

**ВЛИЯНИЕ ЭФФЕКТА ХОЛЛА НА СТРУКТУРУ ТОКОВ ПРИ  
ТЕЧЕНИИ ПЛАЗМЫ В ПРОСТРАНСТВЕННО-ПЕРИОДИЧЕСКОМ  
МАГНИТНОМ ПОЛЕ**

*К. П. Черкасова*

(Харьков)

Изучается структура электрических полей и токов, возникающих при стационарном течении плазмы в аксиально симметричном пространственно-периодическом магнитном поле. Задача решается в магнитогидродинамическом приближении с учетом холловского слагаемого в обобщенном законе Ома. Предполагается, что магнитное число Рейнольдса и параметр взаимодействия малы.

Ряд вопросов динамики плазменных сгустков, пролетающих через аксиально симметричное магнитное поле, удалось хорошо объяснить с помощью обобщенной модели гибкого токового витка [1, 2]. Однако эта модель не учитывает влияния эффекта Холла, которое может быть существенным [3, 4]. В магнитогидродинамическом приближении решение полной системы уравнений представляет собой сложную проблему. Тем не менее можно построить решение только для электрических полей и токов, пренебрегая их влиянием на магнитное поле, а также изменением параметров течения. Такой подход возможен тогда, когда достаточно малы как магнитное число Рейнольдса, являющееся мерой деформации магнитного поля течением, так и параметр взаимодействия (число Стюарта) [5].

Рассматривая нулевое приближение по этим параметрам, можно найти решение для токов и полей, изучая только одно уравнение системы — обобщенный закон Ома. Этот метод был ранее использован при исследовании влияния эффекта Холла для нескольких частных случаев взаимодействия плазмы с аксиально симметричными магнитными полями [6-9]. В работе [9], в частности, рассматривалось движение плазмы в знакопеременном пространственно-периодическом магнитном поле. В данной работе исследование обобщается на случай однородного магнитного поля, модулированного знакопеременным пространственно-периодическим магнитным полем, и производится анализ структуры векторных линий плотности токов, возникающих в плазме, в зависимости от глубины модуляции магнитного поля.

Если пренебречь газокINETическим давлением, а также скольжением ионов относительно нейтралов, обобщенный закон Ома принимает следующий вид:

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + [\mathbf{v}, \mathbf{B}]) - k[\mathbf{j}, \mathbf{B}] \quad (1)$$

где

$$\sigma = \frac{\sigma^*}{\sigma_0^*}, \quad \mathbf{j} = \frac{\mathbf{j}^*}{\sigma_0^* v_0^* B_0^*}, \quad \mathbf{E} = \frac{\mathbf{E}^*}{v_0^* B_0^*}, \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}^*}{v_0^*}, \quad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{B}^*}{B_0^*}$$

Здесь  $k = \omega_e \tau_{ei}$  — параметр Холла,  $\mathbf{j}$  — вектор плотности тока,  $\sigma$  — проводимость,  $\mathbf{E}$  — электрическое поле,  $\mathbf{v}$  — скорость плазмы,  $\mathbf{B}$  — вектор магнитной индукции,  $\omega_e$  — электронная циклотронная частота,  $\tau_{ei}$  — время между столкновениями электронов и ионов, звездочкой от-

мечены размерные величины, индексом нуль — те же величины для невозмущенной плазмы. Отметим, что в качестве характерного параметра магнитного поля  $B_0^*$  выбрано амплитудное значение модулирующего поля на его оси симметрии. Так как все параметры, характеризующие струю (кроме электрических полей и токов), считаются невозмущенными, то скорость  $v$  течения постоянна

$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_z \quad (r \leq b)$$

где  $\mathbf{e}_z$  — орт оси симметрии (оси  $z$ ),  $b$  — радиус бесконечного плазменного цилиндра; проводимость  $\sigma$  равна единице внутри этого цилиндра и нулю вне его.

Изучается нулевое приближение по малому магнитному числу Рейнольдса, поэтому внешнее магнитное поле считается недеформированным. Предполагается, что пространственно-периодическое магнитное поле  $\mathbf{B}(B_r, 0, B_z)$  задано следующими формулами:

$$B_r = I_1(r) \cos z, \quad B_z = -I_0(r) \sin z - B_1 \quad (2)$$

где  $I_0(r)$ ,  $I_1(r)$  — модифицированные функции Бесселя,  $r = r^* / L^*$ ,  $z = z^* / L^*$ ,  $L^* = \lambda / 2\pi$ ,  $\lambda$  — период магнитного поля.

Таким образом, в рассматриваемом приближении неизвестными функциями в уравнении (1) являются электрическое поле  $\mathbf{E}$  и плотность тока  $\mathbf{j}$ . Решение будем искать в виде разложения по степеням параметра Холла  $k$  ( $k < 1$ )

$$\mathbf{j} = \sum_{n=0}^{\infty} k^n \mathbf{j}_n \quad (3)$$

аналогично для поля  $\mathbf{E}$ ; коэффициенты разложения  $\mathbf{j}_n$ ,  $\mathbf{E}_n$  будем называть токами и полями порядка  $n$ . Последовательное изучение цепочки алгебраических уравнений относительно  $\mathbf{j}_n$ ,  $\mathbf{E}_n$  показывает [6], прежде всего, что ток нулевого порядка  $\mathbf{j}_0$  индуцируется внешним магнитным полем в отсутствие эффекта Холла и имеет только азимутальную компоненту, в то время как ток  $\mathbf{j}_1$  не имеет азимутальной компоненты. Иными словами, в первом приближении холловский ток не представляет собой поправку к основному току, а отделяется от него вследствие аксиальной симметрии задачи. Дальнейшие приближения дают поправки более высоких порядков по  $k$  к основному току  $\mathbf{j}_0$  ( $k^2 \mathbf{j}_2$  и т. д.) и к холловскому току  $k \mathbf{j}_1$  ( $k^3 \mathbf{j}_3$  и т. д.). Ограничимся построением поля и тока первого порядка.

Уравнение, связывающее величины  $\mathbf{j}_1$  и  $\mathbf{E}_1$ , имеет вид

$$\mathbf{j}_1 = \sigma \mathbf{E}_1 = -\mathbf{F}_0 \quad (4)$$

где

$$\mathbf{F}_0 = [\mathbf{j}_0, \mathbf{B}] = -\sigma [[\mathbf{v}, \mathbf{B}], \mathbf{B}] \quad (5)$$

От уравнения (4) перейдем к уравнению для потенциала электрического поля  $\Phi_1$ , определяемого равенством

$$\mathbf{E}_1 = -\nabla \Phi_1 \quad (6)$$

Для этого вычислим дивергенцию от обеих частей уравнения (4). Так как внутри плазмы  $\sigma = 1$ , получим

$$\Delta \Phi_1 = -\operatorname{div} \mathbf{F}_0 \quad (7)$$

На свободной поверхности плазмы нормальная составляющая тока равна нулю, поэтому потенциал  $\Phi_1$  должен удовлетворять следующему граничному условию:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \Big|_{r=b} = -F_{0r} \Big|_{r=b} \quad (8)$$

Поскольку плазма движется в пространственно-периодическом магнитном поле, следует ожидать, что токи будут периодическими функциями от  $z$ . Следовательно, производные от потенциала должны удовлетворять условиям периодичности

$$\frac{\partial \Phi_1(r, z)}{\partial r} = \frac{\partial \Phi_1(r, z + 2\pi)}{\partial r}, \quad \frac{\partial \Phi_1(r, z)}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_1(r, z + 2\pi)}{\partial z}. \quad (9)$$

Для решения уравнения (7) введем новую неизвестную функцию  $\Phi$  так, чтобы вместо граничного условия (8) искомая функция удовлетворяла однородному граничному условию

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{r=b} = 0 \quad (10)$$

где

$$\Phi = \Phi_1 + \int_0^r F_{0r} dr \quad (11)$$

При этой замене уравнение (7) заменяется следующим:

$$\Delta \Phi = -\frac{\partial F_{0z}}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_0^r F_{0r} dr \quad (12)$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее граничному условию (10), удобно искать в виде разложения Дини по функциям Бесселя нулевого порядка. После отыскания  $\Phi(r, z)$  и перехода к потенциалу  $\Phi_1(r, z)$  с помощью формулы (11) получаем следующий результат:

$$\Phi_1(r, z) = 2Cb^{-2}(z - z_0) + \Lambda_1(r) \sin 2z + \Lambda_2(r) \cos z \quad (13)$$

где  $C$  и  $z_0$  — некоторые постоянные

$$\Lambda_1(r) = \frac{2}{b^2} \left[ \frac{1}{4} p_1^*(k_0) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_1^*(k_i)}{4 + (k_i/b)^2} \frac{J_0(k_i r/b)}{J_0^2(k_i)} \right] + \frac{1}{2} [I_0^2(r) - 1]$$

$$\Lambda_2(r) = \frac{2}{b^2} \left[ p_2^*(k_0) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_2^*(k_i)}{4 + (k_i/b)^2} \frac{J_0(k_i r/b)}{J_0^2(k_i)} \right] + B_1 [I_0(r) - 1]$$

$p_{1,2}^*(k_i)$  — коэффициенты Дини функций  $p_{1,2}(r)$

$$p_1(r) = I_1^2(r) - I_0^2(r) + 1, \quad p_2(r) = -B_1 [I_0(r) - 1]$$

Поскольку потенциал, вообще говоря, определяется с точностью до аддитивной постоянной, значение  $z_0$  остается неопределенным. Таким образом, для потенциала  $\Phi_1(r, z)$  получается семейство решений, зависящее от постоянной  $C$ . Для определения  $C$  на потенциал следует наложить дополнительное условие.

При помощи формул (6) и (4) находится электрическое поле, порождаемое потенциалом  $\Phi_1(r, z)$ , и компоненты тока первого порядка.

Будем рассматривать случай, когда радиус плазменной струи мал по сравнению с характерным размером  $L^*$  ( $b \ll 1$ , тонкая струя). Разлагая модифицированные функции Бесселя  $I_0(r)$ ,  $I_1(r)$  в ряд по степеням малого радиуса  $r < b$  и ограничиваясь двумя первыми членами ряда, получим для компонент вектора плотности тока следующие формулы:

$$\begin{aligned} j_{1r} &= \frac{1}{16} r b^2 [1 - (r/b)^2] (\sin 2z + B_1 \cos z) \\ j_{1z} &= \left( \frac{b^2}{16} - \frac{2C}{b^2} \right) - \frac{b^2}{8} \left[ 1 - 2 \left( \frac{r}{b} \right)^2 \right] (\sin z + B_1) \sin z \end{aligned} \quad (14)$$

Отметим, что только вторая из этих формул содержит пока еще не определенную постоянную  $C$ . Чтобы выяснить физический смысл этой постоянной, введем полный ток  $I_{1z}$  вдоль оси симметрии

$$I_{1z} = 2\pi \int_0^b j_{1z} r dr$$

тогда постоянная  $C$  выражается линейно через этот ток

$$C = -I_{1z}/2\pi + b^4/32 \quad (15)$$

Теперь выражения для компонент плотности тока приведутся к виду

$$\begin{aligned} j_{1r} &= \frac{1}{16} r b^2 [1 - (r/b)^2] (\sin 2z + B_1 \cos z) \\ j_{1z} &= \frac{I_{1z}}{\pi b^2} - \frac{b^2}{8} \left[ 1 - 2 \left( \frac{r}{b} \right)^2 \right] (\sin z + B_1) \sin z \end{aligned} \quad (16)$$

Вместо дополнительного условия, налагаемого на потенциал для определения постоянной  $C$ , можно наложить некоторое условие на ток  $I_{1z}$ . Таким условием может быть, например, отсутствие полного аксиального тока:  $I_{1z} = 0$ . Однако в рамках данной задачи, где не учитываются эффекты, связанные с входом плазмы в систему и выходом из нее, вопрос о выборе дополнительного условия остается открытым.

Дифференциальное уравнение, определяющее векторные линии плотности тока (16) в плоскости  $\varphi = \text{const}$ , имеет следующий вид:

$$\frac{dr}{dz} = \frac{r [1 - (r/b)^2] (2 \sin z + B_1) \cos z}{2 [M + (2(r/b)^2 - 1) (\sin z + B_1) \sin z]} \quad \left( M = \frac{8I_{1z}}{\pi b^4} \right) \quad (17)$$

Теперь вместо тока  $I_{1z}$  можно говорить о возможных значениях  $M$ . По-видимому, имеет смысл рассмотреть отдельно два случая:  $M = 0$  и  $M \neq 0$ .

Пусть  $M = 0$ . Физически это означает отсутствие полного аксиального тока, протекающего через произвольное сечение  $z = \text{const}$ . При этом векторные линии плотности тока должны замыкаться внутри исследуемого объема. Действительно, исследование особых точек векторных линий, соответствующих уравнению (17), показывает, что на каждом периоде векторные линии образуют семейства замкнутых петель, количество и расположение которых зависит от значения глубины модуляции магнитного поля  $h = B_0^*/B_1^* = 1/B_1$ . Схематически вид токовых петель в плоскости  $\varphi = \text{const}$  при  $I_{1z} = 0$  показан на фиг. 1.

Интересно проследить, как изменяется структура векторного поля плотности тока при возрастании глубины модуляции. Если  $h$  мало ( $0 < h < 1/2$ ), на периоде существуют два семейства замкнутых петель,

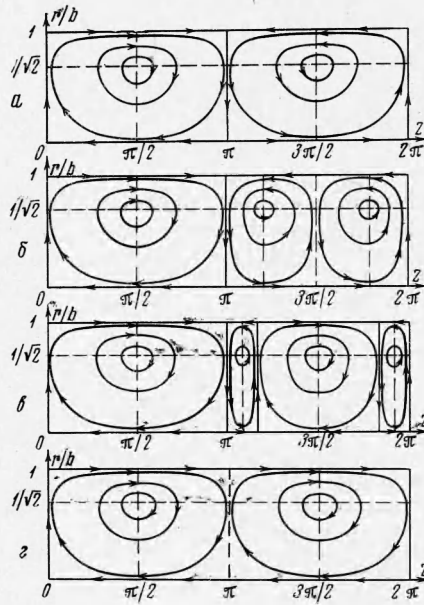
центры которых лежат на линии  $r = b / \sqrt{2}$  в точках  $z = \pi / 2, z = 3\pi / 2$  (фиг. 1, а). Направления токов в петлях соседних семейств по отношению к соответствующим центрам противоположны, а границы, разделяющие семейства, представляют собой линии  $z = 0, z = \pi, z = 2\pi$ . При дальнейшем росте  $h$  вид семейства на первом полупериоде  $(0, \pi)$  сохраняется, все изменения происходят на втором полупериоде  $(\pi, 2\pi)$ . Отметим, что при всех значениях  $h$  центры семейств остаются лежать на линии  $r = b / \sqrt{2}$ . При переходе  $h$  через значение  $h = 1/2$  точка  $(r = b / \sqrt{2}, z = 3\pi / 2)$  становится седловой, и семейство на втором полупериоде расщепляется на два, разделенные линией  $z = 3\pi / 2$ . Центры этих семейств лежат в точках (фиг. 1, б)

$$z = \pi + \arcsin 1/2h, \quad z = 2\pi - \arcsin 1/2h.$$

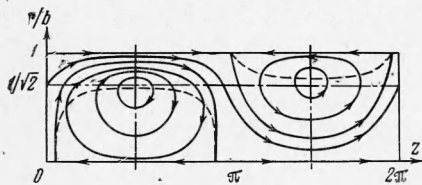
Такая структура векторного поля сохраняется при  $1/2 < h < 1$  до значения  $h = 1$ . При переходе  $h$  через значение  $h = 1$  точка  $(r = b / \sqrt{2}, z = 3\pi / 2)$  снова становится центром, вокруг которого располагается третье семейство, раздвигающее ранее возникшие семейства и соответственно отделенное от них линиями (фиг. 1, в)

$$z = \pi + \arcsin h^{-1}, \quad z = 2\pi - \arcsin h^{-1}.$$

Это третье семейство остается единственным на полупериоде  $(\pi, 2\pi)$  при переходе к пределу  $h \rightarrow \infty$ , остальные два семейства исчезают (фиг. 1, г). При этом теряет смысл понятие модуляции однородного поля, так как этот случай соответствует значению  $B_1 = 0$  — однородного поля нет, магнитное поле знакопеременное. Пространственный период векторного поля плотности тока вдвое меньше периода магнитного поля и равен  $\pi$ . Такая структура векторного поля плотности холловских токов первого порядка плазмы в знакопеременном пространственно-периодическом магнитном поле была получена ранее [9].



Фиг. 1



Фиг. 2

которых оказываются смещенными по сравнению с положением центров при  $I_{1z} = 0$ , а сами петли деформируются. Наряду с замкнутыми петлями появляются векторные линии, не замыкающиеся внутри периода. При некотором значении тока  $I_{1z}$ , определяемом глубиной модуляции  $h$ , семейства замкнутых петель исчезают.

Наибольший интерес представляет магнитное поле с малой глубиной модуляции («гофрированное» магнитное поле). Поэтому рассмотрим под-

Пусть  $M \neq 0$ . При наличии продольного тока структура векторного поля плотности тока усложняется. При небольших значениях  $I_{1z}$  еще существуют семейства замкнутых петель, центры

