобному параметру $\tau > 0$. Предположим, что трещина раскрыта и, в частности, $K_1^0 > 0$.

В соответствии с представлением (4.1) энергетический критерий Гриффитса утверждает, что трещина испускает отросток в направлении θ_* в момент τ_*, если выполняются соотношения

$$\begin{gathered} F(\theta_*; \tau_*) = 0, \\ F(\theta; \tau) < 0 \quad \text{при любых} \quad \tau < \tau_* \quad \text{и} \quad \theta. \end{gathered} \tag{4.11}$$

При этом

$$F(\tau; \theta) = \tau^2 \sum_{j,k=1}^{2} \mathcal{M}_{jk}(\theta) K_j K_k - 4\gamma(\theta), \tag{4.12}$$

а $\gamma(\theta)$ — плотность поверхностной энергии, зависящая, вообще говоря, от направления отростка $\Upsilon(\theta)$. Таким образом, непрерывная функция $F(\,\cdot\,; \theta_*)$ имеет глобальный максимум в точке $\theta = \theta_*$ (при наличии нескольких таких точек следует ставить вопрос о бифуркации или ветвлении трещины). Подобная интерпретация энергетического критерия разрушения обычна (ср. с [20, 21, 7] и др.) и, хотя при сложном нагружении и квазистатическом развитии трещины требуются уточнения, такая интерпретация вполне приемлема для определения угла отклонения θ_*.

В силу первого условия в (4.11) и условия (4.2) прямолинейному росту трещины ($\theta = 0$) отвечает такое критическое значение параметра нагружения:

$$\tau_0 = 2\gamma(0)^{1/2} \Big(\sum_{j,k=1}^{2} M_{jk} K_j K_k \Big)^{-1/2}. \tag{4.13}$$

В формуле (4.13) фигурируют КИН и коэффициенты M_{jk}, выраженные в (1.15) через интегралы (1.12) от элементов базиса $\{U^{j\varepsilon}\}$. Если

$$\tau_0^2 \sum_{j,k=1}^{2} \mathcal{M}'_{jk}(0) K_j K_k \neq 4\gamma'(0), \tag{4.14}$$

где штрихом обозначена производная по углу θ, то второе условие в (4.11) заведомо нарушено, трещина обязательно отклоняется от первоначального направления (наблюдается ее девиация), разрушение начинается ранее, т. е. $\tau_* < \tau_0$, и критическая нагрузка уменьшается.

Вычислим производные $\mathcal{M}'_{jk}(0)$, используя установленные свойства деформационного базиса. С этой целью сделаем замену переменных

$$x \mapsto y = (y_1, y_2) = (x_1 - \cos\theta, x_2 - \sin\theta) \tag{4.15}$$

и, считая угол θ малым, снесем краевые условия, записанные во второй строке (4.9), на луч $L = \{y\colon y_1 \leqslant 0,\, y_2 = 0\}$. Для слабоискривленных гладких и изломанных трещин метод спрямления применялся в работах [22–24, 12, 7] и др. (в [25] предложен альтернативный подход); он нашел строгое обоснование в [19, гл. 5]. Ограничиваясь формальными асимтотическими конструкциями и ссылаясь на [19, 26] в части их обоснования, ищем решение задачи (4.9), (4.8) в виде

$$w^j(x) = U^j(y) + \theta W^j(y) + \ldots\,. \tag{4.16}$$

Здесь и далее многоточием обозначаются члены, несущественные для вычислений. Применяя формулу Маклорена относительно переменной $\rho^{-1} := |y|^{-1}$ и учитывая соотношения (4.15) и (1.14), преобразуем асимптотическое условие (4.8) к виду

$$U^j(y) + \theta W^j(y) + \ldots = w^j(x) = U^j(x) + \sum_{k=1}^{2} \mathcal{M}_{jk}(\theta) V^k(x) + \ldots =$$

$$= U^j(y) + \cos\theta\partial_1 U^j(y) + \sin\theta\partial_2 U^j(y) + \sum_{k=1}^{2}\mathcal{M}_{jk}(\theta)V^k(y) + \ldots =$$

$$= U^j(y) + \sum_{k=1}^{2}(\mathcal{M}_{jk}(0) - M_{jk})V^k(y) + \theta\Big\{\partial_2 U^j(y) + \sum_{k=1}^{2}\mathcal{M}'_{jk}(0)V^k(y)\Big\} + \ldots .$$

Отсюда выводим равенство (4.2) и соотношения

$$W^j(y) = \partial_2 U^j(y) + \sum_{k=1}^{2}\mathcal{M}'_{jk}(0)V^k(y) + O(\rho^{-1}), \qquad j = 1, 2. \tag{4.17}$$

Следовательно, поле $W^j(y)$ исчезает на бесконечности как $O(\rho^{-1/2})$. Разумеется, оно удовлетворяет однородным уравнениям равновесия в (1.4). Отыскивая краевые условия на берегах разреза L, в соответствии с краевым условием, записанным во второй строке (4.9), имеем при $k = 1, 2$ и $y_1 \in (-\infty, -1)$

$$0 = \sigma_{2k}(w^j; x_1, \pm 0) = \sigma_{2k}(U^j + \theta W^j; y)\big|_{x_2=\pm 0} + \ldots =$$

$$= \sigma_{2k}(U^j; y_1, -\sin\theta \pm 0) + \theta\sigma_{2k}(W^j; y_1, -\sin\theta \pm 0) + \ldots =$$

$$= \sigma_{2k}(U^j; y_1, \pm 0) + \theta\{\sigma_{2k}(W^j; y_1, \pm 0) - \partial_2\sigma_{2k}(U^j; y_1, \pm 0)\} + \ldots .$$

Учитывая краевые условия в задаче (1.4) и свойства (2.2), (2.3) векторов U^j, получаем, что

$$\begin{gathered}\sigma_{2k}(W^1; y_1, \pm 0) = 0, \quad k = 1, 2; \qquad \sigma_{22}(W^2; y_1, \pm 0) = 0,\\ \sigma_{21}(W^2; y_1, \pm 0) = -\partial_1\sigma_{11}(U^2; y_1, \pm 0), \qquad y_1 \in (-\infty, -1).\end{gathered} \tag{4.18}$$

В силу формулы (4.10) для нормали n аналогичные операции с напряжениями на берегах отростка

$$0 = \sigma_{2k}(w^j; x_1, x_1 \operatorname{tg}\theta \pm 0) = \sigma_{2k}(U^j + \theta W^j; y)\big|_{x_2=x_1 \operatorname{tg}\theta \pm 0} + \ldots =$$

$$= \sigma_{2k}(U^j; y_1, \pm 0) + \theta\{\sigma_{2k}(W^j; y_1, \pm 0) - y_1\partial_2\sigma_{2k}(U^j; y_1, \pm 0)\} + \ldots$$

дают такие краевые условия:

$$\begin{gathered}\sigma_{2k}(W^1; y_1, \pm 0) = 0, \quad k = 1, 2; \qquad \sigma_{22}(W^2; y_1, \pm 0) = 0,\\ \sigma_{21}(W^2; y_1, \pm 0) = y_1\partial_1\sigma_{11}(U^2; y_1, \pm 0) + \sigma_{11}(U^2; y_1, \pm 0), \qquad y_1 \in (-1, 0).\end{gathered} \tag{4.19}$$

В итоге получаем, что W^1 — исчезающее на бесконечности ограниченное решение задачи (1.4), т. е. $W^1 = 0$, и сумма указанных справа в (4.17) асимптотических членов равна нулю в случае $j = 1$. Теперь при учете соотношений (2.6) и (1.14), где $j = 2$, заключаем, что

$$\mathcal{M}'_{11}(0) = -M_{21} = -Q(\partial_1 U^1, U^2; \Gamma), \qquad \mathcal{M}'_{12}(0) = -M_{22} = -Q(\partial_1 U^2, U^2; \Gamma). \tag{4.20}$$

Так как $\mathcal{M}(\theta)$ — симметрическая матрица, осталось вычислить производную $\mathcal{M}'_{22}(0)$. Воспользуемся формулой Грина для решений W^2 и U^2 в круге $\{y : \rho = R\}$ с радиальным надрезом; после упрощений получаем равенство

$$Q(W^2, U^2; \Gamma_R) = \sum_{\pm} \pm \int_{-R}^{0} U_1^2(y_1, \pm 0)\sigma_{21}(W^2; y_1, \pm 0)\, dy_1.$$

В силу формул (2.1), (2.4) и (4.18), (4.19) подынтегральные выражения на верхнем и нижнем берегах $L^{\pm}$ совпадают и поэтому $Q(W^2, U^2; \Gamma_R) = 0$. Предельный переход $R \to +\infty$ замещает W^2 суммой асимптотических членов, указанных в правой части формулы (4.17), где $j = 2$, и в результате при помощи нормировки (1.11) приходим к соотношению

$$\mathcal{M}'_{22}(0) = Q(\partial_2 U^2, U^2; \Gamma_R). \tag{4.21}$$

Если $\{x : x_2 = 0\}$ — плоскость упругой симметрии, то выражение (4.21) обращается в нуль. Отметим, что для изотропного случая

$$M_{11} = M_{22} = (\lambda + 2\mu)[2\mu(\lambda + \mu)]^{-1}, \qquad M_{12} = M_{21} = 0,$$

где $\lambda \geqslant 0$, $\mu > 0$ — постоянные Ламе.

Форма записи (4.20) и (4.21) напоминает (1.15), однако между формулами (1.15), (4.20) и (4.21) имеется существенная разница: в первой группе равенств Γ — любая простая дуга, соединяющая берега разреза и охватывающая вершину, но в правой части (4.21) дуга Γ_R должна начинаться и оканчиваться в одной точке.

Итак, при произвольной анизотропии деформационный базис сингулярных решений (1.1) дает простые интегральные представления (4.2), (4.20) и (1.15), (4.21) для всех элементов матриц $\mathcal{M}(0)$ и $\mathcal{M}'(0)$, фигурирующих в формулах (4.1), (4.13), (4.14) и относящихся к атрибутам критерия Гриффитса.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Williams M. L.** Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extensions // J. Appl. Mech. 1952. V. 19. P. 526–528.
2. **Партон В. З., Перлин П. И.** Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981.
3. **Куликов А. А., Назаров С. А.** Принцип соответствия в плоских задачах о прямолинейном развитии трещин // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2004. № 1. С. 77–87.
4. **Duduchava R., Wendland W. L.** The Wiener — Hopf method for systems of pseudodifferential equations with an application to crack problems // Integral Equations Operator Theory. 1995. V. 23, N 3. P. 294–335.
5. **Costabel M., Dauge M.** Crack singularities for general elliptic systems // Math. Nachr. 2002. Bd 235. S. 29–49.
6. **Назаров С. А.** Трещина на стыке анизотропных тел. Сингулярности напряжений и инвариантные интегралы // Прикл. математика и механика. 1998. Т. 62, № 3. С. 489–502.
7. **Аргатов И. И., Назаров С. А.** Высвобождение энергии при изломе трещины в плоском анизотропном теле // Прикл. математика и механика. 2002. Т. 66, № 3. С. 502–514.
8. **Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.** О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в области с коническими точками // Math. Nachr. 1977. Bd 76. S. 29–60.
9. **Назаров С. А.** Весовые функции и инвариантные интегралы // Вычислительная механика деформируемого твердого тела. 1990. Вып. 1. С. 17–31.
10. **Назаров С. А., Полякова О. Р.** Весовые функции и инвариантные интегралы высших порядков // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1995. № 1. С. 104–119.
11. **Назаров С. А.** При помощи инвариантных интегралов можно вычислить все коэффициенты при младших сингулярностях поля напряжений // Вестн. С.-Петерб. гос. ун-та. Сер. 1. 1996. Вып. 4 (№ 22). С. 95–99.
12. **Мовчан А. Б., Назаров С. А., Полякова О. Р.** Искривление траектории при квазистатическом росте трещины в плоскости с малым дефектом // Исследования по упругости и пластичности. Вып. 18. СПб.: С.-Петерб. гос. ун-т, 1999. С. 142–161.

13. **Comninou M.** The interface crack // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1977. V. 44, N 4. P. 631–636.
14. **Comninou M., Schmueser D.** The interface crack in a conbined tension-compression and shear field // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1979. V. 46, N 2. P. 345–348.
15. **Соколовски Я., Хлуднев А. М.** О производной функционала энергии по длине трещины в задачах теории упругости // Прикл. математика и механика. 2000. Т. 64, № 3. С. 464–475.
16. **Khludnev A. M., Sokolowski J.** Griffith formulae for elasticity systems with unilateral conditions in domains with cracks // Europ. J. Mech. Solids. 2000. V. 19, N 1. P. 105–120.
17. **Алфутова Н. Б., Мовчан А. Б., Назаров С. А.** Алгебраическая эквивалентность плоских задач для ортотропных и анизотропных сред // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. 1. 1991. Вып. 3 (№ 15). С. 64–68.
18. **Мазья В. Г., Назаров С. А.** Асимптотика интегралов энергии при малых возмущениях границы вблизи угловых и конических точек // Тр. Моск. мат. о-ва. 1987. Т. 50. С. 79–129.
19. **Mazja W. G., Nasarow S. A., Plamenewski B. A.** Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singulär gestörten Gebieten. 1. Berlin: Akademie-Verlag, 1991.
20. **Партон В. З., Морозов Е. М.** Механика упруго-пластического разрушения. М.: Наука, 1974.
21. **Leguillon D., Sanchez-Palencia E.** Fracture in heterogeneous materials. Weak and strong singularities // New Advances in Computational Structural Mechanics. Paris: Elsilver Sci. Publications B.V., 1992. P. 423–434.
22. **Банничук Н. В.** Определение формы криволинейной трещины методом малого параметра // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1970. № 2. С. 130–137.
23. **Cotterel B., Rice J. R.** Slightly curved or kinked cracks // Intern. J. Fract. 1980. V. 16, N 2. P. 155–169.
24. **Amestoy M., Leblond J. B.** Crack path in plane situations. II. Detailed form of the expansion of the stress intensity factors // Intern. J. Solids and Struct. 1992. V. 29, N 4. P. 465–501.
25. **Гольдштейн Р. В., Салганик Р. Л.** Плоская задача о криволинейных трещинах в твердом теле // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1970. № 3. С. 69–82.
26. **Eck C., Nazarov S. A., Wendland W. L.** Asymptotic analysis for a mixed boundary-value contact problem // Arch. Rational Mech. Anal. 2001. V. 156. P. 275–316.

Поступила в редакцию 10/III 2004 г.,
в окончательном варианте — 6/X 2004 г.