УДК 539.3

ДИНАМИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ РАСТЯЖЕНИЯ СТЕРЖНЯ ИЗ ИДЕАЛЬНО ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

Д. В. Георгиевский

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119991 Москва, Россия
E-mail: georgiev@mech.math.msu.su

Исследуется напряженно-деформированное состояние, возникающее при динамическом растяжении однородного стержня из несжимаемого идеально жесткопластического материала, удовлетворяющего критерию Мизеса — Генки. В осесимметричной постановке учитывается возможность утолщения либо утончения стержня по его длине, что позволяет моделировать образование шейки и ее развитие. Вводятся три безразмерные функции времени, одна из которых представляет собой малый геометрический параметр — отношение среднего радиуса к половине длины стержня. Отношения порядков малости двух других безразмерных функций к малому геометрическому параметру определяют влияние инерционных слагаемых в уравнениях движения на распределение напряжений и скоростей деформаций. На разных временны́х интервалах эти отношения могут быть разными, что обусловливает тот или иной динамический режим растяжения. Выявлено два таких характерных режима, один из которых зависит от скорости удаления торцевых сечений друг от друга, а другой — от ускорения. Для второго режима анализ, проведенный на основе метода асимптотического интегрирования, позволил найти параметры напряженно-деформированного состояния, являющегося "инерционной поправкой" по отношению к квазистатическому состоянию, реализующемуся в стержне с цилиндрической боковой поверхностью.

Ключевые слова: идеальная пластичность, предел текучести, стержень, растяжение, шейка, квазистатика, динамика, скорость деформации, напряжение, асимптотические разложения.

DOI: 10.15372/PMTF20210513

В механике сплошной среды в случае квазистатической либо динамической постановки краевой задачи полагается, что можно ограничиться квазистатической постановкой, если внешние данные меняются со временем достаточно медленно и их изменение не оказывает существенного влияния на решение задачи. Однако математическое представление понятий "внешние данные", "достаточно медленно" и "существенное влияние" зависит от геометрии конкретной задачи и выбранных определяющих соотношений. Характер перехода от квазистатики к динамике в случае упругих, вязких или, например, идеально пластических сред и сопровождающие его физико-механические инерционные процессы существенно различаются. Ясно, что критерием такого перехода должен быть порядок малости отношений определенных безразмерных параметров, возникающих в каждой задаче. Если в гидродинамике вязкой жидкости определяющим безразмерным параметром явля-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 18-29-10085-мк, 19-01-00016-а).

ется число Рейнольдса, то в теории идеально пластического течения, которая применяется в данной работе, в качестве такого параметра используется число Эйлера — отношение предела текучести к характерному динамическому напору. При моделировании пластиков важны также другие безразмерные функции.

Исследованию различных аспектов динамических постановок краевых задач пластического течения (растекания тонкого слоя между сближающимися плитами, течения на поверхностях, движения в фильерах и конфузорах, движения грунтов при внезапном приложении нагрузки), а также групповых свойств уравнений теории пластичности посвящено большое количество работ [1–8]. В последнее время возрос интерес к изучению проблем шейкообразования с учетом краевых эффектов [9] и динамической сверхпластичности [10].

В исследуемой ниже задаче о растяжении стержня из идеально жесткопластического материала на основе развиваемого автором данной работы метода асимптотического интегрирования имеют место два характерных сценария перехода от квазистатического деформирования к динамическому. В каждом из этих сценариев некоторая безразмерная функция времени достигает определенного порядка малости по отношению к малому геометрическому параметру, характеризующему форму стержня. Одна из этих функций представляет собой число, обратное числу Эйлера, другая зависит от ускорения, с которым удаляются друг от друга торцевые сечения.

1. Постановка задачи о динамическом растяжении стержня. Рассмотрим деформирование во времени стержня из однородного несжимаемого идеально жесткопластического материала с плотностью ρ и пределом текучести σ_s, удовлетворяющего критерию пластичности Мизеса — Генки. Область Ω_t в $\mathbb{R}^3$, занятая стержнем в момент t, представляет собой вытянутое тело вращения с неизменным во времени объемом $|\Omega|$ и в цилиндрической системе координат, связанной с осью симметрии стержня, описывается уравнениями

$$\Omega_t = \{(r,\theta,z)\colon \quad r < R(z,t), \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi, \quad -L(t) < z < L(t)\}, \qquad \sup_{-L<z<L} R(z,t) \ll L; \tag{1.1}$$

$$|\Omega| = \pi \int\limits_{-L(t)}^{L(t)} R^2(z,t)\,dz \equiv 2\pi R^{*2}(t)L(t) = \text{const}\,. \tag{1.2}$$

Средний по длине радиус сечения $R^*(t)$ определяется в (1.2) таким образом, чтобы объем цилиндра радиусом $R^*(t)$ и высотой $2L(t)$ был равен $|\Omega|$.

Боковая поверхность $r = R(z,t)$ свободна от напряжений, на торцах $z = L$ и $z = -L$ заданы продольные скорости:

$$z = \pm L(t)\colon \quad v_z = \pm V(t), \quad V(t) > 0. \tag{1.3}$$

Таким образом, рассматривается задача о растяжении стержня с заданным законом движения его концов. Функции $L(t)$ и $R^*(t)$ являются соответственно монотонно возрастающей и монотонно убывающей. Ограничимся рассмотрением поля вектора скорости $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$, $\boldsymbol{x} \in \Omega_t$ в виде $v_r = v_r(r,z,t)$, $v_\theta \equiv 0$, $v_z = v_z(r,z,t)$. Это поле порождает тензор скоростей деформаций $\tilde{v}(\boldsymbol{x},t)$ с ненулевыми компонентами

$$v_{rr} = v_{r,r}, \quad v_{\theta\theta} = \frac{v_r}{r}, \quad v_{zz} = v_{z,z}, \quad v_{rz} = \frac{1}{2}\,(v_{r,z} + v_{z,r}) \tag{1.4}$$

(запятая в индексе означает частное дифференцирование по соответствующим цилиндрическим координатам). В силу несжимаемости $\operatorname{tr}\tilde{v} = 0$.

Представим симметричный тензор напряжений $\tilde{\sigma}(\boldsymbol{x}, t)$, $\boldsymbol{x} \in \Omega_t$ в виде суммы шаровой и девиаторной частей: $\tilde{\sigma} = -p\tilde{I} + \tilde{s}$ (p — давление; $\tilde{I}$ — единичный тензор второго ранга; $\operatorname{tr}\tilde{s} = 0$). Определим также интенсивности скоростей деформаций v_{int} и напряжений σ_{int}:

$$v_{int} = \sqrt{\tilde{v} : \tilde{v}}, \qquad \sigma_{int} = \sqrt{\tilde{s} : \tilde{s}}\,. \tag{1.5}$$

Векторные определяющие соотношения идеально пластической среды

$$v_{int}\tilde{s} = \sigma_{int}\tilde{v} \tag{1.6}$$

линейны, поэтому ненулевыми компонентами девиатора $\tilde{s}$ являются компоненты с теми же индексами, что и у тензора $\tilde{v}$ (1.4). Выражая $s_{\theta\theta} = -s_{rr} - s_{zz}$, будем считать независимыми компоненты s_{rr}, s_{zz} и s_{rz}. Тогда скалярное определяющее соотношение $\sigma_{int} = \sigma_s$, являющееся условием пластичности Мизеса — Генки, записывается следующим образом:

$$2(s_{rr}^2 + s_{zz}^2 + s_{rr}s_{zz} + s_{rz}^2) = \sigma_s^2. \tag{1.7}$$

Исключая интенсивности σ_{int}, v_{int}, из соотношений (1.6) можно получить два независимых равенства: $s_{rr}v_{zz} = s_{zz}v_{rr}$ и $s_{rz}v_{zz} = s_{zz}v_{rz}$, которые с учетом связей (1.4) преобразуются к виду

$$s_{rr}v_{z,z} = s_{zz}v_{r,r}, \qquad 2s_{rz}v_{z,z} = s_{zz}(v_{r,z} + v_{z,r}). \tag{1.8}$$

Запишем также два уравнения движения в осесимметричном случае

$$-p_{,r} + s_{rr,r} + s_{rz,z} + r^{-1}(2s_{rr} + s_{zz}) = \rho(v_{r,t} + v_r v_{r,r} + v_z v_{r,z}); \tag{1.9}$$

$$-p_{,z} + s_{rz,r} + s_{zz,z} + r^{-1}s_{rz} = \rho(v_{z,t} + v_r v_{z,r} + v_z v_{z,z}) \tag{1.10}$$

и условие несжимаемости

$$v_{r,r} + r^{-1}v_r + v_{z,z} = 0. \tag{1.11}$$

Первые слагаемые в правых частях (1.9), (1.10) означают частные производные от компонент v_r и v_z по времени.

Нелинейная система шести уравнений (1.7)–(1.11) замкнута относительно шести функций v_r, v_z, p, s_{rr}, s_{zz}, s_{rz}, зависящих от r, z, t, в области Ω_t (1.1) с заранее неизвестным участком границы $r = R(z, t)$ с вектором внешней нормали $\boldsymbol{n}$:

$$n_r = \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial R/\partial z)^2}}, \qquad n_z = -\frac{\partial R/\partial z}{\sqrt{1 + (\partial R/\partial z)^2}}. \tag{1.12}$$

На этом участке границы выполнены условия равенства нулю двух компонент вектора напряжений:

$$r = R(z, t): \qquad -p + s_{rr} - \frac{\partial R}{\partial z}\, s_{rz} = 0, \qquad s_{rz} + \frac{\partial R}{\partial z}\,(p - s_{zz}) = 0. \tag{1.13}$$

Кроме того, выполняются два кинематических граничных условия (1.3) на торцах стержня.

Для строгой постановки начально-краевой динамической задачи о растяжении стержня при $t > 0$ необходимо также задать функцию $r = R(z, 0) \equiv R_0(z)$, $-L_0 < z < L_0$, удовлетворяющую интегральному условию

$$\int_{-L_0}^{L_0} R_0^2(z)\, dz = \frac{|\Omega|}{\pi}.$$

При $t = 0$ определенный в (1.2) средний радиус R^* принимает максимальное значение R_0^*:

$$R_0^* = \Big(\frac{1}{2L_0}\int\limits_{-L_0}^{L_0} R_0^2(z)\,dz\Big)^{1/2} \equiv \sqrt{\frac{|\Omega|}{2\pi L_0}}\,.$$

2. Квазистатический режим растяжения. Квазистатическая постановка задачи о растяжении стержня из идеально жесткопластического материала отличается от динамической постановки тем, что в правых частях уравнений (1.9), (1.10) отсутствуют инерционные члены, т. е. время t становится параметром, входящим в решение неявно, через величины V, R, L. Уравнения (1.9), (1.10) переходят в уравнения равновесия.

Точное решение задачи в квазистатической постановке несложно получить аналитически в случае начальной цилиндрической боковой поверхности стержня: $R_0(z) \equiv R_0^* = \text{const}$. Величинам, входящим в это решение, соответствует верхний индекс qs. Получаем

$$v_r^{qs} = -Vr/(2L), \qquad v_z^{qs} = Vz/L; \tag{2.1}$$

$$s_{rr}^{qs} = s_{\theta\theta}^{qs} = p^{qs} = -\sigma_s/\sqrt{6}, \quad s_{zz}^{qs} = 2\sigma_s/\sqrt{6}, \quad s_{rz}^{qs} \equiv 0, \quad \sigma_{zz}^{qs} = 3\sigma_s/\sqrt{6}. \tag{2.2}$$

Тензор напряжений имеет только одну ненулевую компоненту σ_{zz}^{qs}. Напряженное состояние (2.2) однородно в Ω_t и не зависит от заданной скорости V.

Интегрируя задачу Коши

$$\frac{dr}{dt} = v_r^{qs}(r), \qquad \frac{dz}{dt} = v_z^{qs}(z), \qquad r\big|_{t=0} = r_0, \qquad z\big|_{t=0} = z_0,$$

находим лагранжев закон движения частиц (при интегрировании полагается, что V и L постоянны):

$$r^{qs}(t) = r_0 \exp\Big(-\frac{Vt}{2L}\Big), \qquad z^{qs}(t) = z_0 \exp\Big(\frac{Vt}{L}\Big).$$

Траектории частиц представляют собой семейство гипербол $r^2 z = r_0^2 z_0$. Независимость r^{qs} от z_0 и z^{qs} от r_0 свидетельствует о том, что начальная цилиндрическая боковая поверхность $r = R_0^*$ стержня остается цилиндрической и изначально плоские торцевые сечения $z = \pm L_0$ остаются плоскими, т. е. область Ω_t представляет собой вытягивающийся со временем цилиндр.

Соотношения (2.1) обеспечивают отсутствие жестких зон в Ω_t, так как согласно (1.4), (1.5) $v_{int}^{qs} = \sqrt{6}\,V/(2L) > 0$ во всех точках стержня. Найдем также модуль осевой растягивающей силы в любом поперечном сечении:

$$Q^{qs} = \pi R^{*2}\sigma_{zz} = 3\sigma_s\,|\Omega|/(2\sqrt{6}\,L),$$

убывающий по мере растяжения.

Выясним, при каких соотношениях безразмерных параметров системы (или на каких временах) записанное выше квазистатическое приближение является главным и можно ограничиться им в технологических расчетах, а в каких случаях инерционные эффекты начинают оказывать влияние на распределение напряжений и движение точек стержня.

3. Асимптотические разложения. Вернемся к уравнениям движения (1.9), (1.10) с отличными от нуля правыми частями. Введем три явно зависящих от времени безразмерных параметра:

$$0 < \alpha = \frac{R^*(t)}{L(t)} \ll 1, \qquad 0 < \varepsilon_1 = \frac{\sqrt{2}\,\rho}{\sigma_s}\,V^2, \qquad 0 \leqslant \varepsilon_2 = \frac{\sqrt{2}\,\rho}{\sigma_s}\,\dot V(t)R^*(t). \tag{3.1}$$

Шесть функций времени R^*, L, V, α, ε_1, ε_2 взаимосвязаны, и задание любой из них во многом определяет пять остальных. На различных временны́х интервалах процесса растяжения порядок малости α по отношению к ε_1 и ε_2 может меняться. От этого зависит вклад инерционных слагаемых в уравнения движения (1.9), (1.10).

Представим разложения шести неизвестных в (1.7)–(1.11) функций в виде регулярных асимптотических рядов по целым степеням малого асимптотического параметра α, явно зависящего от времени (в [11, 12] аналогичные по структуре разложения использовались при анализе задачи Прандтля в динамической постановке):

$$v_r(r,z,t) = V(t)\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n(t)\,\bar v_\xi^{\{n\}}(\xi,\zeta,\tau), \qquad v_z(r,z,t) = V(t)\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n(t)\,\bar v_\zeta^{\{n\}}(\xi,\zeta,\tau),$$

$$s_{(rr;zz;rz)}(r,z,t) = \frac{\sigma_s}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n(t)\,\bar s^{\{n\}}_{(\xi\xi;\zeta\zeta;\xi\zeta)}(\xi,\zeta,\tau), \tag{3.2}$$

$$p(r,z,t) = \frac{\sigma_s}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n(t)\,\bar p^{\{n\}}(\xi,\zeta,\tau);$$

$$\xi = \frac{r}{R^*(t)}, \qquad \zeta = \frac{z}{L(t)}, \qquad \tau = \sqrt{\frac{\sigma_s}{\rho}}\,\frac{t}{R^*(t)}. \tag{3.3}$$

Безразмерные коэффициенты рядов (3.2) (величины с чертой) зависят от безразмерных координат ξ, ζ и безразмерного времени τ. Область стержня Ω_t (1.1) в любой момент времени описывается неравенствами

$$\Omega_t = \{(\xi,\theta,\zeta)\colon \quad 0\leqslant \xi < \eta(\zeta,\tau), \quad 0\leqslant\theta<2\pi, \quad -1<\zeta<1\}; \tag{3.4}$$

$$\eta(\zeta,\tau) = \frac{R(z,t)}{R^*(t)}, \qquad \int\limits_{-1}^{1}\eta(\zeta,\tau)\,d\zeta = 2, \qquad \frac{\partial R}{\partial z} = \alpha\,\frac{\partial\eta}{\partial\zeta}. \tag{3.5}$$

Заметим, что порядок малости по α безразмерных производных $\partial R/\partial z$ и $\partial\eta/\partial\zeta$ различен.

Так как функция $\tau(t)$ монотонно возрастает, якобиан $\partial\,(\xi,\zeta,\tau)/\partial\,(r,z,t)$ в (3.3) отличен от нуля, что свидетельствует о невырожденности этой функции. Нижний предел $n=0$ в рядах (3.2) для v_z и компонент девиатора напряжений обусловлен граничными условиями (1.3) и критерием пластичности (1.7). Как показано ниже, из этого предела следуют нижние пределы суммирования для остальных величин (v_r и p).

Из (3.3) получаем формулы перехода

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{R^*}\,\frac{\partial}{\partial\xi}, \qquad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{L}\,\frac{\partial}{\partial\zeta} = \frac{\alpha}{R^*}\,\frac{\partial}{\partial\xi}; \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial\xi}{\partial t}\,\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\partial\zeta}{\partial t}\,\frac{\partial}{\partial\zeta} + \frac{\partial\tau}{\partial t}\,\frac{\partial}{\partial\tau} = \frac{V\xi}{2L}\,\frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{V\zeta}{L}\,\frac{\partial}{\partial\zeta} + \sqrt{\frac{\sigma_s}{\rho}}\,\frac{1}{R^*}\Big(1+\frac{Vt}{2L}\Big)\,\frac{\partial}{\partial\tau}, \tag{3.7}$$

а из определения малого параметра α (3.1) — кинетическое соотношение

$$\dot\alpha = \Big(\frac{R^*}{L}\Big)^{\cdot} = R_0\sqrt{L_0}\,(L^{-3/2})^{\cdot} = -\frac{3}{2}\,R_0\sqrt{L_0}\,L^{-5/2}\dot L = -\frac{3V\alpha}{2L}. \tag{3.8}$$

Например, слагаемое $\rho v_{r,t}$ в (1.9) записывается следующим образом:

$$\rho v_{r,t} = \rho \dot{V} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \, \bar{v}_\xi^{\{n\}} - \frac{3\rho V^2}{2L} \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha^n \, \bar{v}_\xi^{\{n\}} + \frac{\rho V^2}{2L} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \, \xi \bar{v}_{\xi,\xi}^{\{n\}} - \\ - \frac{\rho V^2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \, \zeta \bar{v}_{\xi,\zeta}^{\{n\}} + \rho V \Big(\sqrt{\frac{\sigma_s}{\rho}} \, \frac{1}{R^*} + \frac{V\tau}{2L} \Big) \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \, \bar{v}_{\xi,\tau}^{\{n\}}. \qquad (3.9)$$

Подставим ряды (3.2) в шесть уравнений (1.7)–(1.11) и граничные условия (1.3), (1.13). С учетом формул (3.6)–(3.9) получаем систему, включающую уравнения движения

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \Big((-\bar{p}^{\{n\}} + \bar{s}_{\xi\xi}^{\{n\}})_{,\xi} + \frac{1}{\xi} \, (2\bar{s}_{\xi\xi}^{\{n\}} + \bar{s}_{\zeta\zeta}^{\{n\}}) + \alpha \bar{s}_{\xi\zeta,\zeta}^{\{n\}} \Big) = \\ = \varepsilon_1 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n+1} \Big(\frac{\xi}{2} \, \bar{v}_{\xi,\xi}^{\{n\}} - \frac{3n}{2} \, \bar{v}_\xi^{\{n\}} - \zeta \bar{v}_{\xi,\zeta}^{\{n\}} + \frac{\tau}{2} \, \bar{v}_{\xi,\tau}^{\{n\}} \Big) + \\ + \varepsilon_1 \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \, \bar{v}_\xi^{\{n\}} \Big) \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \, \bar{v}_{\xi,\xi}^{\{n\}} \Big) + \varepsilon_1 \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{n+1} \, \bar{v}_\zeta^{\{n\}} \Big) \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \, \bar{v}_{\xi,\zeta}^{\{n\}} \Big) + \\ + \sqrt[4]{2} \sqrt{\varepsilon_1} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \, \bar{v}_{\xi,\tau}^{\{n\}} + \varepsilon_2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \, \bar{v}_\xi^{\{n\}}; \qquad (3.10)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \Big(\bar{s}_{\xi\zeta,\xi}^{\{n\}} + \frac{1}{\xi} \, \bar{s}_{\xi\zeta}^{\{n\}} + \alpha(-\bar{p}^{\{n\}} + \bar{s}_{\zeta\zeta}^{\{n\}})_{,\zeta} \Big) = \\ = \varepsilon_1 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{n+1} \Big(\frac{\xi}{2} \, \bar{v}_{\zeta,\xi}^{\{n\}} - \frac{3n}{2} \, \bar{v}_\zeta^{\{n\}} - \zeta \bar{v}_{\zeta,\zeta}^{\{n\}} + \frac{\tau}{2} \, \bar{v}_{\zeta,\tau}^{\{n\}} \Big) + \\ + \varepsilon_1 \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \, \bar{v}_\xi^{\{n\}} \Big) \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \, \bar{v}_{\zeta,\xi}^{\{n\}} \Big) + \varepsilon_1 \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{n+1} \, \bar{v}_\zeta^{\{n\}} \Big) \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \, \bar{v}_{\zeta,\zeta}^{\{n\}} \Big) + \\ + \sqrt[4]{2} \sqrt{\varepsilon_1} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \, \bar{v}_{\zeta,\tau}^{\{n\}} + \varepsilon_2 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \, \bar{v}_\zeta^{\{n\}}, \qquad (3.11)$$

условия соосности девиатора напряжений и тензора скоростей деформаций

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \, \bar{s}_{\xi\xi}^{\{n\}} \Big) \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{n+1} \, \bar{v}_{\zeta,\zeta}^{\{n\}} \Big) = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \, \bar{s}_{\zeta\zeta}^{\{n\}} \Big) \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \, \bar{v}_{\xi,\xi}^{\{n\}} \Big); \qquad (3.12)$$

$$2 \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \, \bar{s}_{\xi\zeta}^{\{n\}} \Big) \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{n+1} \, \bar{v}_{\zeta,\zeta}^{\{n\}} \Big) = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \, \bar{s}_{\zeta\zeta}^{\{n\}} \Big) \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n+1} \, \bar{v}_{\xi,\zeta}^{\{n\}} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \, \bar{v}_{\zeta,\xi}^{\{n\}} \Big), \qquad (3.13)$$

критерий Мизеса — Генки

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \, \bar{s}_{\xi\xi}^{\{n\}} \Big)^2 + \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \, \bar{s}_{\zeta\zeta}^{\{n\}} \Big)^2 + \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \, \bar{s}_{\xi\xi}^{\{n\}} \Big) \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \, \bar{s}_{\zeta\zeta}^{\{n\}} \Big) + \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \, \bar{s}_{\xi\zeta}^{\{n\}} \Big)^2 = 1 \qquad (3.14)$$

и условие несжимаемости, которое в силу линейности может быть записано в форме рекуррентной цепочки

$$\bar{v}_{\xi,\xi}^{\{n+1\}} + \xi^{-1} \bar{v}_\xi^{\{n+1\}} + \bar{v}_{\zeta,\zeta}^{\{n\}} = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots . \qquad (3.15)$$

Граничные условия (1.3) имеют вид

$$\zeta = \pm 1: \qquad \bar v_\zeta^{\{0\}} = \pm 1, \qquad \bar v_\zeta^{\{1\}} = \bar v_\zeta^{\{2\}} = \ldots = 0. \tag{3.16}$$

Условия (1.13), согласно которым боковая поверхность свободна от напряжений, принимают следующий вид:

$$\xi = \eta(\zeta,\tau): \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \left(-\bar p^{\{n\}} + \bar s_{\xi\xi}^{\{n\}} - \alpha\, \frac{\partial \eta}{\partial \zeta}\, \bar s_{\xi\zeta}^{\{n\}} \right) = 0,$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \left(\bar s_{\xi\zeta}^{\{n\}} - \alpha\, \frac{\partial \eta}{\partial \zeta}\, (-\bar p^{\{n\}} + \bar s_{\zeta\zeta}^{\{n\}}) \right) = 0. \tag{3.17}$$

Безразмерные параметры $\varepsilon_1(t)$ и $\varepsilon_2(t)$, характеризующие инерционные эффекты при растяжении, входят только в правые части уравнений движения (3.10), (3.11). На тех или иных временны́х интервалах порядок их малости по сравнению с $\alpha(t)$ может быть различным. От этого зависит учет или неучет различных слагаемых в правых частях (3.10), (3.11) в процессе уравнивания коэффициентов при одинаковых степенях α.

4. Метод асимптотического интегрирования. Используется метод асимптотического интегрирования [13, 14] задачи (3.10)–(3.17), заключающийся в последовательном решении замкнутых систем уравнений относительно $\bar v_\xi^{\{m\}}$, $\bar v_\zeta^{\{n\}}$, $\bar s_{\xi\xi}^{\{n\}}$, $\bar s_{\zeta\zeta}^{\{n\}}$, $\bar s_{\xi\zeta}^{\{n\}}$, $\bar p^{\{n\}}$, $m = 1, 2, \ldots$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ в области Ω_t (3.4) с заранее неизвестным участком границы $\xi = \eta(\zeta,\tau)$.

Начало рекуррентной цепочки получим, уравнивая в (3.12) коэффициенты при α^0 и записывая уравнение (3.15) при $n = 0$:

$$\bar v_{\zeta,\xi}^{\{0\}} = 0, \qquad \bar v_{\xi,\xi}^{\{1\}} + \xi^{-1} \bar v_\xi^{\{1\}} + \bar v_{\zeta,\zeta}^{\{0\}} = 0. \tag{4.1}$$

Система (4.1) относительно двух функций $\bar v_\zeta^{\{0\}}$ и $\bar v_\xi^{\{1\}}$ легко интегрируется с учетом граничного условия (3.16) для $\bar v_\zeta^{\{0\}}$:

$$\bar v_\zeta^{\{0\}} = \zeta, \qquad \bar v_\xi^{\{1\}} = -\xi/2. \tag{4.2}$$

Главные по α компоненты вектора скорости совпадают с компонентами (2.1) в квазистатике. Линейные зависимости (4.2) имеют место для любых порядков малости по α параметров $\varepsilon_1(t)$ и $\varepsilon_2(t)$. Подставляя компоненты (4.2) в уравнения движения (3.10), (3.11), уточним выражения в правых частях этих уравнений:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \Big((-\bar p^{\{n\}} + \bar s_{\xi\xi}^{\{n\}})_{,\xi} + \frac{1}{\xi}\, (2\bar s_{\xi\xi}^{\{n\}} + \bar s_{\zeta\zeta}^{\{n\}}) + \alpha \bar s_{\xi\zeta,\zeta}^{\{n\}} \Big) =$$
$$= \varepsilon_1 \Big(\frac{\xi\alpha^2}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \alpha^{n+1} \Big(\frac{\xi}{2}\, \bar v_{\xi,\xi}^{\{n\}} - \frac{3n}{2}\, \bar v_\xi^{\{n\}} - \zeta \bar v_{\xi,\zeta}^{\{n\}} + \frac{\tau}{2}\, \bar v_{\xi,\tau}^{\{n\}} \Big) \Big) +$$
$$+ \varepsilon_1 \Big(-\frac{\xi\alpha}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \alpha^n\, \bar v_\xi^{\{n\}} \Big) \Big(-\frac{\alpha}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \alpha^n\, \bar v_{\xi,\xi}^{\{n\}} \Big) + \varepsilon_1 \Big(\zeta\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n+1}\, \bar v_\zeta^{\{n\}} \Big) \Big(\sum_{n=2}^{\infty} \alpha^n\, \bar v_{\xi,\zeta}^{\{n\}} \Big) +$$
$$+ \sqrt[4]{2}\sqrt{\varepsilon_1} \sum_{n=2}^{\infty} \alpha^n\, \bar v_{\xi,\tau}^{\{n\}} + \varepsilon_2 \Big(-\frac{\xi\alpha}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \alpha^n\, \bar v_\xi^{\{n\}} \Big); \tag{4.3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\Big(\bar{s}^{\{n\}}_{\xi\zeta,\xi}+\frac{1}{\xi}\,\bar{s}^{\{n\}}_{\xi\zeta}+\alpha(-\bar{p}^{\{n\}}+\bar{s}^{\{n\}}_{\zeta\zeta})_{,\zeta}\Big)=$$

$$=\varepsilon_1\Big(-\zeta\alpha+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{n+1}\Big(\frac{\xi}{2}\,\bar{v}^{\{n\}}_{\zeta,\xi}-\frac{3n}{2}\,\bar{v}^{\{n\}}_{\zeta}-\zeta\bar{v}^{\{n\}}_{\zeta,\zeta}+\frac{\tau}{2}\,\bar{v}^{\{n\}}_{\zeta,\tau}\Big)\Big)+$$

$$+\varepsilon_1\Big(-\frac{\xi\alpha}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\alpha^n\,\bar{v}^{\{n\}}_{\xi}\Big)\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n\,\bar{v}^{\{n\}}_{\zeta,\xi}\Big)+\varepsilon_1\Big(\zeta\alpha+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{n+1}\,\bar{v}^{\{n\}}_{\zeta}\Big)\Big(1+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n\,\bar{v}^{\{n\}}_{\zeta,\zeta}\Big)+$$

$$+\sqrt[4]{2}\sqrt{\varepsilon_1}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n\,\bar{v}^{\{n\}}_{\zeta,\tau}+\varepsilon_2\Big(\zeta+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n\,\bar{v}^{\{n\}}_{\zeta}\Big). \qquad (4.4)$$

Приравнивая коэффициенты при старших степенях α в уравнениях (3.12)–(3.14), получаем незамкнутую систему относительно $\bar{s}^{\{0\}}_{\xi\xi}$, $\bar{s}^{\{0\}}_{\zeta\zeta}$, $\bar{s}^{\{0\}}_{\xi\zeta}$, $\bar{v}^{\{1\}}_{\zeta}$:

$$\bar{s}^{\{0\}}_{\xi\xi}=-\bar{s}^{\{0\}}_{\zeta\zeta}/2,\qquad 2\bar{s}^{\{0\}}_{\xi\zeta}=\bar{s}^{\{0\}}_{\zeta\zeta}\bar{v}^{\{1\}}_{\zeta,\xi},\qquad (3/4)(\bar{s}^{\{0\}}_{\zeta\zeta})^2+(\bar{s}^{\{0\}}_{\xi\zeta})^2=1. \qquad (4.5)$$

Для замыкания этой системы используем уравнение (4.4), в левой части которого главным по α слагаемым является коэффициент $\bar{s}^{\{0\}}_{\xi\zeta,\xi}+\bar{s}^{\{0\}}_{\xi\zeta}/\xi$ при α^0. Из (4.4) следует, что на временны́х интервалах, когда одновременно $\varepsilon_1\alpha^2=o(1)$ и $\varepsilon_2=o(1)$, этот коэффициент равен нулю, т. е. $\bar{s}^{\{0\}}_{\xi\zeta}=C(\zeta,\tau)/\xi$, или $\bar{s}^{\{0\}}_{\xi\zeta}\equiv 0$ в силу ограниченности компонент девиатора напряжений. Подставляя $\bar{s}^{\{0\}}_{\xi\zeta}\equiv 0$ в соотношения (4.5), получим напряженное состояние (2.2), соответствующее квазистатическому растяжению стержня с цилиндрической боковой поверхностью. Заметим, что порядок малости по α правой части уравнения движения (4.3) также зависит от ε_1 и ε_2. На временны́х интервалах, когда $\varepsilon_1\alpha^2=o(1)$ и $\varepsilon_2=o(1)$, имеем $(-\bar{p}^{\{0\}}+\bar{s}^{\{0\}}_{\xi\xi})_{,\xi}=0$ (слагаемое $2\bar{s}^{\{0\}}_{\xi\xi}+\bar{s}^{\{0\}}_{\zeta\zeta}$ равно нулю в силу первого соотношения в (4.5)).

Итак, динамические процессы оказывают влияние на напряженно-деформированное состояние, сопоставимое с влиянием квазистатических процессов, если выполняется хотя бы одно из следующих требований: 1) параметр ε_1 порядка α^n, $n\geqslant -2$; 2) параметр ε_2 порядка α^m, $m\geqslant 0$.

Выясним физический смысл предельных случаев $\varepsilon_1=O(\alpha^{-2})$ и $\varepsilon_2=O(1)$, начиная с которых необходим учет ускорений в правых частях уравнений движения.

Размерная константа ρ/σ_s, входящая в определения ε_1 и ε_2 в (3.1), как для металлов и сплавов, так и для большинства полимеров имеет порядок $10^{-5}\div 10^{-4}$ с^2/м^2. При выборе временного интервала, на котором $\alpha\sim 10^{-1}$, $R^*\sim 10^{-2}$ м, величина ε_1 будет иметь порядок $O(\alpha^{-2})$ при характерных скоростях $V\sim 10^3$ м/с, а величина ε_2 — порядок $O(1)$ при характерных ускорениях $\dot{V}\sim 10^6\div 10^7$ м/с^2. Такие диапазоны V и $\dot{V}$ представляются нереальными в случае растяжения деформируемого твердого тела. Однако на очень малых (порядка 10^{-6} с) интервалах времени они могут реализовываться как в модельных экспериментах, так и в реальных условиях.

В данной работе рассматривается случай $\varepsilon_2=O(1)$, $\varepsilon_1=o(\alpha^{-2})$. Для главных членов асимптотик уравнения движения (4.3), (4.4) принимают вид

$$(-\bar{p}^{\{0\}}+\bar{s}^{\{0\}}_{\xi\xi})_{,\xi}=0,\qquad \bar{s}^{\{0\}}_{\xi\zeta,\xi}+\xi^{-1}\bar{s}^{\{0\}}_{\xi\zeta}=\varepsilon_2\zeta, \qquad (4.6)$$

где ε_2 — известная функция времени порядка единицы. Второе уравнение (4.6) замыкает систему (4.5), первое служит для нахождения давления $\bar{p}^{\{0\}}$.

Решение системы (4.5), (4.6) относительно $\bar{s}_{\xi\xi}^{\{0\}}$, $\bar{s}_{\zeta\zeta}^{\{0\}}$, $\bar{s}_{\xi\zeta}^{\{0\}}$, $\bar{v}_{\zeta,\xi}^{\{1\}}$ имеет вид

$$\bar{s}_{\xi\zeta}^{\{0\}} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_2\,\xi\zeta, \quad \bar{s}_{\zeta\zeta}^{\{0\}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{4-\varepsilon_2^2\,\xi^2\zeta^2}, \quad \bar{s}_{\xi\xi}^{\{0\}} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{4-\varepsilon_2^2\,\xi^2\zeta^2},$$
$$\bar{v}_{\zeta,\xi}^{\{1\}} = \pm\frac{\sqrt{3}\,\varepsilon_2\,\xi\zeta}{\sqrt{4-\varepsilon_2^2\,\xi^2\zeta^2}}. \tag{4.7}$$

Заметим, что если задать условие $\varepsilon_2 \to 0$ и учесть формулы перехода к размерным напряжениям (3.2), то решение (4.7) будет стремиться к квазистатическому (2.2). Интегрируя по ξ последнее соотношение в (4.7), получаем выражение

$$\bar{v}_{\zeta}^{\{1\}} = \mp\frac{\sqrt{3}}{\varepsilon_2\,\zeta}\sqrt{4-\varepsilon_2^2\,\xi^2\zeta^2} + f(\zeta,\tau) \tag{4.8}$$

с точностью до произвольной функции $f(\zeta,\tau)$, которая определяется в результате анализа следующих по α приближений.

Анализ выражения (4.8) позволяет сделать следующие выводы.

1. Точно удовлетворить однородным граничным условиям (3.16) на торцах $\zeta = \pm 1$ не удается.

2. При $\zeta \to 0$, т. е. по мере приближения к середине стержня, $|\bar{v}_{\zeta}^{\{1\}}| \to \infty$, что свидетельствует о потере асимптотичности в смысле Пуанкаре [15] вблизи точки $\zeta = 0$ ряда (3.2) для продольной скорости v_z.

3. Знак “$\mp$” в (4.8) показывает, что плоский в главном по α приближении профиль продольной скорости (4.2) может искривляться в следующем приближении в направлении как среднего сечения, так и торцов стержня.

Таким образом, представление решения в виде асимптотических рядов (3.2) становится неверным вблизи концов $\zeta = \pm 1$, т. е. в зонах краевого эффекта, и вблизи среднего сечения $\zeta = 0$, где происходит перестройка течения. Геометрия области, в которой решение неприменимо, подобна геометрии соответствующей области в классической задаче об идеально жесткопластическом течении — задаче Прандтля [2, 4, 6, 8, 11].

5. Уравнение для определения радиуса боковой поверхности стержня. Рассмотрим граничные условия (3.17) на неизвестной боковой поверхности стержня $\xi = \eta(\zeta,\tau)$. Порядок малости по α производной $\partial\eta/\partial\zeta$ также заранее неизвестен. Предположим сначала, что $\partial\eta/\partial\zeta \sim 1$, т. е. согласно (3.5) $\partial R/\partial z \sim \alpha$. Тогда в главном по α приближении

$$\xi = \eta(\zeta,\tau): \qquad -\bar{p}^{\{0\}} + \bar{s}_{\xi\xi}^{\{0\}} = 0, \qquad \bar{s}_{\xi\zeta}^{\{0\}} = 0, \tag{5.1}$$

но согласно (4.7) компонента $\bar{s}_{\xi\zeta}^{\{0\}}$ равна нулю только при $\xi = 0$ либо $\zeta = 0$. Ни одно из этих уравнений не описывает боковую поверхность, что свидетельствует о неправомерности предположения $\partial\eta/\partial\zeta \sim 1$.

Пусть $\partial\eta/\partial\zeta \sim 1/\alpha$, т. е. $\partial R/\partial z \sim 1$. В главном приближении условия (3.17) принимают вид

$$\xi = \eta(\zeta,\tau): \quad -\bar{p}^{\{0\}} + \bar{s}_{\xi\xi}^{\{0\}} - \alpha\,\frac{\partial\eta}{\partial\zeta}\,\bar{s}_{\xi\zeta}^{\{0\}} = 0, \quad \bar{s}_{\xi\zeta}^{\{0\}} - \alpha\,\frac{\partial\eta}{\partial\zeta}\,(-\bar{p}^{\{0\}} + \bar{s}_{\zeta\zeta}^{\{0\}}) = 0. \tag{5.2}$$

Исключая $\bar{p}^{\{0\}}$ из равенств (5.2) и подставляя в них из (4.7) компоненты девиатора напряжений, получаем нелинейное уравнение первого порядка для определения функции $\eta(\zeta,\tau)$:

$$\Big(1 - \alpha^2\Big(\frac{\partial\eta}{\partial\zeta}\Big)^2\Big)\varepsilon_2\eta\zeta = \alpha\,\frac{\partial\eta}{\partial\zeta}\,\sqrt{3(4-\varepsilon_2^2\,\eta^2\,\zeta^2)}\,. \tag{5.3}$$

Необходимо учесть также интегральное условие нормировки (3.5). Частную производную в (5.3) можно заменить на обыкновенную, поскольку время входит в обе части (5.3) лишь как параметр, через известную функцию $\varepsilon_2(t)$ (3.1).

Полагая в уравнении (5.3) $\varepsilon_2 = 0$, с учетом (3.5) получаем $\eta \equiv 1$, что соответствует цилиндрической боковой поверхности при квазистатическом растяжении. Представим функцию $\eta(\zeta, \tau)$ в виде ряда по ε_2:

$$\eta(\zeta, \tau) = 1 + \varepsilon_2 \eta_1 + \varepsilon_2^2 \eta_2 + \ldots, \qquad \varepsilon_2 < 1 \tag{5.4}$$

и подставим ее в (5.3) и в интегральное условие (3.5). В линейном приближении по ε_2 для коэффициента η_1 имеем уравнение $d\eta_1/d\zeta = \zeta/(2\sqrt{3}\,\alpha)$, из которого после интегрирования и нормировки следует параболическая зависимость

$$\eta = 1 + \frac{\varepsilon_2}{12\sqrt{3}\,\alpha}\,(3\zeta^2 - 1), \tag{5.5}$$

моделирующая уменьшение толщины стержня в его середине и увеличение толщины вблизи его концов, т. е. шейкообразование при динамическом растяжении. Удержание большего числа слагаемых в (5.4) приводит к более громоздким по сравнению с (5.5) полиномиальным выражениям для η, содержащим только четные степени ζ.

Найдем последний коэффициент главного по α приближения в (3.2), а именно давление $\bar{p}^{\{0\}}$. Из первого уравнения (4.6) следует, что выражение $-\bar{p}^{\{0\}} + \bar{s}_{\xi\xi}^{\{0\}}$ не зависит от ξ, а из первого граничного условия (5.2) следует, что это выражение на границе $\xi = \eta(\zeta, \tau)$ равно $\alpha(\partial\eta/\partial\zeta)\bar{s}_{\xi\zeta}^{\{0\}}$. Следовательно, всюду в области Ω_t получаем уравнение

$$\bar{p}^{\{0\}} = \bar{s}_{\xi\xi}^{\{0\}} - \alpha\,\frac{\partial\eta}{\partial\zeta}\,\bar{s}_{\xi\zeta}^{\{0\}}\Big|_{\xi=\eta} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{4 - \varepsilon_2^2\,\xi^2\zeta^2} - \frac{\alpha}{2}\,\frac{\partial\eta}{\partial\zeta}\,\varepsilon_2\eta\zeta, \tag{5.6}$$

в которое из (4.7) подставлены компоненты $\bar{s}_{\xi\xi}^{\{0\}}$ и $\bar{s}_{\xi\zeta}^{\{0\}}$ девиатора напряжений. В (5.6) входит функция $\eta(\zeta, \tau)$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению (5.3) с условием нормировки (3.5). В качестве приближенного выражения для этой функции может быть использована аппроксимация (5.5) квадратичным трехчленом.

6. Неодномерность напряженного состояния. Вернемся к размерным переменным, зависящим от r, z, t, и для рассмотренного выше динамического режима растяжения, при котором $\varepsilon_2 = O(1)$ и $\varepsilon_1 = o(\alpha^{-2})$, запишем с точностью до первых по α членов разложений (3.2) выражение для осевого напряжения

$$\sigma_{zz} \approx \frac{\sigma_s}{\sqrt{2}}\,\big(-\bar{p}^{\{0\}} + \bar{s}_{\zeta\zeta}^{\{0\}}\big) = \frac{\sigma_s\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\sqrt{4 - \varepsilon_2^2\,\xi^2\zeta^2} + \frac{\sigma_s}{2\sqrt{2}}\,\alpha\varepsilon_2\,\eta\,\frac{\partial\eta}{\partial\zeta}\,\zeta =$$

$$= \frac{3}{2L\sqrt{6}}\sqrt{2(2\sigma_s^2 L^2 - \rho^2\dot{V}^2 r^2 z^2)} + \frac{\rho\dot{V}}{2}\,\frac{Rz}{L}\,\frac{\partial R}{\partial z}; \tag{6.1}$$

$$\lim_{\dot{V}\to 0} \sigma_{zz} = \sigma_{zz}^{qs} = \frac{3\sigma_s}{\sqrt{6}}. \tag{6.2}$$

В отличие от квазистатического режима в данном случае напряженное состояние не является одномерным. Поэтому ненулевыми являются также другие компоненты тензора напряжений:

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \frac{\rho\dot{V}}{2}\,\frac{Rz}{L}\,\frac{\partial R}{\partial z}, \qquad \sigma_{rz} = \frac{\rho\dot{V}}{2}\,\frac{rz}{L}. \tag{6.3}$$

В соотношениях (6.1), (6.3) можно использовать соответствующую (5.5) аппроксимацию квадратичным трехчленом:

$$R(z,t) = R^*\Big[1 + \frac{\sqrt{2}}{12\sqrt{3}}\,\frac{\rho\dot{V}L}{\sigma_s}\Big(\frac{3z^2}{L^2} - 1\Big)\Big], \qquad \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\,\frac{\rho\dot{V}}{\sigma_s}\,\frac{R^*z}{L}. \tag{6.4}$$

Из (6.1), (6.2) следует, что на оси стержня

$$\sigma_{zz}\big|_{r=0} \approx \sigma_{zz}^{qs} + \frac{\rho\dot{V}}{2}\,\frac{Rz}{L}\,\frac{\partial R}{\partial z}. \tag{6.5}$$

Второе слагаемое в правой части (6.5) является неотрицательным для квадратичной функции $R(z,t)$ в (6.4), что свидетельствует об увеличении во всех сечениях осевого напряжения по сравнению с квазистатическим режимом.

Таким образом, переход от квазистатического к динамическому режиму растяжения, в котором ускорение $\dot{V}$ достигает критических значений, приводит к образованию и росту шейки в средней части стержня, неодномерности напряженного состояния и депланации поперечных сечений, наблюдаемой в первом приближении по малому геометрическому параметру. Параметры этих и других инерционных процессов точно либо приближенно найдены выше.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ильюшин А. А.** Труды: В 4 т. Т. 4. Моделирование динамических процессов в твердых телах и инженерные приложения. М.: Физматлит, 2009.
2. **Ишлинский А. Ю.** Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. М.: Физматлит, 2001.
3. **Аннин Б. Д.** Групповые свойства уравнений упругости и пластичности / Б. Д. Аннин, В. О. Бытев, С. И. Сенашов. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1985.
4. **Быковцев Г. И.** О сжатии пластического слоя жесткими шероховатыми плитами с учетом сил инерции // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. Механика и машиностроение. 1960. № 6. С. 140–142.
5. **Григорян С. С.** Об основных представлениях динамики грунтов // Прикл. математика и механика. 1960. Т. 24, № 6. С. 1057–1072.
6. **Задоян М. А.** Пространственные задачи теории пластичности. М.: Наука, 1992.
7. **Наяр Е.** Некоторые плоские инерционные течения пластических материалов // Механика сплошных сред. София: Изд-во Болгар. АН, 1968. С. 269–277.
8. **Кийко И. А., Кадымов В. А.** Обобщения задачи Л. Прандтля о сжатии полосы // Вестн. Моск. гос. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 2003. № 4. С. 50–56.
9. **Баженов В. Г., Осетров С. Л., Осетров Д. Л.** Анализ закономерностей растяжения упругопластических образцов и образования шейки с учетом краевых эффектов // ПМТФ. 2018. Т. 59, № 4. С. 133–140.
10. **Глаголев В. В., Глаголев Л. В., Маркин А. А.** Конечное деформирование панели в режимах идеальной пластичности и сверхпластичности // ПМТФ. 2019. Т. 60, № 6. С. 192–201.
11. **Георгиевский Д. В.** Избранные задачи механики сплошной среды. М.: Ленанд, 2018.
12. **Georgievskii D. V., Müller W. H., Abali B. E.** Thin-layer inertial effects in plasticity and dynamics in the Prandtl problem // Z. angew. Math. Mech. 2019. Bd 99, N 12. S. 1–11.
13. **Гольденвейзер А. Л.** Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // Прикл. математика и механика. 1962. Т. 26, № 4. С. 668–686.

14. **Георгиевский Д. В.** Асимптотический анализ пластического течения вдоль образующей в тонком цилиндрическом слое // ПМТФ. 2010. Т. 51, № 5. С. 111–119.

15. **Кравченко В. Ф.** Асимптотики Пуанкаре решений задач нерегулярного тепло- и массопереноса / В. Ф. Кравченко, Г. А. Несененко, В. И. Пустовойт. М.: Физматлит, 2006.

Поступила в редакцию 22/VI 2020 г.,
после доработки — 22/VI 2020 г.
Принята к публикации 31/VIII 2020 г.