



**ПОВЕДЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ СЦЕПЛЕНИЯ
И УГЛОВ ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ ГОРНЫХ ПОРОД В ЗАВИСИМОСТИ
ОТ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ОГИБАЮЩЕЙ МОРА**

П. А. Цой, О. М. Усольцева

*Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН,
E-mail: paveltsoy@mail.ru, usoltseva57@mail.ru,
Красный проспект 54, г. Новосибирск 630091, Россия*

Исследовано поведение коэффициентов сцепления и углов внутреннего трения в зависимости от линейного или нелинейного представления огибающей Мора как функциональной зависимости касательного напряжения от нормального напряжения. Расчеты опирались на справочные данные по пределу прочности на сжатие и растяжение горных пород. Линейная зависимость строилась как касательная, проведенная к двум кругам Мора, а нелинейная — в виде соотношения, которое рекомендовано отечественным стандартом.

Горные породы, сжатие, растяжение, огибающая Мора, коэффициент сцепления, угол внутреннего трения

**BEHAVIOR OF COHESION COEFFICIENTS AND INTERNAL FRICTION ANGLES
OF ROCKS DEPENDING ON THE FUNCTIONAL REPRESENTATION
OF THE MOHR ENVELOPE**

P. A. Tsoi, O. M. Usol'tseva

*Chinakal Institute of Mining, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences,
E-mail: paveltsoy@mail.ru, usoltseva@mail.ru,
Krasny pr. 54, Novosibirsk 630091, Russia*

The behavior of cohesion coefficients and internal friction angles depending on the linear or nonlinear representation of the Mohr envelope as a functional dependence of the shear stress on the normal stress is studied. The calculations were based on the reference data concerning ultimate compressive and tensile strength of rocks. The linear dependence was constructed as a tangent drawn to two Mohr circles, and nonlinear dependence — as a relationship recommended by the domestic standard.

Rocks, compression, tension, Mohr envelope, cohesion coefficient, angle of internal friction

Разнообразие горных пород определяет их вариативность по прочностным свойствам. Для учета этого обстоятельства в каждом конкретном случае широко используется паспорт прочности в виде огибающих кругов Мора. Самый простейший набор данных для построения огибающей — это данные о пределе прочности на растяжение и сжатие горной породы [1–4]. Огибающая может быть построена как линейная зависимость касательного напряжения от нормального, так и нелинейная [3, 5, 8, 9]. В настоящей работе исследуется, насколько сильно влияет функциональный вид огибающей для той или иной горной породы на величины коэффициента сцепления и угла внутреннего трения. Определяются зависимости коэффициента сцепления и угла внутреннего трения от отношения предела прочности на сжатие к пределу прочности на растяжение.

Построение огибающих Мора. В работе [5] рассмотрено построение паспорта прочности по ГОСТ 21153.8-88. В соответствии с этим стандартом уравнение нелинейной огибающей кругов Мора записывается как функциональная зависимость $\tau(\sigma)$

$$\tau = 0.73a \left[\frac{(a(k_1 + q_1) + \sigma)^2}{(a(k_1 + q_1) + \sigma)^2 + a^2} \right]^{\frac{3}{8}}, \quad (1)$$

где $a = 0.25 \left(\frac{\sigma_p}{q_1} + \frac{\sigma_{сж}}{q_2} \right)$; $\sigma_p \leq 0$ — предел прочности на растяжение, МПа; $\sigma_{сж} \geq 0$ — предел прочности на сжатие, МПа; k_1, q_1, q_2 — табулированные безразмерные величины, причем $\frac{q_2}{q_1} = \frac{\sigma_{сж}}{\sigma_p}$.

Коэффициент сцепления $C_{\text{нелин}}$, соответствующий нелинейной зависимости (1), определяется из формулы (1) при $\sigma = 0$

$$C_{\text{нелин}} = 0.73a \left(\frac{(k_1 + q_1)^2}{(k_1 + q_1)^2 + 1} \right)^{\frac{3}{8}}, \text{ МПа.} \quad (2)$$

Угол внутреннего трения $\varphi_{\text{нелин}}$, соответствующий нелинейной зависимости (1), является углом наклона касательной к кривой (1) в точке $(\sigma, \tau) = (0, C_{\text{нелин}})$ и рассчитывается как

$$\varphi_{\text{нелин}} = \text{arctg} \frac{0.5475}{((k_1 + q_1)^2 + 1) \sqrt[4]{k_1 + q_1}}. \quad (3)$$

Рассмотрим построение линейной огибающей Мора в виде

$$\tau = \text{tg}(\varphi_{\text{лин}}) \sigma + C_{\text{лин}}, \quad (4)$$

где $C_{\text{лин}}$ — коэффициент сцепления; $\varphi_{\text{лин}}$ — угол внутреннего трения. Эти величины соответствуют линейной зависимости $\tau(\sigma)$.

Далее найдем формальное представление линейной огибающей в виде уравнения касательной к двум полуокружностям Мора. Пусть известны $\sigma_{сж} \geq 0$ и $\sigma_p \leq 0$. Тогда полуокружности Мора будут заданы как

$$\tau = \sqrt{0.25\sigma_{сж}^2 - (\sigma - 0.5\sigma_{сж})^2}, \quad (5)$$

$$\tau = \sqrt{0.25\sigma_p^2 - (\sigma - 0.5\sigma_p)^2}. \quad (6)$$

Требуемая касательная должна иметь одновременно точку касания $(\sigma_{к1}, \tau_{к1})$ к полуокружности (5) и точку $(\sigma_{к0}, \tau_{к0})$ к полуокружности (6). Составим уравнения касательной.

С одной стороны,

$$\tau = \tau_{к0} + \frac{(0.5\sigma_p - \sigma_{к0})(\sigma - \sigma_{к0})}{\tau_{к0}}, \quad (7)$$

где $\tau_{к0} = \sqrt{0.25\sigma_p^2 - (\sigma_{к0} - 0.5\sigma_p)^2}$, с другой —

$$\tau = \tau_{к1} + \frac{(0.5\sigma_{сж} - \sigma_{к1})(\sigma - \sigma_{к1})}{\tau_{к1}}, \quad (8)$$

где $\tau_{к1} = \sqrt{0.25\sigma_{сж}^2 - (\sigma_{к1} - 0.5\sigma_{сж})^2}$.

Опираясь на выражения (7) и (8), составим следующую систему уравнений относительно неизвестных $\sigma_{к0}$ и $\sigma_{к1}$

$$\begin{cases} C_{\text{лин}} = \tau_{к0} - \frac{\sigma_{к0}(0.5\sigma_p - \sigma_{к0})}{\tau_{к0}} = \tau_{к1} - \frac{\sigma_{к1}(0.5\sigma_{сж} - \sigma_{к1})}{\tau_{к1}}, \\ \text{tg } \varphi_{\text{лин}} = \frac{0.5\sigma_p - \sigma_{к0}}{\tau_{к0}} = \frac{0.5\sigma_{сж} - \sigma_{к1}}{\tau_{к1}}. \end{cases} \quad (9)$$

После исключения неизвестной $\sigma_{к0}$ согласно системе (9) получим следующее уравнение относительно $\sigma_{к1}$:

$$\frac{\left(0.5\sigma_p - \frac{\sigma_p \cdot p^2}{\sigma_p^2 + p^2}\right)^2}{0.25\sigma_p^2 - \left(0.5\sigma_p - \frac{\sigma_p \cdot p^2}{\sigma_p^2 + p^2}\right)^2} = \frac{(0.5\sigma_{сж} - \sigma_{к1})^2}{0.25\sigma_{сж}^2 - (0.5\sigma_{сж} - \sigma_{к1})^2}, \quad (10)$$

где $p = (\sigma_{к1} \cdot \sigma_{сж}) / \tau_{к1}$.

Уравнение (10) решено методом дихотомии и далее согласно (9) определены $C_{\text{лин}}$ и $\varphi_{\text{лин}}$.

Результаты расчетов. Для расчетов используется справочная база прочностных данных (предел прочности на одноосное сжатие и растяжение) для 496 образцов различных горных пород [6]. Сначала была проведена сортировка прочностных данных по увеличению предела прочности на сжатие (рис. 1).

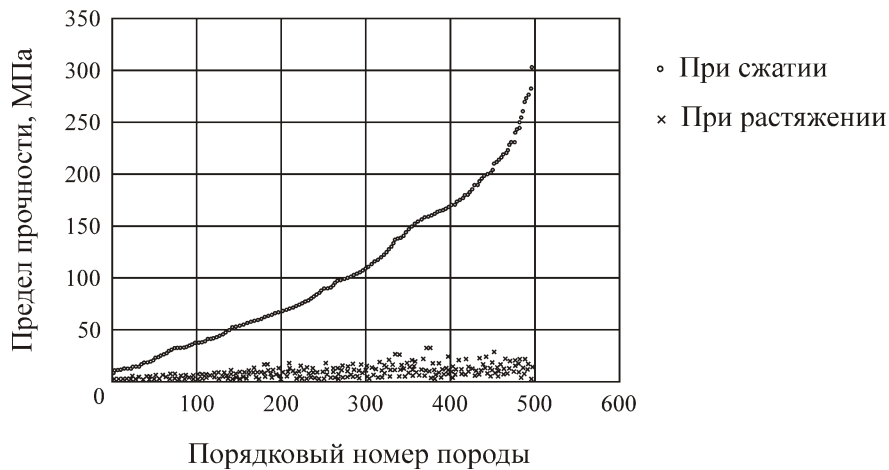


Рис. 1. Пределы прочности на сжатие и растяжение для 496 образцов горных пород

Значения $C_{\text{нелин}}$, $C_{\text{лин}}$, $\varphi_{\text{нелин}}$, $\varphi_{\text{лин}}$, полученные по формулам (2), (3), (9), приведены на рис. 2 в зависимости от отношения $\sigma_{сж} / \sigma_p$.

Для каждого набора прочностных данных определялись относительные погрешности коэффициента сцепления δ_c и угла внутреннего трения δ_φ :

$$\delta_c = \frac{|C_{\text{нелин}} - C_{\text{лин}}|}{C_{\text{нелин}}} \cdot 100\%, \quad \delta_\varphi = \frac{|\varphi_{\text{нелин}} - \varphi_{\text{лин}}|}{\varphi_{\text{нелин}}} \cdot 100\% \quad (11)$$

Рассчитанные значения δ_c и δ_φ в зависимости от отношения $\sigma_{сж} / \sigma_p$ представлены на рис. 3.

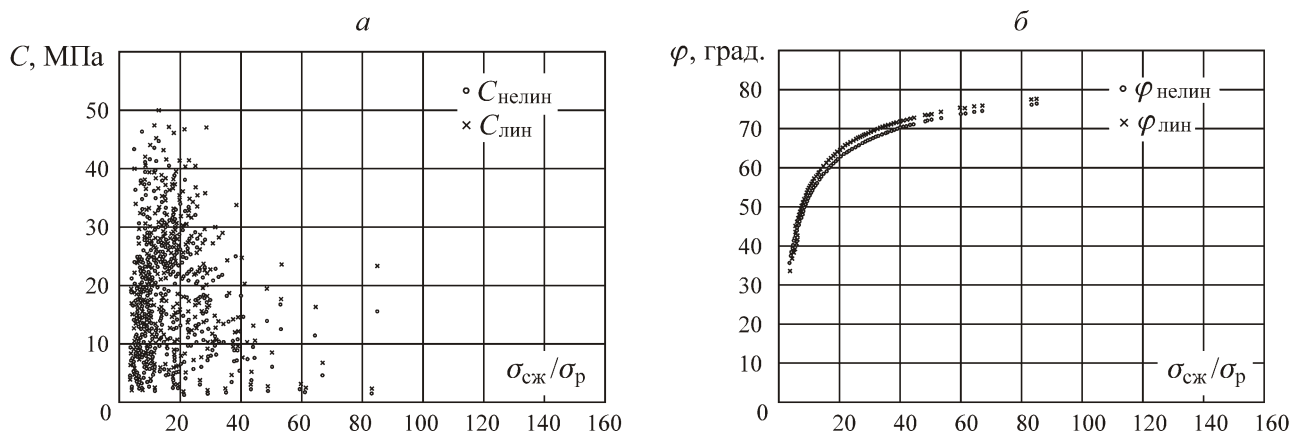


Рис. 2. Коэффициенты сцепления $C_{\text{нелин}}$, $C_{\text{лин}}$ (а) и углы внутреннего трения $\varphi_{\text{нелин}}$, $\varphi_{\text{лин}}$ (б) в зависимости от $\sigma_{\text{сж}}/\sigma_{\text{р}}$

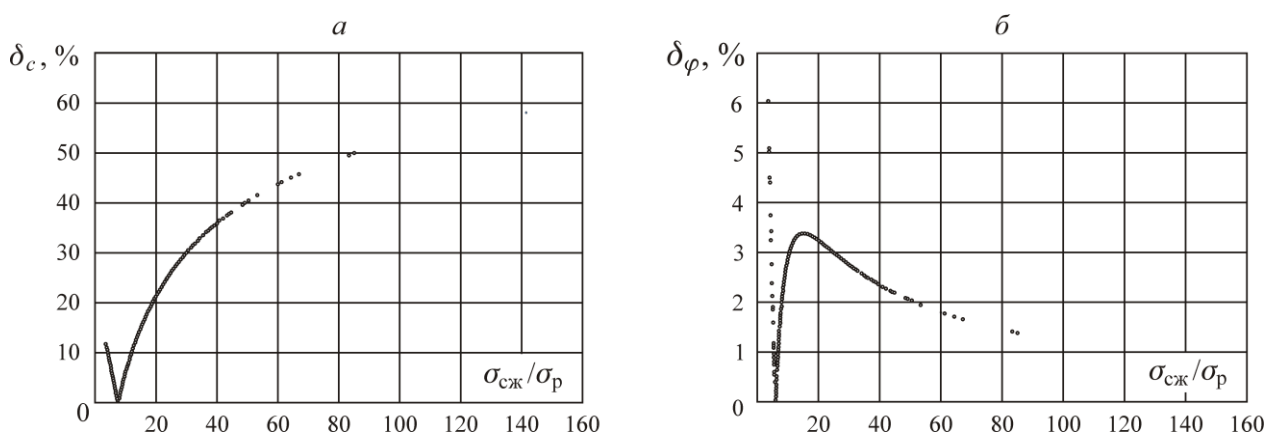


Рис. 3. Относительные погрешности δ_c (а) и δ_φ (б) в зависимости от $\sigma_{\text{сж}}/\sigma_{\text{р}}$

Следует отметить, что функциональный вид огибающей не сильно влияет на величину угла внутреннего трения, об этом свидетельствует относительная погрешность δ_φ , которая не превышает 6.02%. Однако выявлено очень сильное изменение коэффициента сцепления с увеличением $\sigma_{\text{сж}}/\sigma_{\text{р}}$: если при $3.50 < \sigma_{\text{сж}}/\sigma_{\text{р}} < 7.55$ погрешность δ_c изменяется от 0 до 10%, то при $7.55 < \sigma_{\text{сж}}/\sigma_{\text{р}} < 140$ диапазон изменения δ_c составляет 0–58%. Более того, величины $C_{\text{лин}}$ становятся более высокими по сравнению с $C_{\text{нелин}}$. Это обстоятельство следует учитывать при испытании горных пород, у которых прочностные характеристики удовлетворяют неравенству $\sigma_{\text{сж}}/\sigma_{\text{р}} > 7.55$.

ВЫВОДЫ

В работе приведены формулы для определения коэффициентов сцепления и углов внутреннего трения в случае линейной и нелинейной огибающих кругов Мора, с помощью которых рассчитаны коэффициенты сцепления $C_{\text{нелин}}$, $C_{\text{лин}}$ и углы внутреннего трения $\varphi_{\text{нелин}}$, $\varphi_{\text{лин}}$ для набора прочностных данных $\sigma_{\text{сж}}$, $\sigma_{\text{р}}$ для различных горных пород. В расчетах использованы справочные прочностные данные для 496 образцов горных пород. Построены графические зависимости $C_{\text{нелин}}$, $C_{\text{лин}}$, $\varphi_{\text{нелин}}$, $\varphi_{\text{лин}}$ от отношения $\sigma_{\text{сж}}/\sigma_{\text{р}}$. Выявлено, что функциональное представление огибающей незначительно влияет на изменение угла внутреннего трения при $3.5 \leq \sigma_{\text{сж}}/\sigma_{\text{р}} \leq 5.85$ и изменение коэффициента трения при $3.50 < \sigma_{\text{сж}}/\sigma_{\text{р}} < 7.55$. Если $7.55 < \sigma_{\text{сж}}/\sigma_{\text{р}} < 141.50$, то коэффициент сцепления $C_{\text{лин}}$ становится более высоким по сравне-

нию с $C_{\text{нелин}}$, а относительная погрешность δ_c между ними возрастает от 0 до 58%. Последнее обстоятельство необходимо учитывать при построении паспорта прочности горных пород, для которых выполнено отношение $\sigma_{\text{сж}} / \sigma_p > 7.55$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

1. **State standard** 21153.2-84. Rocks. Methods for determining the ultimate strength under uniaxial compression, USSR, 1984. [ГОСТ 21153.2-84. Породы горные. Методы определения предела прочности при одноосном сжатии. — СССР, 1984.]
2. **State standard** 21153.3-85. Rocks. Methods for determining the tensile strength under uniaxial tension, USSR, 1985. [ГОСТ 21153.2-85. Породы горные. методы определения предела прочности при одноосном растяжении. — СССР, 1985.]
3. **ASTM D 7012-04**. Standard test method for compressive strength and elastic moduli of intact rock core specimens under varying states of stress and temperatures, Pennsylvania, 2004, 8 pp. [Американское общество по испытанию материалов D 7012-04. Стандартный метод испытаний для определения прочности на сжатие и модулей упругости ненарушенных образцов горных пород при различных напряжениях и температурах. — Пенсильвания. — 2004. — 8 с.]
4. **ASTM D 3967-95a**. Standard test method for splitting tensile strength of intact rock core specimens, Pennsylvania, 1995, 3 pp. [Американское общество по испытанию материалов D 3967-95a. Стандартный метод испытаний прочности на косвенное растяжение ненарушенных образцов горных пород. — Пенсильвания. — 1995. — 3 с.]
5. **Karkashadze G. G.** Mechanical destruction of rocks, Moscow, 2004, 222 pp. [Каркашадзе Г. Г. Механическое разрушение горных пород. — М., 2004. — 222 с.]
6. **Melnikov N. V., Rzhovsky V. V., and Protodyakonov M. M.** Reference book (cadastre) of the physical properties of rocks, Moscow, 1975, 279 pp. [Мельников Н. В., Ржевский В. В., Протодьяконов М. М. Справочник (кадастр) физических свойств горных пород. — М., 1975. — 279 с.]
7. **State standard** 21153.8-88. Rocks. Method for determination of triaxial compressive strength, USSR State Committee on Standards, 1988, 17 pp. [ГОСТ 21153.2-88. Породы горные. Метод определения предела прочности при объемном сжатии. — М.: Гос. комитет СССР по стандартам, 1988. — 17 с.]
8. **Lee Y.-K. and Pietruszczak S.** Analytical representation of Mohr failure envelope approximating the generalized Hoek–Brown failure criterion, International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2017, vol. 100, pp. 90–99. [Ли Ю.-К., Пиетрусцзак С. Аналитическое представление огибающей Мора, аппроксимирующей обобщенный критерий разрушения Хоека–Брауна // Международный журнал механики горных пород и горных наук. — 2017. — Т. 100. — С. 90–99.]
9. **Hua Yu, Kam Ng, Grana D., Alvarado V., Kaszuba J., and Campbell E.** A generalized power-law criterion for rocks based on Mohr failure theory, International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2020, vol. 128, art. 104274. [Хуа Ю, Кам Нг, Грана Д., Алвардо В., Касцуба Дж., Кэмпбелл Э. Обобщенный степенной критерий (основанный на использовании степенных функций) для горных пород, основанный на теории разрушения Мора // Международный журнал механики горных пород и горных наук. — 2020. — Т. 128, статья 104274.]