УДК 532.532+532.59

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА МЕТОДОВ РАСЧЕТА ВОЛН ПОСЛЕ ЧАСТИЧНОГО РАЗРУШЕНИЯ ПЛОТИНЫ

В. И. Букреев, В. В. Дегтярев*, А. В. Чеботников*

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
* Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет,
630008 Новосибирск
E-mail: bukreev@hydro.nsc.ru

Приведены результаты экспериментального исследования волн после частичного разрушения двух модельных плотин. Дано обобщение предложенных ранее методов расчета и проведено их сравнение с полученными экспериментальными данными. Показано, что на скорость распространения волн в нижнем бьефе существенно влияют потери энергии при истечении через проран.

Ключевые слова: частичное разрушение плотины, волна прорыва, эксперимент, методы расчета.

Введение. Численные расчеты процесса распространения волн после разрушения плотины по реальному речному руслу с боковыми притоками, поймами и разнообразными гидравлическими сопротивлениями выполняются на основе уравнений Сен-Венана. Сведения о соответствующих компьютерных программах можно найти в Интернете (http://www.niies.ru/chisl_metod.htm, http://www.wmo.ch/web/homs/projects/Components/Russian/k15302.html). Обзор научных исследований, предшествовавших созданию таких программ, содержится в [1–3]. В качестве исходной информации при расчетах необходимо задать натурные данные о геометрии и гидравлических сопротивлениях речной системы, а также начальные данные в створе плотины. Начальные данные целесообразно получить из решения задачи о разрушении плотины на основе более простой математической модели — первого приближения теории мелкой воды. Соответствующая теория для случая мгновенного полного разрушения плотины над ровным горизонтальным дном представлена в работах [4, 5], а результаты ее экспериментальной проверки — в работах [6, 7].

В настоящей работе рассматривается более сложная задача о частичном разрушении, когда в окрестности уцелевшей части плотины течение является трехмерным и вихревым. В этом случае система уравнений в рамках первого приближения теории мелкой воды оказывается незамкнутой. Впервые способ решения проблемы замыкания предложил С. А. Христианович [4]. Новизна его подхода состоит в том, что дополнительно привлекается эмпирическая информация. По сути, этот подход используется в дальнейшем при расчетах волн в реальной речной системе на основе уравнений Сен-Венана. В работе [4] предполагается также, что в окрестности частично разрушившейся плотины течение быстро становится стационарным, что подтверждается в опытах [8, 9].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 07-01-00015) и в рамках Интеграционного проекта отделений РАН № 4.14.1.

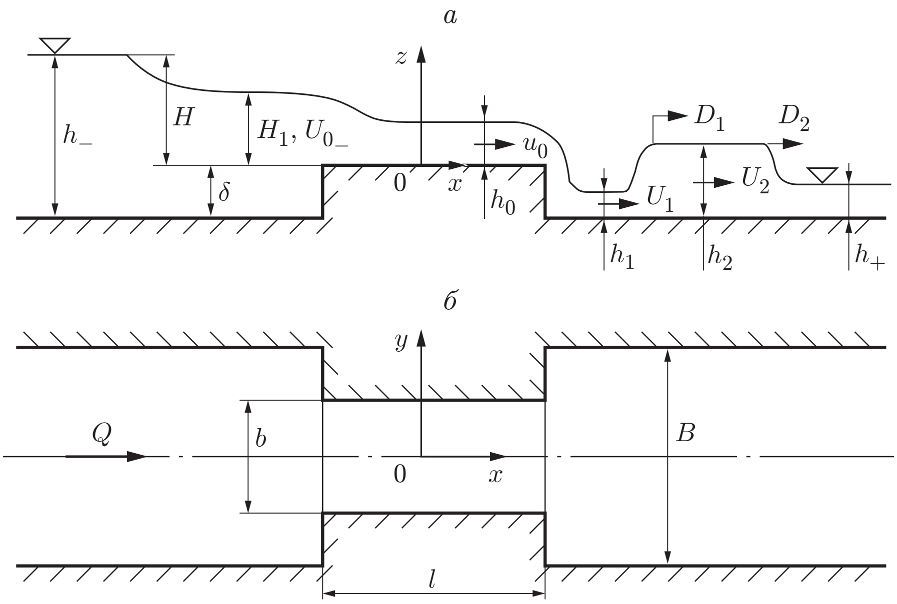

Рис. 1. Схема течения:
а — вид сбоку, *б* — вид сверху

Следующий важный шаг в решении проблемы замыкания сделан независимо в трех работах [10–12], в которых рассмотрен частный случай неровного дна в створе плотины — резкое понижение дна вниз по потоку по всей ширине канала (уступ). Принципиальная новизна работ [10–12] по сравнению с классическими работами, где при теоретическом анализе использовались только законы сохранения массы и количества движения, заключается в том, что в них используется также закон сохранения энергии. Экспериментальная проверка решений [11, 12] для случая разрушения плотины над уступом выполнена в [13, 14].

В настоящей работе приведены экспериментальные данные о волнах в нижнем бьефе, образующихся при частичном разрушении двух модельных плотин, дано обобщение теории [11, 12] и выполнено сравнение методов расчета с полученными экспериментальными данными.

1. Постановка задачи. Схема модельной задачи о частичном разрушении плотины и используемые далее обозначения приведены на рис. 1. В бесконечно длинном прямоугольном канале с горизонтальным дном расположена плотина с прямоугольным отверстием — прораном. В начальном состоянии проран перекрыт щитом, поэтому создается перепад уровней верхнего и нижнего бьефов $h_- - h_+ > 0$. В момент времени $t = 0$ щит "мгновенно" удаляется (в данных опытах — за 0,04 с), в результате чего в верхний бьеф распространяется волна понижения уровня, в нижний бьеф — волна прорыва. Далее в основном рассматривается волна прорыва. Волну в верхнем бьефе необходимо исследовать более детально, поскольку согласно экспериментальным данным [8, 9] форма этой волны более сложная, чем в первом приближении теории мелкой воды.

При теоретическом анализе в рамках первого приближения теории мелкой воды вязкость жидкости не учитывается. В этом случае течение определяется только шестью геометрическими параметрами: h_-, h_+, B, b, δ, l (см. рис. 1) и ускорением свободного падения g. При переходе к безразмерным величинам число геометрических параметров уменьшается до пяти, а параметр g в моделях построения остается размерным. В задаче о полном разрушении плотины число безразмерных геометрических параметров уменьша-

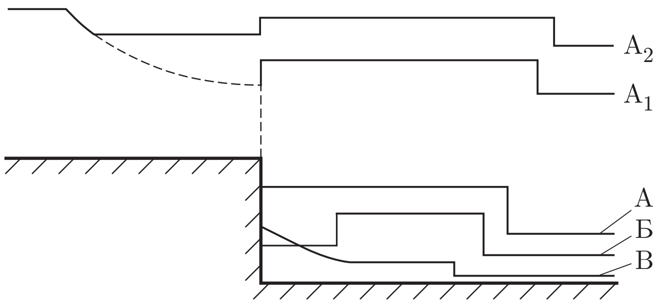

Рис. 2. Теоретически возможные профили волн в нижнем бьефе в случае разрушения плотины над уступом [14]

ется до одного [7]. В эксперименте определенное влияние на распространение волн оказывают вязкость жидкости, гидравлическая шероховатость твердых границ, форма кромок на входе в проран и характер движения щита. Это ограничивает, в частности, диапазон расстояний от плотины, в котором сравнение с теорией будет достаточно корректным. В опытах канал имеет ограниченную длину, поэтому сравнение с рассматриваемыми теориями становится неправомерным после того, как первая отраженная волна достигнет поперечного сечения канала с заданной координатой x или волна в верхнем бьефе распространится до стенки канала, так что граничные условия здесь становятся иными, чем в теории.

Опыты, выполненные в [8, 9] и в данной работе, показывают, что при частичном разрушении плотины могут существовать волны тех же типов (А, Б и В), что и в случае разрушения плотины над уступом. В дальнейшем это используется при обобщении теории [11, 12]. Формы волн, теоретически полученные в работах [12, 14], приведены на рис. 2. Оценки показывают, что при достаточно больших значениях параметра δ/h_- волна типа В (см. рис. 2) существует при настолько малых значениях h_+ (в лабораторных условиях — порядка долей миллиметра), что реализовать ее в опытах практически невозможно. Показанные на рис. 2 волны типа $А_1$, $А_2$ существуют в подтопленном режиме сопряжения бьефов. (Режим сопряжения бьефов называется неподтопленным, если течение в нижнем бьефе не влияет на течение в верхнем бьефе, и подтопленным — в обратном случае.)

В случае волны типа Б с двумя движущимися друг за другом гидравлическими прыжками представляет интерес определение глубин h_1 (непосредственно за плотиной) и h_2 (за передним прыжком), скоростей движения жидкости U_1, U_2 в соответствующих поперечных сечениях, а также характерных скоростей распространения волн D_1, D_2 (см. рис. 1). Согласно теории эти шесть величин не меняются во времени. Из условий сохранения массы и количества движения в системах отсчета, движущихся с постоянными скоростями D_1, D_2, для них можно получить четыре строгих соотношения. Еще два соотношения можно получить в неподвижной системе координат, однако только при определенных допущениях о связи течений в верхнем и нижнем бьефах. Это обусловлено тем, что в условии сохранения количества движения между поперечными сечениями непосредственно перед плотиной и за ней необходимо учитывать неизвестные силы давления на верхней и нижней гранях уцелевшей части плотины.

В теоретической работе [11] для связи течений в верхнем и нижнем бьефах используется уравнение Бернулли вдоль линии тока в неподвижной системе координат, причем предусматривается возможность учета потерь энергии. При этом в [11] рассматривается только неподтопленный режим сопряжения бьефов и предполагается, что непосредственно на уступе устанавливаются критические глубины и скорость, а форма волны в верхнем бьефе такая же, как в случае полного разрушения плотины над ровным дном. Это не вызывает возражений, если рассматривается случай неровного дна в виде уступа по всей ширине канала ($b/B = 1$) и режим сопряжения бьефов неподтопленный. В случае частичного разрушения плотины предположение о том, что в проране устанавливается критическая глубина, можно использовать только при определенных ограничениях на форму и размеры прорана. В частности, оно неприменимо, если $l/h_- < 2$ [15]. В теоретической работе [12] рассматривается также подтопленный режим сопряжения бьефов. При этом предполагается, что непосредственно над уступом располагается неподвижный скачок уровня свободной поверхности. В эксперименте такой скачок отсутствует. В неподтопленном режиме теории [11, 12] дают одинаковые результаты, за исключением некоторых несущественных для дальнейшего исследования деталей [12, 14].

В случае волны типа А имеют место соотношения $h_1 = h_2$, $D_1 = 0$. Величины h_2, U_2 и D_2 остаются неизвестными. Из условий сохранения расхода и количества движения в системе координат, движущейся со скоростью D_2, для этих величин можно получить два строгих соотношения. Третье соотношение в [11] получается аналогично тому, как это сделано для волны типа Б, однако закон сохранения энергии уже не используется. Это исключает возможность учета потерь энергии.

В задаче о частичном разрушении плотины потери энергии могут быть настолько значительными, что течение в нижнем бьефе оказывается докритическим, так что гидравлические прыжки не образуются. Такая картина течения наблюдается, например, в случае относительно узкого прорана при размыве земляной плотины или при падении воды с большой высоты. В теории мелкой воды содержится предположение о потенциальном (безвихревом) характере движения. Вместе с тем перед прораном, в проране, за прораном и при растекании струи в нижнем бьефе образуются мощные вихри, поглощающие значительную часть энергии поступательного движения. В работе [4] по эмпирическим формулам дополнительно задается расход и предполагается, что в верхнем бьефе форма свободной поверхности такая же, как в случае полного разрушения плотины над ровным дном при подтопленном режиме сопряжения бьефов. Потери энергии в этой теории не учитываются.

2. Проверяемые методы расчета. В методе расчета, который далее будем называть методом 1, используется следующая система уравнений из работы [4]:

$$(U_2 - D_2)h_2 = -D_2 h_+; \tag{1}$$

$$gh_2^2/2 + (U_2 - D_2)^2 h_2 = gh_+^2/2 + D_2^2 h_+; \tag{2}$$

$$q = m(b/B)H_1\sqrt{2gH_1}\,; \tag{3}$$

$$q = 2(\sqrt{gh_-} - \sqrt{g(H_1 + \delta)}\,)(H_1 + \delta) = U_2 h_2 \tag{4}$$

(q — удельный расход на единицу ширины канала; m — эмпирический коэффициент расхода). Эта замкнутая система не содержит величин h_1, U_1, D_1, поэтому, строго говоря, она применима только для расчета параметров волн типа А.

Метод, далее называемый методом 2, базируется на объединении основных идей из работ [4, 11, 12]. В этом методе используются соотношения (1)–(4), а также соотношения

$$q_0 = qB/b, \qquad h_0 = kH_1, \qquad u_0 = q_0/h_0; \tag{5}$$

$$e_0 = \delta + h_0 + u_0^2/(2g); \tag{6}$$

$$U_1 = \sqrt{2g(e_0/(1 + \zeta) - h_1)}\,; \tag{7}$$

$$(U_1 - D_1)h_1 = (U_2 - D_1)h_2; \tag{8}$$

$$gh_1^2/2 + (U_1 - D_1)^2 h_1 = gh_2^2/2 + (U_2 - D_1)^2 h_2; \tag{9}$$

$$\zeta = 0, \tag{10}$$

где q_0, h_0, u_0, e_0 — удельный расход, глубина, скорость жидкости и удельная энергия (над дном канала) на выходе из прорана соответственно; k, ζ — эмпирические коэффициенты. Коэффициент k учитывает, что в общем случае глубина $h_0 \neq H_1$ (см. рис. 1). Наличие в модели “свободного параметра” k позволяет использовать метод 2 в случае подтопленного режима сопряжения бьефов и прорана произвольной формы. Коэффициент ζ вводится для учета потерь энергии. В данном методе он полагается равным нулю (уравнение (10)).

В случае неровного дна в виде уступа и неподтопленного режима сопряжения бьефов течение в верхнем бьефе такое, что отсутствует необходимость вводить эмпирические коэффициенты m и k [11]. Это обусловлено тем, что несколько выше по потоку от уступа устанавливается критическая глубина [13]. Постулат о том, что в проране устанавливается критическая глубина, применим также в частном случае прорана в виде так называемого водослива с широким порогом, причем только при неподтопленном режиме сопряжения бьефов [9, 15]. При этом с учетом стандартного определения критической глубины h_* [15] имеет место соотношение

$$h_0 = h_* = \sqrt[3]{q^2/g},$$

и вводить дополнительно эмпирический коэффициент k не требуется.

Для волн типа А имеют место соотношения

$$h_1 = h_2, \qquad U_1 = U_2, \qquad D_1 = 0, \tag{11}$$

которые используются в методе 2, для того чтобы исключить из системы уравнений соотношения (5)–(10). При анализе волн типа А методы 1 и 2 совпадают, поэтому в данном случае метод 2, как и метод 1, не позволяет учитывать потери энергии.

Метод, далее называемый методом 3, отличается от метода 2 тем, что условие (10) заменяется условием $\zeta > 0$, причем только при анализе волн типа Б и В, а также при определении границы области их существования в пространстве заданных параметров. Следует отметить, что с увеличением ζ при прочих равных условиях эта область сужается. При анализе волн типа А также используются только соотношения (1)–(4), и потери энергии не учитываются.

Потери энергии и в случае волн типа Б, и в случае волн типа А учитываются в методе 4. При этом анализ волн типа Б и В, а также границы области их существования проводится с использованием метода 3. Однако при анализе волн типа А равенства (11) используются иначе. Уравнения (2), (8), (9) исключаются, сохраняется условие $\zeta > 0$, а уравнения (6), (7) заменяются следующими соотношениями:

$$e_0 = \delta + H_1 + q^2/(2g(\delta + H_1)^2), \qquad U_2 = \sqrt{2g(e_0/(1+\zeta) - h_2)}\,.$$

3. Методика эксперимента. Опыты проводились в прямоугольном канале длиной 8,3 м, шириной $B = 0{,}2$ м и высотой 0,25 см с ровным горизонтальным дном. Выполнено две серии опытов. В первой серии плотина с прораном моделировалась прямоугольным водосливом с тонкой стенкой и боковым поджатием, во второй серии — водосливом с широким порогом. Параметры $b = 0{,}06$ м и $\delta = 0{,}072$ м в двух сериях были одинаковыми. Длина широкого порога $l = 0{,}38$ м. Начальный напор над гребнем водослива H и начальная глубина нижнего бьефа h_+ варьировались.

Изменение уровня свободной поверхности во времени в нескольких точках по координате x измерялось волномерами. Перед каждой серией опытов непосредственно на экспериментальной установке осуществлялась калибровка волномеров путем погружения их в воду на заданную глубину. Сравнение с расчетами проводилось по параметрам h_2, D_2.

Значение D_2 вычислялось по времени распространения Δt средней по высоте точки переднего фронта волны между двумя волномерами, смещенными на заданное расстояние Δx. Используемые далее экспериментальные данные получены при таких значениях продольной координаты x, при которых порожденное волнами течение было одномерным, и на таких интервалах времени, на которых значения h_2, D_2 не изменялись. Ранее данная методика измерений применялась при изучении волн после полного разрушения плотины над ровным дном [7] и над уступом [13]. Надежность измерений подтверждается тем, что в двух этих частных случаях экспериментальные данные хорошо согласуются с соответствующими данными теорий [4] и [11, 12], не содержащих эмпирических коэффициентов.

Значения коэффициента m, определявшиеся в предварительных опытах с заданным стационарным расходом, хорошо согласуются со справочными данными. В частности, в случае плотины в виде водослива с тонкой стенкой можно использовать эмпирическую формулу Базена [15], в которой начальный напор над гребнем водослива H следует заменить на H_1:

$$m = \Big[0{,}405 + \frac{0{,}0027}{H_1} - 0{,}03\Big(1 - \frac{b}{B}\Big)\Big]\Big[1 + 0{,}55\Big(\frac{b}{B}\Big)^2 \frac{H_1}{H_1 + \delta}\Big]\sigma. \tag{12}$$

Здесь σ — коэффициент подтопления, значения которого определяются по таблице [15]. Следует отметить, что выражение $0{,}0027/H_1$ автор формулы (12) представил в размерной форме. Такая запись сохраняется и в современных справочниках по гидравлике [15], поэтому формула (12) пригодна только для воды при нормальных условиях и линейные размеры в ней следует задавать в метрах.

В случае водослива с широким порогом значения m также содержатся в справочниках [15]. В условиях выполненных опытов и при неподтопленном режиме сопряжения бьефов коэффициент m был постоянным: в случае водослива с тонкой стенкой $m = 0{,}423$, в случае водослива с широким порогом $m = 0{,}314$.

Измеренные значения коэффициента k при неподтопленном режиме также были постоянными: для водослива с тонкой стенкой $k = 0{,}85$, для водослива с широким порогом $k = 0{,}67$. С увеличением степени подтопления $k \to 1$.

Коэффициент ζ подбирался по экспериментальным данным о параметрах волн h_2^0, U_2^0 таким образом, чтобы имело место наилучшее согласие с рассматриваемой теорией. Такой часто используемый способ называется идентификацией параметров модели или калибровкой модели. В частности, именно таким способом по натурным данным для конкретного русла подбирается эмпирический коэффициент Шези, содержащийся в уравнениях Сен-Венана.

4. Сравнение результатов расчета и эксперимента. Для сравнения используются расчетные и экспериментальные зависимости глубины $h_2^0 = h_2/H$ и скорости распространения $D_2^0 = D_2/(gH)^{1/2}$ от начальной глубины нижнего бьефа $h_+^0 = h_+/H$. Как сказано выше, в случае волн типа А результаты, полученные по методу расчета 1, совпадают с результатами, полученными по методу 2, а для волн типа Б и В метод 1, строго говоря, неприменим. В свою очередь, если в методе 3 положить $\zeta = 0$, то результаты, полученные по методу 2, будут совпадать с результатами, полученными по методу 3. Поэтому с экспериментальными данными достаточно сравнить только результаты, полученные по методам 3 и 4. Результаты сравнения приведены на рис. 3 в случаях прорана в виде водослива с тонкой стенкой и прорана в виде водослива с широким порогом. Выше отмечено, что метод 3, как и метод 4, применим при подтопленном режиме, следовательно, сравнение в подтопленном режиме является корректным.

Различие результатов, полученных с помощью методов 3 и 4, может иметь место только в области существования волн типа А. Однако на рис. 3,*а* видно, что и в этой

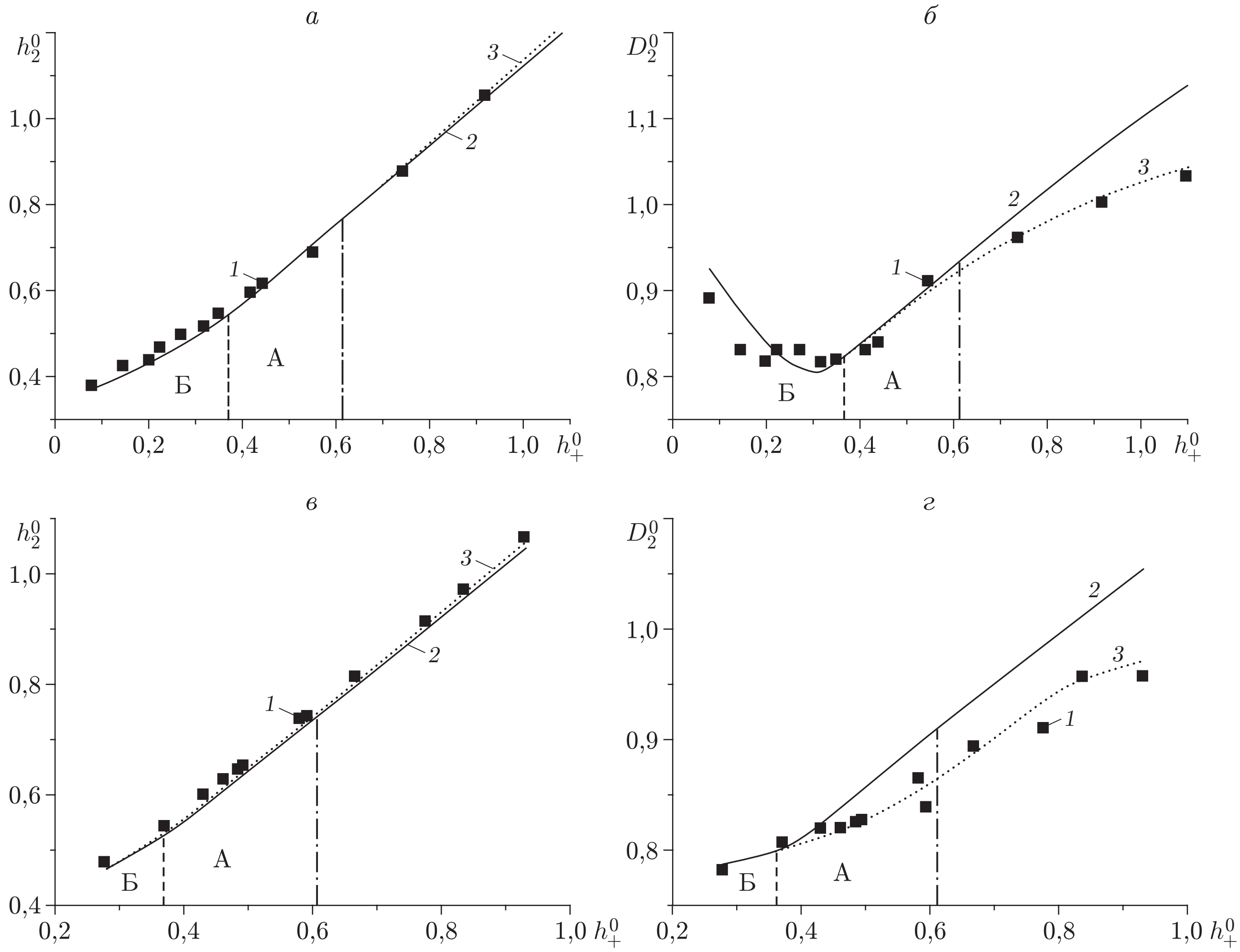

Рис. 3. Глубина за передним фронтом (*а, в*) и скорость распространения переднего фронта (*б, г*) волн в нижнем бьефе:

а, б — в случае прорана в виде водослива с тонкой стенкой; *в, г* — в случае прорана в виде водослива с широким порогом; *1* — эксперимент, *2, 3* — результаты расчетов по методам 3 и 4 соответственно; штриховая линия — граница областей существования волн типа Б и А; штрихпунктирная линия — экспериментальная верхняя граница неподтопленного режима

области методы 3 и 4 дают практически одинаковые значения параметра h_2^0, причем как в неподтопленном, так и в подтопленном режимах сопряжения бьефов. Различие значений параметра D_2^0 более существенное (см. рис. 3,*б*). В расчетах с использованием метода 3, в котором потери энергии не учитываются, глубина за передним фронтом незначительно занижена, а скорость распространения волны типа А завышена. Аналогичные результаты имеют место и в случае прорана в форме водослива с широким порогом (см. рис. 3,*в,г*).

На рис. 4 приведена зависимость коэффициента потерь энергии ζ от параметра h_+^0. Влияние формы водослива на эту зависимость несущественно. Максимальное значение ζ достигается в окрестности границы между областями существования волн типа А и Б. Данные на рис. 3, 4 получены при $\delta/h_- = 0{,}395$, однако даже при таком относительно небольшом значении этого параметра потери энергии существенны. При $h_+^0 = 0{,}37$ потери составляли 63 % величины энергии на входе в проран.

Данные, представленные на рис. 4, показывают, что в опытах с проранами различной формы значения ζ различаются незначительно. Это справедливо также для парамет-

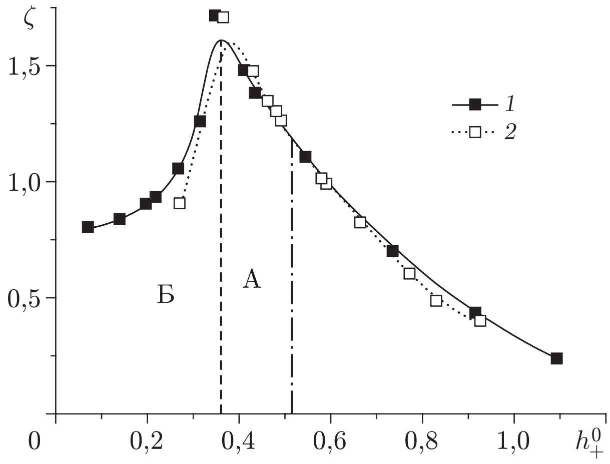

Рис. 4. Зависимость коэффициента потерь энергии ζ от параметра h_+^0:
1 — водослив с тонкой стенкой; *2* — водослив с широким порогом; штриховая линия — граница областей существования волн типа Б и А; штрихпунктирная линия — теоретическая верхняя граница неподтопленного режима; точки — эксперимент; линии — результаты аппроксимации B-сплайнами

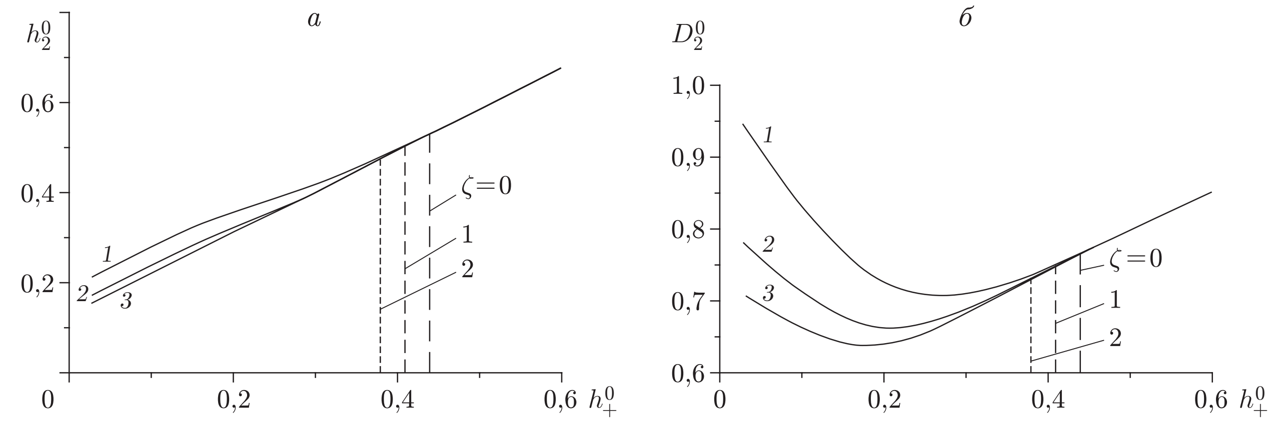

Рис. 5. Расчет параметров h_2^0, D_2^0 по методу 3 при различных значениях ζ:
1 — $\zeta = 0$, *2* — $\zeta = 1$, *3* — $\zeta = 2$; штриховые линии — верхние границы областей существования волн типа Б

ров h_2^0, D_2^0. В частности, в двух сериях опытов при одинаковых начальных глубинах h_+^0 различие значений ζ не превышает 10 %.

При расчетах по методам 3 и 4 коэффициент ζ для каждого значения h_+^0 определялся отдельно. На рис. 5 приведены результаты расчетов по методу 3 при различных значениях ζ в случае прорана в виде водослива с тонкой стенкой. Случай $\zeta = 0$ соответствует методу 2. Штриховыми линиями показаны границы областей существования волн типа А и Б. Положение границы зависит от коэффициента потерь энергии ζ. С увеличением ζ граница смещается к началу координат.

Заключение. Результаты экспериментальной проверки четырех методов расчета показали, что наиболее точные значения параметров волн в нижнем бьефе можно получить, используя метод 4, в котором потери энергии учитываются наиболее полно. В методе 3 потери энергии учитываются только в области существования волн типа Б, а в методах 1 и 2 не учитываются вообще. Методы 3 и 4 дают одинаковые результаты в области существования волн типа Б. В области существования волн типа А результаты, полученные по методам 1–3, совпадают и различаются с экспериментальными данными не более чем на 5 %. Результаты опытов и расчетов по методам 3 и 4 показывают, что чем больше потери энергии, тем шире область существования волн типа А. Соответственно расширяется и область практической применимости наиболее простого метода 1. Методы 1–3 дают завышенную скорость распространения волн. В условиях выполненных опытов скорость распространения переднего фронта волны прорыва, вычисленная по наиболее простому методу 1, превышает ее экспериментальное значение не более чем на 10 %.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Chow Ven Te.** Open-channel hydraulics. N. Y. etc.: McGraw Hill, 1959.
2. **Васильев О. Ф., Лятхер В. М.** Гидравлика // Механика в СССР за 50 лет. М.: Наука, 1970. С. 709–790.
3. **Васильев О. Ф.** Математическое моделирование гидравлических и гидрологических процессов в водоемах и водотоках (обзор работ, выполненных в Сибирском отделении Российской академии наук) // Вод. ресурсы. 1999. Т. 26, № 5. С. 600–611.
4. **Христианович С. А.** Неустановившееся движение в каналах и реках // С. А. Христианович, Б. Б. Девисон, С. Г. Михлин. Некоторые новые вопросы механики сплошной среды. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1938. С. 15–154.
5. **Стокер Дж. Дж.** Волны на воде. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
6. **Dressler R. F.** Comparison of theories and experiments for the hydraulic dam-break wave // Intern. Assoc. Sci. Hydrology. 1954. V. 3, N 38. P. 319–328.
7. **Букреев В. И., Гусев А. В., Малышева А. А., Малышева И. А.** Экспериментальная проверка газогидравлической аналогии на примере задачи о разрушении плотины // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2004. № 5. С. 143–152.
8. **Букреев В. И.** О глубине воды в проране при частичном разрушении плотины // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2005. № 5. С. 115–123.
9. **Букреев В. И.** О расходной характеристике в створе плотины после ее разрушения // ПМТФ. 2006. Т. 47, № 5. С. 77–87.
10. **Alcrudo F., Benkhaldon F.** Exact solutions to the Rieman problem of shallow water equations with bottom step // Comput. Fluids. 2001. V. 30. P. 643–671.
11. **Атавин А. А., Васильев О. Ф.** Оценка возможных последствий аварий на судоходном шлюзе, связанных с разрушением затворов его камер // Тез. докл. междунар. симп. “Гидравлические и гидрологические аспекты надежности и безопасности гидротехнических сооружений”, Санкт-Петербург, 28 мая — 1 июня 2002 г. СПб.: Всерос. науч.-исслед. ин-т гидротехники, 2002. С. 121.
12. **Остапенко В. В.** О разрывных решениях уравнений “мелкой воды” над уступом дна // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 6. С. 62–74.
13. **Букреев В. И., Гусев А. В.** Гравитационные волны при распаде разрыва над уступом дна открытого канала // ПМТФ. 2003. Т. 44, № 4. С. 64–75.
14. **Букреев В. И., Гусев А. В., Остапенко В. В.** Распад разрыва свободной поверхности жидкости над уступом дна канала // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2003. № 6. С. 72–83.
15. **Киселев П. Г.** Справочник по гидравлическим расчетам. М.: Энергия, 1972.

Поступила в редакцию 12/XI 2007 г.,
в окончательном варианте — 13/II 2008 г.