

УДК 532.529+541.126

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В СЛАБОЗАПЫЛЕННЫХ И НАСЫЩЕННЫХ ГАЗОВЗВЕСЯХ (ОБЗОР)

Т. А. Хмель

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, 630090 Новосибирск  
khmel@itam.nsc.ru

Представлен обзор работ, посвященных математическому и численному моделированию ударно-волновых и детонационных процессов в мелкодисперсных газовзвесах инертных/реагирующих частиц. Перечислены и проанализированы основные модели механики сплошных сред для описания разреженных газовзвесей и насыщенных порошковых сред. Выделены модели с внутренним давлением в фазе частиц, в том числе с описанием столкновительной динамики частиц в рамках молекулярно-кинетических подходов. Обсуждаются проблемы межфазных взаимодействий и уравнения состояния. Затронуты вопросы качественного анализа характеристических свойств моделей и теоретического анализа ударно-волновых структур (условия на скачках, классификация ударных волн и комбинированных разрывов). Указаны численные алгоритмы, наиболее широко используемые при моделировании ударно-волновых процессов. Отмечены некоторые результаты численных исследований процессов инициирования и распространения детонации, взаимодействия ударных волн с облаками и слоями частиц, диспергирования слоев.

Ключевые слова: газовзвеси, ударные и детонационные волны, математическое и численное моделирование.

DOI 10.15372/FGV20210301

### ВВЕДЕНИЕ

Производство и использование порошков (частиц металлов или частиц органического происхождения) сопряжено с опасностью развития неконтролируемых взрывных процессов, приводящих к катастрофическим последствиям. Проблемы прогнозирования и предотвращения таких явлений, а также сопутствующие проблемы уменьшения их вредного воздействия на людей и окружающую среду требуют всестороннего анализа ударно-волновых и детонационных процессов в дисперсных средах [1]. Наряду с экспериментальными методами исследования, широко применяются методы теоретического анализа и численного моделирования. Для описания дисперсных сред, как правило, используются подходы механики взаимопроникающих континуумов, основы которых изложены в работах Х. А. Рахматулина, Р. И. Нигматулина и ряда других авторов [2–7]. При умеренных загрузках частиц допустимо приближение слабозапыленной среды. Обзоры работ, связанных с моделирова-

нием ударно-волновых процессов в таких средах, приведены в [8] (применительно к проблемам смесеобразования) и в [9] (где обсуждаются численные технологии расчетов динамических процессов в газовзвесах). При описании насыщенных дисперсных сред учитываются как объем, занятый частицами (изменения трубки тока в потоке газа), так и межгранулярное давление, обусловленное сжимаемостью, нарушением структуры твердого материала или множественными столкновениями частиц между собой. В настоящее время одним из основных направлений в области развития моделей механики насыщенных газовзвесей является применение кинетической теории гранулированных материалов. Обзор соответствующих подходов механики двухфазных гранулярных сред представлен в [10], где изложена физически обоснованная модель, позволяющая описывать динамику смеси в широком диапазоне загрузки частиц от разреженной взвеси до почти плотной упаковки. В общем случае система уравнений не является консервативной, что затрудняет анализ ударно-волновых структур и применение консервативных разностных схем. Поэтому в настоящем обзоре некоторое внимание уделяется вопросам характеристическо-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-18-50103).

© Хмель Т. А., 2021.

го анализа моделей и теоретического анализа ударно-волновых структур (условия на скачках, классификация ударных волн и комбинированных разрывов). Одной из ключевых проблем моделирования является адекватный выбор замыкающих соотношений для уравнений состояния, а также межфазные взаимодействия (соотношения для описания процессов скоростной и тепловой релаксации фаз). Также в обзоре перечислены основные численные технологии расчетов и некоторые результаты моделирования ударно-волновых и детонационных течений газовзвесей.

## 1. МОДЕЛИ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД ДЛЯ ОПИСАНИЯ ДИНАМИКИ ГАЗОВЗВЕСЕЙ

### 1.1. Модели слабозапыленной среды

Для описания дискретной фазы при моделировании динамики газовзвесей применяются два основных подхода — эйлеров и лагранжев. При умеренных массовых загрузках частиц их объемная концентрация в смеси с газом пренебрежимо мала. В этом случае система уравнений Эйлера, вытекающая из законов сохранения массы, импульса и энергии, приводится к консервативной форме. Давление в фазе частиц не присутствует, поэтому совместная система является вырожденной гиперболической. Основные уравнения модели в двухскоростном, односкоростном двухтемпературном, а также равновесном по скоростям и температурам приближениях, их качественный анализ и обзор численных методов решения приведены в [9].

Равновесные по скоростям и/или температурам приближения используются и в настоящее время для решения различных задач. Например, в [11] получены обобщенные аналитические решения для равновесного одномерного адиабатического потока за взрывной ударной волной, в [12] при моделировании взрыва дискретная фаза представлена как «эффективный газ».

Для описания ударно-волновых процессов в гетерогенных средах с химическими превращениями, где условия воспламенения и скорости протекания реакций существенно зависят от температуры фаз, привлекаются модели с учетом всех процессов релаксации (скоростной, температурной и химической). В неравновесной постановке процессы горения и перехо-

да в детонацию в газообразных горючих смесях с взвешенными инертными твердыми микрочастицами моделировались в [13, 14]. Особое внимание в этих работах уделено вопросам поглощения и излучения тепла частицами и влиянию этих процессов на воспламенение и распространение пламени. В [15, 16] в рамках двухфазного подхода рассматривались задачи для плотного пылевого слоя. В [15] исследовались процессы диспергирования под воздействием проходящей ударной волны, в [16] моделировалось распространение квазидетонационного режима в слое угольной пыли с учетом воспламенения и горения частиц. Здесь ограниченность модели слабозапыленной среды компенсировалась введением полуэмпирических законов подъема частиц из слоя за счет столкновительных эффектов [15] или сил Магнуса [16]. В [17] исследовалась дифракция ударной волны на клине в газовзвеси мелких частиц, показано отсутствие автомодельности течения, в отличие от аналогичной задачи для газа.

Модели слабозапыленной среды широко используются при исследовании детонации газовзвесей, так как объемная концентрация частиц мала даже в формирующихся за ударными волнами  $\rho$ -слоях [18]. Неравновесная модель, приведенная в [9], использовалась для анализа двумерных детонационных течений микродисперсных взвесей частиц алюминия в кислороде в [19–21]. В [22] модель расширена на нанометровый диапазон размеров частиц. Двумерные течения ячеистой детонации в газовзвесах субмикронных и наноразмерных частиц алюминия моделировались в [23, 24], где установлено, в частности, увеличение степени нерегулярности поперечных волн и формирующихся ячеек с уменьшением размера частиц. В [25] представлен обзор моделей для описания процессов горения и детонации в микро- и нанодисперсных взвесах частиц алюминия, где внимание уделено как моделям горения частиц, так и описанию релаксационных процессов в нанодисперсных взвесах. Моделирование ударно-волновых и детонационных процессов в газовзвесах в рамках модели слабозапыленной среды проводилось также в работах [26–34]. В [26, 27] численно исследовалась детонация криогенной смеси (газообразный водород — капли жидкого кислорода) в плоском канале. Обсуждаются динамика формирования и особенности структуры двумерной зоны реакции детонационной вол-

ны. Смоделирована ячеистая структура детонации. В [28] анализировалось влияние добавки частиц магния на детонационные характеристики смесей метан — кислород — азот. Показано, что при достаточно мелких частицах и правильном выборе их массовой концентрации можно достичь увеличения скорости детонации реакционной смеси. В [29] впервые смоделирована детальная структура течений ячеистой детонации в газовзвесах частиц алюминия, включая зоны срыва и реинициирования детонации в поперечных волнах. В [30–32] численно моделировались задачи инициирования и распространения детонации в кислородных и воздушных взвесах частиц алюминия в рамках одномерных [30], двумерных [30, 31] и трехмерных [32] расчетов. Исследованы различные аспекты проблемы. В [30] получены зависимости размеров детонационных ячеек от диаметра частиц при фиксированной массовой концентрации. В [31] обсуждалось влияние выбора модели горения на результаты моделирования ячеистой детонации в воздушных взвесах алюминия, установлена корреляция между размером ячейки и зоной индукции воспламенения. В [32] получены трехмерные структуры спиновой детонации в круглой трубе с одной, двумя и несколькими поперечными волнами. Расчетная ширина ячейки согласуется с результатами двумерного моделирования. Установлено, что на поперечное движение газа и частиц расходуется мало энергии, поэтому скорость спиновой детонации обычно хорошо согласуется с идеальными значениями Чепмена — Жуге (за исключением очень узких труб, где потери значительны). В [33] исследовалось горение частиц алюминия в продуктах взрыва центрального заряда. Обсуждались вопросы выбора модели воспламенения частиц. Результаты по ряду параметров согласуются с данными экспериментов, однако расходятся по степени выгорания горючего. Указано, что это может быть связано с нестационарными кинетическими эффектами, не включенными в модель. В [34] представлены результаты двумерных расчетов детонации в газовзвесах частиц алюминия субмикронного и нанометрового диапазонов. Обсуждалось влияние загрузки частиц и их размера на скорость детонации. Зависимости размера ячейки от диаметра частиц в нанометровом, субмикронном и микрометровом диапазонах существенно различны, что связано с изменением закона горения частиц при переходе от

микрометровых к субмикронным и нанометровым. Проведено сравнение расчетных размеров ячеек с результатами различных авторов и экспериментальными данными.

Вопросам взаимодействия газовой детонации с облаками реагирующих или инертных частиц посвящены исследования [35–40]. В [35] представлена модель приведенной кинетики и расчеты трехмерных течений детонации в смесях водород — кислород — азот в присутствии твердых частиц вольфрама или графита. Проведено сравнение с данными экспериментов по горению двухфазного потока с частицами пыли. Модель применима для анализа аварийных ситуаций в термоядерном реакторе, где возможно последовательное развитие детонации.

В [36–38] исследовались вопросы подавления гетерогенной детонации в кислородных взвесах частиц алюминия облаками инертных частиц. В [36] показано изменение детонационной структуры волны и ее скорости. В [37, 38] проанализировано влияние различных параметров на процесс подавления, в частности влияние дисперсного состава и неоднородного распределения частиц в облаке.

В [39] исследовано затухание ударной волны, порожденной детонацией стехиометрической водородокислородной смеси, в облаке инертных частиц. Отмечено, что важным параметром подавления является время воздействия. В [40] исследовано влияние плотности инертных частиц, их диаметра и концентрации на срыв детонации в смеси водород — кислород — азот.

Эйлерово-лагранжев подход с описанием дискретной фазы как системы точек со своими траекториями движения часто применяется в задачах диспергирования, воспламенения и горения слоев частиц. В [41] рассмотрена проблема моделирования взаимодействия ударной волны с частицами вблизи стенки канала. Авторы отмечают достоинства эйлерово-лагранжевой модели при учете вращения частиц и их столкновений между собой и со стенками, но указывают на большие вычислительные затраты. Поскольку в уравнениях для газа не учитывается теплообмен между газом и частицами, модель [41] неприменима для анализа сильных ударных волн и детонации. В [42] исследовалось влияние полидисперсности частиц при учете их столкновений на процесс подъема пыли из слоя под действием ударной волны. Получено уменьшение времени подъема по-

лидисперсного слоя по сравнению с монодисперсным. В [43] численное моделирование пылевой фазы проводилось по обоим моделям (Эйлера и Лагранжа). Отмечается, что результаты расчетов по модели Эйлера (без учета объема частиц, трения и столкновений) плохо коррелируют с экспериментальными наблюдениями. В модели Лагранжа из-за больших вычислительных затрат задача была сильно упрощена, что не позволило провести сопоставление с экспериментом. Указано, что модель Эйлера может быть применена при моделировании крупномасштабных пылевых потоков, а модель Лагранжа полезна для детального анализа мелкомасштабных эффектов с учетом столкновений частиц в непосредственной близости от слоя. В [44] моделировалось распределение органической пыли в бункере во время осевого заполнения с целью оценки вероятности взрыва. Получено хорошее согласие с известными экспериментальными данными. В [45] исследовалась задача о подъеме и воспламенении угольной пыли под воздействием ударной волны. Определены нижний предел концентрации для вторичного взрыва и верхний и нижний пределы скорости распространения иницирующей взрывной волны. В [46] моделировалась ячеистая детонация в монодисперсных и полидисперсных воздушных взвешах частиц алюминия с использованием эйлеровой модели газовой динамики и дискретной модели движения частиц. При совместном решении уравнений для газа и частиц учитывались как силовое взаимодействие, так и теплообмен фаз.

### 1.2. Модели с учетом объема частиц и общим давлением

В смесях высокой массовой загрузки влияние объема частиц должно учитываться в уравнениях импульса и энергии [3]. В ряде моделей при этом не вводится дополнительное давление, отражающее взаимодействие частиц между собой или их сжимаемость (изменение собственного объема частиц). Система уравнений не приводится к дивергентному виду и в предположении баротропности не является гиперболической [3, 47]. Анализ ударных адиабат и структур ударных волн выполнен в работах [4, 48], численное моделирование разлета облака частиц — в [49]. В [50] использовались уравнения Эйлера, при этом обсуждаются преимущества и недостатки эйлерова и лагранжева подходов для задач диспергирования пыле-

вых слоев. Взаимодействие частиц между собой моделировалось введением некоторой дополнительной силы, действующей на частицы в направлении уменьшения их концентрации. В [51] в рамках той же модели рассмотрена задача диспергирования плотного слоя волной разрежения и отмечена меньшая эффективность диспергирования в сравнении с ударными волнами. Эйлерово-лагранжев подход с учетом объема частиц в уравнениях для газа реализован в [52] в задаче ударно-волнового диспергирования при взрыве центрального заряда и в [53] в задаче о прямом взаимодействии ударной волны со свободным слоем частиц конечной толщины. В [53] сравниваются несколько методов: эйлеров, эйлерово-лагранжев и метод прямого численного моделирования. Для двух первых отмечено развитие численной неустойчивости и влияние методов стабилизации на результаты. Предполагается, что это связано с некорректностью задачи в силу негиперболичности. Также авторы приходят к необходимости включения в модель члена, пропорционального градиенту концентрации, отражающего механизм диспергирования при взаимодействии частиц. Такие взаимодействия («расталкивающая сила») некоторым образом учитываются в модели, представленной в [54] и опробованной на задаче о дисперсии частиц при ударно-волновом воздействии и на задаче о горении слоя угольной пыли.

### 1.3. Модели двух сжимаемых тел

Взаимодействие частиц между собой в рамках уравнений Эйлера описывается введением собственного давления. Простейшей моделью с двумя давлениями является модель двух сжимаемых тел. Такие модели рассматривались в ряде работ А. В. Федорова с соавторами [55–59] применительно к описанию ударно-волновой динамики смеси двух конденсированных материалов. Уравнения фаз связаны только алгебраическими соотношениями в правых частях, а давления фаз определяются параметрами этой фазы. Система замыкается уравнением  $m_2$ -переноса (или уравнением компактирования). Система уравнений гиперболическа, характеристики определяются отдельно для каждой из фаз, и обе скорости звука отличны от нуля. В [55] в изотермическом приближении проведен анализ стационарных решений в классе бегущих волн и нестационарной задачи

об отражении волны от жесткой стенки, где показана возможность существования и устойчивого распространения различных типов волн. Более детальный анализ проведен в [56] методами качественной теории динамических систем на плоскости. Приведена классификация волновых конфигураций, включая дисперсионные, замороженно-дисперсионные по каждому из компонентов и замороженные двухфронтные структуры. Построена карта режимов в плоскости начальных параметров: скорость смеси — концентрация одного из компонентов. В [57] показана устойчивость всех типов стационарных ударных волн (полностью дисперсионных, замороженно-дисперсионных, дисперсионно-замороженных и замороженных волн двухфронтной конфигурации) к инфинитезимальным и конечным возмущениям при их распространении. Также показана возможность образования ударных волн различного типа из начальных данных ступенчатого вида, в том числе и с участками течения в трансзвуковом диапазоне по скорости звука в одном из компонентов. В [58] изучается взаимодействие ударных волн различного типа с неподвижным комбинированным разрывом. Анализ устойчивости всех типов волн в рамках аналогичной модели с двумя различными уравнениями состояния проводился в [59]. Установлено, что замороженные и дисперсионные ударные волны устойчивы относительно инфинитезимальных возмущений и неустойчивы относительно взаимодействия с волнами разрежения.

Модель многокомпонентных сред, где каждый компонент также характеризуется собственным давлением, развивалась в работах В. Ф. Куропатенко [60, 61]. Особенность модели состоит во введении дополнительных сил межфазного взаимодействия (так называемого кластерного взаимодействия), содержащих дифференциальные члены. Эти силы определяются из условий обмена импульсом и энергией между каждым компонентом и сплошной средой, выражающей коллективные свойства ансамбля компонентов в неравновесных по скоростям состояниях многокомпонентной среды.

Исследования в рамках моделей сжимаемых тел позволили выявить многообразие типов ударно-волновых структур в двухфазных средах и согласуются по ряду характеристик с данными экспериментов. Тем не менее модели с симметричным представлением уравнений состояния фаз ограничены в применении к га-

зовзвесьям и порошковым средам.

#### 1.4. Модели сжимаемых порошковых сред

В монографии Р. И. Нигматулина [3] указано на необходимость различного описания газовой фазы как связной области и дискретно распределенных включений. Согласно [3] давление в фазе частиц представляется суммой давления в газе и дополнительного члена, отражающего столкновения или контактные взаимодействия частиц между собой. Модель Нигматулина [3] была развита и применена для анализа ударно-волновых процессов в плотных порошковых средах в [62–65]. В полном виде модель изложена в монографии А. Г. Кутушева [66]. Учитываются межгранулярные напряжения, обусловленные нарушением структуры частиц. В [62, 66] уравнения состояния для добавочного давления в фазе частиц получены на основе эмпирических данных о скорости звука в засыпках и анализа процессов сжатия и разгрузки материала порошка по схеме нелинейно-упругого тела (подход Гоффа). В [67] рассматривается реологическое уравнение состояния, связывающее изменение тензора напряжений и тензора деформации с некоторым временем релаксации.

Модель Баера — Нунциато (BN) была предложена в [68] для описания перехода дефлаграции в детонацию в реагирующих гранулированных средах и широко используется в настоящее время для моделирования различных процессов в пористых материалах и смесях газа и частиц высокой загрузки. В модель введено понятие давления дискретной фазы, которое определяется как шаровая часть тензора напряжений и моделирует эффекты стохастического движения, столкновений и упругого взаимодействия частиц. Определяющая система уравнений гиперболична [69]. Уравнения состояния для твердой фазы в [68] получают из потенциала — свободной энергии Гельмгольца, а для газа принимается модель Джона — Уилкинса — Ли. В [70] представлена модель BN, где для получения замыкающих соотношений привлекаются потенциальные функции (свободная энергия Гельмгольца), через которые выражаются давление и внутренняя энергия фаз. Обсуждаются возможные сценарии компактирования. В [71] проведен критический анализ модели BN с точки зрения согласованности замыкающих соотношений и предложены способы преодоления недостатков модели

BN; в частности, с этой целью в модель твердой фазы (уравнение для внутренней энергии) вводится зависимость от объемной концентрации. Термодинамически согласованные и проверенные на тестовых задачах обобщения модели BN, пригодные для расчетов различных многофазных сред, представлены также в [72] (для смесей, содержащих произвольное количество твердых компонентов), [73] (для разреженных и плотных газовзвесей, пузырьковых сред), [74] (для порошковых и пузырьковых сред, пористых материалов). Привлекательность модели Баера — Нунциато в ее гиперболичности и возможности реализовать консервативные численные методики для решения уравнений обеих фаз в рамках единого алгоритма.

Процессы взрывного диспергирования частиц в рамках уравнений Баера — Нунциато моделировались в [75]. В работах [76, 77] модель BN привлекалась для решения задач динамики газовзвесей широкого диапазона концентраций. Рассмотрены задачи взаимодействия ударной волны с плотным слоем частиц в постановке, соответствующей эксперименту. В [76] определены основные особенности процесса, исследовано влияние параметров уравнения состояния дисперсной фазы и свойств вычислительного алгоритма на характеристики. В [77] приведено детальное описание и сравнение результатов тестирования двух численных алгоритмов. Установлено удовлетворительное согласование с экспериментальными и расчетными данными других авторов.

### 1.5. Модели столкновительной динамики

В последние годы для описания насыщенных газовзвесей получили распространение модели, основанные на молекулярно-кинетических представлениях о хаотическом движении и взаимодействии частиц. Модели, в которых в той или иной форме вводилось столкновительное давление в фазе частиц, развивались и использовались ранее в [3, 78–81]. В [78] для постоянной скорости звука дискретной фазы проведен анализ структуры течения на комбинированных разрывах. В [80] рассмотрена модель, аналогичная [78], для малых объемных концентраций с исключением «сопловых» членов из уравнений. Учет хаотического движения частиц дал качественно отличные картины горения облака при взрыве ударно-диспергируемого горючего. В [81] проведен анализ ударно-волновых структур в

смеси газа и твердых частиц в рамках модели [78] с двумя давлениями и с учетом объема частиц в уравнении состояния газа. Указаны условия возникновения различных типов ударных волн (дисперсионных, замороженных, дисперсионно-замороженных, а также двухфронтовых конфигураций). На основе нестационарных расчетов показано устойчивое распространение некоторых из них.

В монографии Д. Гидаспова [79] изложены основы построения двухфазной модели с применением кинетической теории гранулярных сред [82] для описания столкновительной динамики частиц в рамках уравнений Эйлера. Модель [79] включает в себя диффузию и перенос энергии хаотического движения частиц в гранулированной среде по типу теплопроводности. В модели с уравнением состояния [82] не учитывается перераспределение энергии поступательного и вращательного движения частиц при неидеальных столкновениях. (Уточненное описание динамики изолированной гранулярной среды с учетом неупругости и шероховатости при столкновениях представлено в [83, 84].)

В [85, 86] развита модель столкновительной газовзвеси неупругих шероховатых несжимаемых частиц на основе уравнений механики гетерогенных сред [3] и представлений [83, 84] применительно к описанию ударно-волновых течений. Система уравнений даже для изолированной гранулярной среды [83, 84] не приводится к консервативной форме, что затрудняет теоретический анализ ударно-волновых структур. В частности, в [83] постулируются некие условия на скачке, а в [84] они используются при исследовании структуры зон релаксации за ударными волнами для автомодельных решений. В [86] выделен класс сред, для которого получены точные условия на скачках и проведена классификация сильных разрывов. Показана возможность существования двух основных типов волн в газовзвесах со скачками параметров течения в одной из фаз. В [87] представлены некоторые результаты численного моделирования нестационарных течений столкновительной двухфазной среды при умеренных загрузках частиц. В задаче о взаимодействии плоской ударной волны с облаком частиц получены установившиеся решения, отвечающие типам стационарных волн, предсказанным теоретически. Определены условия реализации того или иного типа волн в зависимости от па-

раметров задачи. Эффекты столкновительной динамики частиц продемонстрированы на задаче о взаимодействии ячеистой гетерогенной детонации с облаком инертных частиц. Показано, что наличие столкновений частиц инертной фазы не оказывает влияния на скорость детонации, размер ячейки и параметры газа. Наблюдается расширение (дисперсия) слоев и структур инертной фазы, формирующихся в дальнем следе ячеистой детонации. В рамках модели [85, 86] исследовались задачи о подъеме пыли из плотного слоя частиц [88] и разлете слоя под воздействием взрыва центрального заряда [89]. В [90] проведен качественный анализ определяющей системы уравнений модели [85, 86]. Установлены области гиперболичности и области, где система имеет составной тип. Проведена классификация ударно-волновых структур, включая двухфронтные конфигурации, продемонстрировано устойчивое распространение некоторых из них.

Модель [79] в различных модификациях широко используется для исследования динамики пылевзвесей высокой загрузки. В [91] в рамках этой модели исследовалась задача о взаимодействии скользящей ударной волны со слоем частиц, получено хорошее согласование с представленными там же результатами экспериментов по поджатию слоя. В [92] выполнено численное моделирование ударного воздействия на порошковую среду, особое внимание уделено поведению частиц. Проведенный характеристический анализ изолированной системы уравнений для частиц при замороженном давлении газа показал ее гиперболичность, однако полные уравнения не анализировались. В расчетах был исключен «сопловой» член, связанный с градиентом давления газа, при этом получено удовлетворительное соответствие с экспериментальными данными. В работах [93, 94] численно моделировались процессы, связанные с распространением взрывов пыли в угольных шахтах. Детальное изложение модели, основанной на подходах [79], для описания высокоскоростных ударно-волновых течений смесей с высокой концентрацией частиц в диапазоне от слабозапыленных до почти плотной упаковки представлено в работе [10]. Обсуждаются проблемы замыкающих соотношений, в частности описывающих процессы скоростной и тепловой релаксации. В [95, 96] модель, используемая в [93, 94] и изложенная в [10], расширена для описания ударно-волновых

взаимодействий со стратифицированными порошковыми средами с конечным числом типов частиц (различного диаметра и плотности), каждый из которых занимает отдельную область. В рамках модели в [96] получены интересные данные по рассеянию защитной мелкодисперсной каменной пыли, покрывающей поверхность крупнодисперсного угля.

## 2. ОПИСАНИЕ МЕЖФАЗНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Корректное описание взаимодействий газа и частиц в моделях механики сплошных сред имеет большое значение. Силовые взаимодействия (процессы скоростной релаксации фаз) являются определяющими в задачах разлета облаков и диспергирования частиц при ударно-волновых воздействиях. Тепловое взаимодействие влияет на условия воспламенения частиц в процессах с горением и детонацией. Законы межфазных взаимодействий совокупности частиц в объеме газа в основе получены из законов обтекания и теплообмена одиночных частиц, учитываются также эффекты стесненности при сопоставимых объемных концентрациях газа и частиц.

### 2.1. Законы сопротивления

Для описания движения частиц в потоке газа в моделях слабозапыленной среды преимущественно используются зависимости коэффициента сопротивления от относительного числа Рейнольдса. Формула вида  $C_D = 24/Re$ , соответствующая законам Стокса обтекания сферической частицы, использовалась в [13, 14, 56, 81]. В [27] применялись модификации этого закона в различных диапазонах изменения числа Рейнольдса:  $C_D = 27Re^{-0.84}$  при  $Re < 80$ ,  $C_D = 0.27Re^{0.21}$  при  $80 \leq Re < 10^4$  и  $C_D = 2$  при  $Re \geq 10^4$ . Среди двухчленных формул для интервала  $Re \leq 1000$  наиболее часто встречается представление

$$C_D = \frac{24}{Re} \left( 1 + \frac{1}{6} Re^{2/3} \right)$$

[15, 42, 43, 46, 50, 51] (в [76, 81, 93–96] условием принято  $m_2 Re \leq 1000$ , где  $m_2$  — объемная доля частиц), которое дополняется формулой  $C_D = 0.44$  в остальном диапазоне. В [17, 35, 39] использовалась двухчленная формула вида

$C_D = 0.48 + 28\text{Re}^{-0.85}$ . Распространенной также является трехчленная формула вида

$$C_D = \frac{24}{\text{Re}} + \frac{4.4}{\sqrt{\text{Re}}} + 0.42$$

[28, 30–33, 62–67, 80].

При учете сверхзвукового обтекания частицы потоком в задачах с ударными волнами и детонацией в коэффициент сопротивления включается также зависимость от числа Маха относительного движения. В [29, 34] использовалась известная формула Хендерсона (см. [5]), которая ввиду громоздкости здесь не приводится. Ее упрощенный аналог вида

$$C_D(\text{Re}, M) = \left[ 1 + \exp\left(-\frac{0.43}{M^{4.67}}\right) \right] \left( 0.38 + \frac{24}{\text{Re}} + \frac{4.4}{\sqrt{\text{Re}}} \right),$$

предложенный в работе [97] и подтвержденный сравнением экспериментальных и расчетных траекторий движения частиц за ударными волнами, применялся в работах [9, 19–24, 36–38].

Также используется формула Карлсона — Хогланда [29, 34, 59]

$$C_D = \frac{24}{\text{Re}C_C} \left( 1 + 0.15\text{Re}^{0.687} \right) \times \left[ 1 + \exp\left(-\frac{0.427}{M^{4.63}} - \frac{3}{\text{Re}^{0.88}}\right) \right]$$

в полном виде при

$$C_C = 1 + \frac{M}{\text{Re}} \left[ 3.82 + 1.28 \exp\left(-1.25 \frac{\text{Re}}{M}\right) \right]$$

или без учета разреженности окружающего частицу газа ( $C_C = 1$ ). Поправка аналогично вида (поправка Каннингема)  $C_C = 1 + 2\text{Kn}[1.257 + 0.4 \exp(-1.1/2\text{Kn})]$ , где число Кнудсена выражает отношение длины свободного пробега молекул газа к диаметру частицы, отражает эффект свободномолекулярного обтекания наноразмерных частиц потоком газа. Условия разреженности потока принимаются во внимание при описании детонационных течений ультрадисперсных взвесей в [22–25]. Проведенный в [22] анализ детонационных структур и оценки пределов изменения числа Кнудсена показали, что в задачах детонации этими

поправками можно пренебречь для взвесей частиц диаметром более 300 нм. В [92] использовались следующие представления, в зависимости от относительного числа Маха:

$$C_D = \frac{24}{\text{Re}} \left( 1 + 0.15\text{Re}^{0.687} \right) + 0.42 \left( 1 + \frac{42\,500}{\text{Re}^{1.16}} \right)^{-1},$$

или

$$C_D = \frac{24}{\text{Re}} \left( 1 + 0.15\text{Re}^{0.684} \right) + 0.513 \left( 1 + \frac{483}{\text{Re}^{0.669}} \right)^{-1},$$

или их комбинация.

В описании динамики насыщенных газозвесей учитываются эффекты стесненности в форме зависимости силы сопротивления от объемной концентрации частиц. Наиболее часто применяется формула Эргана

$$C_D(\text{Re}, m_2) = \frac{4}{3(1-m_2)} \left[ 1.75 + \frac{150m_2}{(1-m_2)\text{Re}} \right]$$

при  $m_2 \geq 0.45$  (в [50, 51, 62–67]) или при  $m_2 \geq 0.2$  (в [50, 51, 76, 81, 93–96]). В работах [62–67] в промежуточном диапазоне изменения объемной концентрации  $0.08 < m_2 < 0.45$  принималась линейная аппроксимация вида  $C_D = [(m_2 - 0.08)C_{D2} + (0.45 - m_2)C_{D1}]/0.37$ , где  $C_{D1}$  — коэффициент сопротивления в слабозапыленной среде при  $m_2 \leq 0.08$ . Роль поправки на стесненность в задаче о подъеме и диспергировании слоя пылевзвеси анализировалась в [50], где сравнивались две разные модели сопротивления и установлено влияние выражения для  $C_D$  на результаты. Другие представления для зависимости коэффициента сопротивления от чисел Рейнольдса и Маха приведены в [53], зависимости от концентрации частиц — в [42].

## 2.2. Законы теплообмена

Для ряда задач справедливым является изотермическое приближение, в котором пренебрегается теплообменом между газом и частицами [48, 56–59, 76, 77, 80, 81, 90]. При



моделировании детонационных течений корректное описание процессов теплообмена имеет большое значение, так как определяет условия воспламенения и горения. В неравновесных по температурам моделях тепловая релаксация фаз определяется известными законами конвективного теплообмена между газом и частицами, иногда учитывается и лучистый теплообмен.

Формула для конвективного теплообмена в континуальном режиме имеет вид

$$q = \frac{6m_2\lambda_1}{d^2} \text{Nu}(T_1 - T_2) = \frac{\rho_2 c_2}{\tau_T^{\text{cont}}} (T_1 - T_2),$$

где  $d$  — диаметр частиц,  $\lambda_1$  — теплопроводность газа,  $\rho_2$  — средняя плотность дискретной фазы,  $c_2$  — теплоемкость частиц,  $\tau_T$  — характерное время тепловой релаксации. Для зависимости числа Нуссельта от чисел Рейнольдса и Прандтля привлекаются различные приближения. Наиболее распространенной является формула, приведенная в монографии Кнудсена, Каца [98]:  $\text{Nu} = 2 + 0.6\text{Re}^{1/2}\text{Pr}^{2/3}$ , которая использовалась в [15, 17, 19–25, 31, 32, 36–39, 87–89]. В работах [62–67] применялась формула Чудновского:  $\text{Nu} = 2 + 0.106\text{RePr}^{1/3}$  в интервале  $\text{Re} \leq 200$  и  $\text{Nu} = 2.27 + 0.6\text{Re}^{2/3}\text{Pr}^{1/3}$  при  $\text{Re} > 200$ . В работах [33, 80] указана формула  $\text{Nu} = 2 + 0.6\text{Re}^{1/2}\text{Pr}$ , в [92] —  $\text{Nu} = 2 + (0.4\text{Re}^{1/2} + 0.06\text{Re}^{2/3})\text{Pr}^{0.4}$ .

При описании теплообмена в газовзвесах высокой концентрации частиц в работах [93–96] учитывались эффекты стесненности. Зависимость числа Нуссельта от чисел Рейнольдса и Прандтля и от объемной концентрации частиц имеет вид

$$\text{Nu} = (7 - 10m_2 + 5m_2^2)(1 + 0.7\text{Re}^{0.2}\text{Pr}^{1/3}) + (1.33 - 2.4m_2 + 1.2m_2^2)\text{Re}^{0.7}\text{Pr}^{1/3}.$$

Проблемы замыкающих соотношений, в частности описывающие процессы скоростной и тепловой релаксации в насыщенной газовзвеси, подробно обсуждаются в [10].

Формулы для теплообмена нанодисперсных частиц приведены в [99] и использовались в [22–25]. При числах Кнудсена  $\text{Kn} = RT_1/\sqrt{2\pi}d_g^2 N_A p d < 0.01$ , где  $d_g$  — размер молекулы окружающего газа,  $p$  — давление,  $N_A$  — число Авогадро, адекватным считается континуальный режим. При  $\text{Kn} > 10$  теплообмен

протекает в условиях свободномолекулярного режима и описывается формулой

$$q = \frac{6\alpha p m_2}{d} \left( \frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1 - 1} \right) \sqrt{\frac{k_B}{8\pi m_g T_1}} (T_1 - T_2) = \rho_2 c_2 \frac{T_1 - T_2}{\tau_T^{\text{fm}}}.$$

Здесь  $k_B$  — константа Больцмана,  $\alpha$  — аккомодационный коэффициент (принимался равным 0.43),  $\gamma_1$  — параметр адиабаты газа,  $m_g$  — масса молекулы окружающего газа. При числах Кнудсена  $0.01 \div 10$  согласно данным, приведенным в [99], имеет место переход от одного режима к другому. Для этого интервала в [22–25] использовалась интерполяционная формула вида

$$\tau_T^{\text{tr}} = [(\log \text{Kn} + 2)\tau_T^{\text{fm}} + (1 - \log \text{Kn})\tau_T^{\text{cont}}]/3.$$

Описание теплообмена и обмена импульсом в детонационных течениях газовзвесей микронных и наноразмерных частиц обсуждается также в обзоре [25].

### 3. ЧИСЛЕННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ РАСЧЕТОВ

Численное моделирование динамических процессов в двухфазных средах требует достаточно высокого разрешения внутренних ударно-волновых структур, корректного представления релаксационных зон и исключения численных осцилляций, которые могут исказить картины, особенно в процессах с воспламенением и горением.

Детальный обзор численных алгоритмов решений консервативных уравнений Эйлера, используемых в расчетах ударно-волновых и детонационных течений слабозапыленных сред, приведен в [8]. Основные разностные схемы, традиционные для расчетов дискретной фазы, — метод крупных частиц [13, 14], применяемый также в модели двух сжимаемых тел в [57], схема Русанова [35], схема Мак-Кормака [30, 40, 75], схема Джентри — Мартина — Дэйли [19–21]. Для решения консервативных уравнений газовой фазы широкое распространение получили схемы, в которых реализуются методы коррекции потоков (класса TVD). В качестве основы наиболее применяемой является схема Годунова или ее модификации [16, 29,

33, 40, 41, 52, 70, 75]. В [19–21, 58] использовалась схема TVD Хартена — Лакса, представленная в [8] вместе с ее модификациями для различных приближений (односкоростного двухтемпературного, равновесного по скоростям и температурам). Реализация этого метода в параллельных вычислениях с использованием технологии Open MP выполнена и протестирована в [100]. В [59] использовался численный метод повышенного порядка по времени, реализуемый на основе схемы Рунге — Кутты и TVD-аппроксимации конвективных членов по пространству.

В моделях с общим давлением использование консервативных разностных схем ограничено неконсервативностью определяющей системы уравнений. В [62, 63] применялся метод крупных частиц. В [65] развита методика численного моделирования, основанная на методе расщепления с использованием двухшаговой схемы Лакса — Вендрофа, пересчета с учетом правой части и при необходимости интерполяции. Схема применялась для численного решения взаимодействия ударной волны с препятствием, покрытым пористым материалом в [67]. В полной модели Баера — Нунциато основные уравнения также не представлены в консервативной форме (хотя система гиперболична). В [77] развиты и протестированы численные методики решения задач динамики плотных и разреженных газовзвесей в рамках модели Баера — Нунциато с применением схемы Годунова. Для модели столкновительной динамики в [81] реализован метод расщепления по физическим процессам, где производные от давления аппроксимируются по потоку, остальные производные — против потока, а TVD-подход реализуется по схеме Чакравати — Ошера. В [87–89] консервативная часть уравнений решалась с применением схемы TVD Хартена — Лакса для газовой фазы и Джентри — Мартина — Дэйли для дискретной фазы, а также дополнительного члена с градиентом концентрации (давление в сомножителе определялось в центральной точке).

В последние годы развиваются новые подходы и алгоритмы решения сложных задач. В [54] представлен алгоритм расчета в рамках эйлерово-лагранжевой модели, в котором уравнения для газа (при учете объема частиц) решаются в рамках вычислительной гидродинамики с использованием метода коррекции потоков, а для частиц применяется метод дискрет-

ных элементов. Сравнительно недавно стали применяться противопотоковые схемы AUSM, альтернативные известным схемам (Годунова, Ван Лира и др.). Метод AUSM применялся в [35, 39] для расчетов газовой фазы в моделях разреженной среды и в [10, 93–96] для расчета дискретной фазы с учетом гранулярных эффектов. В работе [10] представлены детальное изложение модели, численного алгоритма и результаты тестирования на ряде задач, включая задачу Римана о распаде разрыва в двухфазной смеси.

Особенностью ударно-волновых и детонационных процессов является наличие узких зон с большими градиентами параметров. Для адекватного сеточного разрешения используются адаптивные сетки с различными алгоритмами их построения [10, 29, 31, 33, 34, 80, 93–96].

С развитием коммерческих пакетов чаще стали использоваться возможности CFD Fluent. В [12] предложена инженерная методика расчетов взрывных процессов в мелкодисперсных газовзвесях на основе коммерческого пакета Fluent 6.3.26. В [44] расчеты проводились в рамках коммерческого кода (CFD) с использованием комбинации  $k$ - $\epsilon$ -модели и лагранжева описания дискретной фазы. В [51] использовался коммерческий программный пакет STAR-CCM+. Тестирование в рамках полной и изотермической моделей проводилось на основе сравнения с точным решением задачи Римана. Несмотря на имеющийся некоторый скепсис в отношении коммерческих пакетов (в частности, ANSYS Fluent), с появлением новых расширенных версий и накоплением данных по тестированию модулей на различных задачах механики перспективы их использования расширяются.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Eckhoff R.** Dust Explosions in the Process Industries. — Hardbound: Gulf Professional Publ., 2003.
2. **Рахматулин Х. А.** Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред // ПММ. — 1956. — Т. 20, вып. 2. — С. 184–195.
3. **Нигматулин Р. И.** Динамика многофазных сред. — М.: Наука, 1987. — Ч. 1.
4. **Николаевский В. Н.** Гидродинамический анализ ударных адиабат гетерогенных смесей веществ // ПМТФ. — 1969. — № 3. — С. 82–88.

5. **Яненко Н. Н., Солоухин Р. И., Папырин А. Н., Фомин В. М.** Сверхзвуковые двухфазные течения в условиях скоростной неравновесности частиц. — Новосибирск: Наука, 1980.
6. **Крайко А. Н., Стернин Л. Е.** К теории течений двухскоростной сплошной среды с твердыми или жидкими частицами // ПММ. — 1965. — Т. 29, № 3. — С. 418–429.
7. **Киселев С. П., Руев Г. А., Трунев А. И., Фомин В. М., Шавалиев М. Ш.** Ударно-волновые процессы в двухкомпонентных и двухфазных средах. — Новосибирск: Наука, 1992.
8. **Федоров А. В.** Смесеобразование при распространении волновых процессов в газовзвесах (обзор) // Физика горения и взрыва. — 2004. — Т. 40, № 1. — С. 21–37.
9. **Федоров А. В., Хмель Т. А.** Численные технологии исследования гетерогенной детонации газовзвесей // Мат. моделирование. — 2006. — Т. 18, № 8. — С. 49–63.
10. **Houim R. W., Oran E. S.** A multiphase model for compressible granular-gaseous flows: formulation and initial tests // J. Fluid Mech. — 2016. — V. 789. — P. 166–220. — <https://doi.org/10.1017/jfm.2015.728>.
11. **Anand R. K.** On dynamics of imploding shock waves in a mixture of gas and dust particles // Int. J. Non-Linear Mech. — 2014. — V. 65, N 1. — P. 88–97. — <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2014.05.001>.
12. **Bind V. K., Roy S., Rajagopal C.** A reaction engineering approach to modeling dust explosions // Chem. Eng. J. — 2012. — V. 207–208. — P. 625–634. — <https://doi.org/10.1016/j.cej.2012.07.026>.
13. **Ivanov M. F., Kiverin A. D., Liberman M. A.** Ignition of deflagration and detonation ahead of the flame due to radiative preheating of suspended microparticles // Combust. Flame. — 2015. — V. 162, N 10. — P. 3612–3621. — <http://dx.doi.org/10.1016/j.combustflame.2015.06.018>.
14. **Efremov V. P., Ivanov M. F., Kiverin A. D., Yakovenko I. S.** Mechanisms of direct detonation initiation via thermal explosion of radiatively heated gas-particles layer // Results in Phys. — 2015. — V. 5. — P. 290–296. — <http://dx.doi.org/10.1016/j.rinp.2015.10.003>.
15. **Zydzak P., Klemens R.** Modelling of dust lifting process behind propagating shock wave // J. Loss Prev. Process Ind. — 2007. — V. 20, N 4-6. — P. 417–426. — <http://dx.doi.org/10.1016/j.jlp.2007.04.020>.
16. **Semenov I., Utkin P., Markov V.** Numerical modelling of dust-layered detonation structure in a narrow tube // J. Loss Prev. Process Ind. — 2013. — V. 26, N 2. — P. 380–386. — <http://dx.doi.org/10.1016/j.jlp.2012.04.007>.
17. **Saito T., Marumoto M., Takayama K.** Numerical investigations of shock waves in gas-particle mixtures // Shock Waves. — 2003. — V. 13, N 4. — P. 299–322. — <http://dx.doi.org/10.1007/s00193-003-0217-y>.
18. **Коробейников В. П., Марков В. В., Меньшов И. С.** О распространении ударных и детонационных волн в запыленных газах // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1984. — № 6. — С. 93–99.
19. **Кратова Ю. В., Хмель Т. А., Федоров А. В.** Осесимметричная расширяющаяся гетерогенная детонация в газовзвесах частиц алюминия // Физика горения и взрыва. — 2016. — Т. 52, № 1. — С. 84–95. — DOI: 10.15372/FGV20160105.
20. **Федоров А. В., Хмель Т. А., Лаврук С. А.** Выход волны гетерогенной детонации в канал с линейным расширением. I. Режимы распространения // Физика горения и взрыва. — 2017. — Т. 53, № 5. — С. 104–114. — DOI: 10.15372/FGV20170513.
21. **Федоров А. В., Хмель Т. А., Лаврук С. А.** Выход волны гетерогенной детонации в канал с линейным расширением. II. Критические условия распространения // Физика горения и взрыва. — 2018. — Т. 54, № 1. — С. 81–90. — DOI: 10.15372/FGV20180111.
22. **Хмель Т. А., Федоров А. В.** Моделирование плоских волн детонации в газовзвеси наноразмерных частиц алюминия // Физика горения и взрыва. — 2018. — Т. 54, № 2. — С. 71–81. — DOI: 10.15372/FGV20180208.
23. **Хмель Т. А.** Моделирование ячеистой детонации в газовзвесах субмикронных и наноразмерных частиц алюминия // Физика горения и взрыва. — 2019. — Т. 55, № 5. — С. 73–82. — DOI: 10.15372/FGV20190509.
24. **Хмель Т. А., Лаврук С. А.** Моделирование ячеистой детонации в двухфракционных нанодисперсных газовзвесах частиц алюминия // Физика горения и взрыва. — 2020. — Т. 56, № 2. — С. 73–82. — DOI: 10.15372/FGV20200210.
25. **Федоров А. В., Хмель Т. А.** Проблемы замыкания моделей при описании детонации ультрадисперсных газовзвесей алюминия (обзор) // Физика горения и взрыва. — 2019. — Т. 55, № 1. — С. 3–20. — DOI: 10.15372/FGV20190101.
26. **Ждан С. А., Прохоров Е. С.** Расчет ячеистой структуры детонации распылов в системе  $H_2-O_2$  // Физика горения и взрыва. — 2000. — Т. 36, № 6. — С. 111–118.
27. **Ждан С. А., Прохоров Е. С.** Исследование ячеистой структуры при детонации криогенной водородокислородной газовзвеси // Физика горения и взрыва. — 2002. — Т. 38, № 5. — С. 105–110.
28. **Veysiere B., Bozier O., Khasainov B. A.** Effect of a suspension of magnesium particles on the detonation characteristics of methane-oxygen-nitrogen mixtures at elevated

- initial pressures // *Shock Waves*. — 2002. — V. 12, N 3. — P. 227–233. — <https://doi.org/10.1007/s00193-002-0158-x>.
29. **Benkiewicz K., Hayashi K.** Two-dimensional numerical simulations of multi-headed detonations in oxygen-aluminum mixtures using an adaptive mesh refinement // *Shock Waves*. — 2003. — V. 12, N 5. — P. 385–402. — <https://doi.org/10.1007/s00193-002-0169-7>.
  30. **Veyssiere B., Khasainov B. A., Briand A.** Investigation of detonation initiation in aluminum suspensions // *Shock Waves*. — 2008. — V. 18, N 4. — P. 307–315. — <https://doi.org/10.1007/s00193-008-0136-z>.
  31. **Briand A., Veyssiere B., Khasainov B. A.** Modelling of detonation cellular structure in aluminum suspensions // *Shock Waves*. — 2010. — V. 20, N 6. — P. 521–529. — <https://doi.org/10.1007/s00193-010-0288-5>.
  32. **Khasainov B. A., Virot F., Veyssiere B.** Three-dimensional cellular structure of detonations in suspensions of aluminum particles // *Shock Waves*. — 2013. — V. 23, N 3. — P. 271–282. — <https://doi.org/10.1007/s00193-012-0425-4>.
  33. **Кул А. Л., Белл Дж. Б., Бекнер В. Е.** Континуальная модель гетерогенной среды для описания горения частиц алюминия при взрывах // *Физика горения и взрыва*. — 2010. — Т. 46, № 4. — С. 72–89.
  34. **Hosoda H., Hayashi A. K., Yamada E.** Numerical analysis on combustion characteristics of nano aluminum particle-oxygen two-phase detonation // *Sci. Technol. Energ. Mater.* — 2013. — V. 74, N 2. — P. 34–39.
  35. **Velasco F. J. S., Oton-Martinez R. A., Garcia-Cascales J. R., Espin S., Meynet N., Bentaib A.** Modelling detonation of  $H_2-O_2-N_2$  mixtures in presence of solid particles in 3D scenarios // *Int. J. Hydrogen Energy*. — 2016. — V. 41, N 38. — P. 17154–17168. — <https://doi.org/10.1016/j.ijhydene.2016.06.096>.
  36. **Кратова Ю. В., Федоров А. В.** Взаимодействие волны гетерогенной детонации, распространяющейся в ячеечном режиме, с облаком инертных частиц // *Физика горения и взрыва*. — 2014. — Т. 50, № 2. — С. 68–76.
  37. **Fedorov A. V., Kratova Yu. V.** Influence of non-reactive particle cloud on heterogeneous detonation propagation // *J. Loss Prev. Process Ind.* — 2015. — V. 36. — P. 404–415. — <https://doi.org/10.1016/j.jlp.2015.01.029>.
  38. **Fedorov A. V., Kratova Y. V.** Analysis of the influence of inert particles on the propagation of a cellular heterogeneous detonation // *Shock Waves*. — 2015. — V. 25, N 3. — P. 255–265. — <https://doi.org/10.1007/s00193-015-0560-9>.
  39. **Tahsini A. M.** Detonation wave attenuation in dust-free and dusty air // *J. Loss Prev. Process Ind.* — 2016. — V. 39. — P. 24–29. — <https://doi.org/10.1016/j.jlp.2015.11.006>.
  40. **Liu Y., Liu X., Li X.** Numerical investigation of hydrogen detonation suppression with inert particle in pipelines // *Int. J. Hydrogen Energy*. — 2016. — V. 41, iss. 46. — P. 21548–21563. — <https://doi.org/10.1016/j.ijhydene.2016.09.170>.
  41. **Kosinski P., Hoffmann A. C.** An Eulerian-Lagrangian model for dense particle clouds // *Comput. Fluids*. — 2007. — V. 36. — P. 714–723. — <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2006.06.003>.
  42. **Plea C. G., Kosinski P., Hoffmann A. C.** The effect of polydispersity on dust lifting behind shock waves // *Powder Technol.* — 2009. — V. 196. — P. 194–220. — <https://doi.org/10.1016/j.powtec.2009.07.023>.
  43. **Klemens R., Oleszczak P., Zydek P.** Experimental and numerical investigation into the dynamics of dust lifting up from the layer behind the propagating shock wave // *Shock Waves*. — 2013. — V. 23. — P. 263–270. — <https://doi.org/10.1007/s00193-012-0376-9>.
  44. **Rani S. I., Aziz B. A., Gimbut J.** Analysis of dust distribution in silo during axial filling using computational fluid dynamics: Assessment on dust explosion likelihood // *Process Saf. Environ. Prot.* — 2015. — V. 96. — P. 14–21. — <http://dx.doi.org/10.1016/j.psep.2015.04.003>.
  45. **Song Y., Zhang Q., Wu W.** Interaction between gas explosion flame and deposited dust // *Process Saf. Environ. Prot.* — 2017. — V. 111. — P. 775–784. — <https://doi.org/10.1016/j.psep.2017.09.004>.
  46. **Zhang Z., Wen C., Liu Yu., Zhang D., Jiang Z.** Application of CE/SE method to gas-particle two-phase detonations under an Eulerian-Lagrangian framework // *J. Comput. Phys.* — 2019. — V. 394. — P. 18–40. — <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2019.05.025>.
  47. **Федоров А. В., Фомин В. М.** Применение методов механики гетерогенных сред к теории фильтрации газов в угольных пластах // *Динамика многофазных сред / под ред. Н. Н. Яненко*. — Новосибирск, 1981. — С. 49–59.
  48. **Казаков Ю. В., Федоров А. В., Фомин В. М.** Структура изотермических ударных волн в газовзвесах // *Проблемы теории фильтрации и механика повышения нефтеотдачи*. — М.: Наука, 1987. — С. 108–115.
  49. **Казаков Ю. В., Федоров А. В., Фомин В. М.** Расчет разлета сжатого объема газовзвеси // *ПМТФ*. — 1987. — № 5. — С. 139–144.
  50. **Utkilen H., Balakin B. V., Kosinski P.** Numerical study of dust lifting using the Eulerian — Eulerian approach // *J. Loss Prev. Process Ind.* — 2014. — V. 27. — P. 89–98. — <https://doi.org/10.1016/j.jlp.2013.11.009>.
  51. **Hauge S. B., Balakin B. V., Kosinski P.** Dust lifting behind rarefaction waves // *Chem.*

- Eng. Sci. — 2018. — V. 191. — P. 87–99. — <https://doi.org/10.1016/j.ces.2018.06.056>.
52. **Balakrishnan K., Nance D. V., Menon S.** Simulation of impulse effects from explosive charges containing metal particles // *Shock Waves*. — 2010. — V. 20, N 3. — P. 217–239. — <https://doi.org/10.1007/s00193-010-0249-z>.
53. **Theofanous T. G., Chang Ch.-H.** The dynamics of dense particle clouds subjected to shock waves. Part 2. Modeling/numerical issues and the way forward // *Int. J. Multiphase Flow*. — 2017. — V. 89. — P. 177–206. — <https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2016.10.004>.
54. **Shimura K., Matsuo A.** Using an extended CFD-DEM for the two-dimensional simulation of shock-induced layered coal-dust combustion in a narrow channel // *Proc. Combust. Inst.* — 2019. — V. 37. — P. 3677–3684. — <https://doi.org/10.1016/j.proci.2018.07.066>.
55. **Федоров А. В., Федорова Н. Н.** Структура, распространение и отражение ударных волн в смеси твердых материалов (гидродинамическое приближение) // *ПМТФ*. — 1992. — Т. 33, № 4. — С. 10–18.
56. **Жилин А. А., Федоров А. В.** Структура ударной волны в двухскоростной смеси сжимаемых сред с двумя давлениями // *ПМТФ*. — 1998. — Т. 39, № 2. — С. 10–19.
57. **Жилин А. А., Федоров А. В.** Распространение ударных волн в двухфазной смеси с различными давлениями компонентов // *ПМТФ*. — 1999. — Т. 40, № 1. — С. 55–63.
58. **Жилин А. А., Федоров А. В.** Взаимодействие ударных волн с комбинированным разрывом в двухфазных средах. 2. Неравновесное приближение // *ПМТФ*. — 2002. — Т. 43, № 4. — С. 36–46.
59. **Бедарев И. А., Федоров А. В.** Структура и устойчивость ударной волны в газозвеси с двумя давлениями // *Вычислит. технологии*. — 2015. — Т. 20, № 2. — С. 3–19.
60. **Куропатенко В. Ф.** Обмен импульсом и энергией в неравновесных многокомпонентных средах // *ПМТФ*. — 2005. — Т. 46, № 1. — С. 7–15.
61. **Куропатенко В. Ф.** Мезомеханика однокомпонентных и многокомпонентных материалов // *Физ. мезомеханика*. — 2001. — Т. 4, № 3. — С. 49–55.
62. **Кутушев А. Г., Рудаков Д. А.** Численное исследование параметров воздушных УВ при разлете расширяющегося слоя порошкообразной среды // *Физика горения и взрыва*. — 1992. — Т. 28, № 6. — С. 105–112.
63. **Кутушев А. Г., Рудаков Д. А.** Численное исследование воздействия ударной волны на преграду, экранируемую слоем пористой порошкообразной среды // *ПМТФ*. — 1993. — Т. 34, № 5. — С. 25–31.
64. **Ивандаев А. И., Кутушев А. Г., Родионов С. П.** Математическое моделирование ударно-волновых процессов в химически-инертных и реагирующих полидисперсных смесях газа с твердыми частицами // *Мат. моделирование*. — 1995. — Т. 7, № 12. — С. 19–32.
65. **Губайдуллин А. А., Дудко Д. Н., Урманчев С. Ф.** Моделирование взаимодействия воздушной ударной волны с пористым экраном // *Физика горения и взрыва*. — 2000. — Т. 36, № 4. — С. 87–96.
66. **Кутушев А. Г.** Математическое моделирование волновых процессов в аэродисперсных и порошкообразных средах. — СПб.: Недра, 2003.
67. **Gubaidullin A. A., Britain A., Dudko D. N.** Air shock wave interaction with an obstacle covered by porous material // *Shock Waves*. — 2003. — V. 13. — P. 41–48. — <https://doi.org/10.1007/s00193-003-0193-2>.
68. **Baer M. R., Nunziato J. W.** A two-phase mixture theory for the deflagration to detonation transition (DDT) in reactive granular materials // *Int. J. Multiphase Flow*. — 1986. — V. 12, N 6. — P. 861–889. — [https://doi.org/10.1016/0301-9322\(86\)90033-9](https://doi.org/10.1016/0301-9322(86)90033-9).
69. **Embid P., Baer M.** Mathematical analysis of a two-phase continuum mixture theory // *Continuum Mech. Thermodyn.* — 1992. — V. 4, N 4. — P. 279–312. — <https://doi.org/10.1007/BF01129333>.
70. **Powers J. M.** Two-phase viscous modeling of compaction of granular materials // *Phys. Fluids*. — 2004. — V. 16, N 8. — P. 2975–2990. — <https://doi.org/10.1063/1.1764951>.
71. **Bdzil J. B., Menikoff R., Son S. F., Kapila A. K., Stewart D. S.** Two-phase modeling of DDT in granular materials: a critical examination of modeling issues // *Phys. Fluids*. — 1999. — V. 11, N 2. — P. 378–402. — <https://doi.org/10.1063/1.869887>.
72. **Croche M. W., Gonthier K. A.** A multiphase theory for the detonation of granular explosives containing an arbitrary number of solid components // *Int. J. Multiphase Flow*. — 2015. — V. 77. — P. 76–89. — <https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2015.08.004>.
73. **Saurel R., Chinnayya A., Carmouze Q.** Modelling compressible dense and dilute two-phase flows // *Phys. Fluids*. — 2017. — V. 29, N 6. — P. 063301. — P. 1–17. — <https://doi.org/10.1063/1.4985289>.
74. **Serezhkin A.** Mathematical modeling of wide-range compressible two-phase flows // *Comput. Math. Appl.* — 2019. — V. 78. — P. 517–540. — <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2018.08.015>.
75. **Zhang F., Frost D. L., Thibault P. A., Murray S. B.** Explosive dispersal of solid particles // *Shock Waves*. — 2001. — V. 10, N 6. — P. 431–443. — <https://doi.org/10.1007/PL00004050>.

76. **Уткин П. С.** Математическое моделирование взаимодействия ударной волны с плотной засыпкой частиц в рамках двухжидкостного подхода // *Хим. физика*. — 2017. — Т. 36, № 11. — С. 61–71.
77. **Utkin P.** Numerical simulation of shock wave — dense particles cloud interaction using Godunov solver for Baer — Nunziato equations // *Int. J. Numer. Methods Heat Fluid Flow*. — 2019. — V. 29, N 9. — P. 3225–3241. — <https://doi.org/10.1108/HFF-10-2018-0587>.
78. **Федоров А. В.** Структура комбинированного разрыва в газозвесах при наличии хаотического давления частиц // *ПМТФ*. — 1992. — Т. 33, № 5. — С. 36–41.
79. **Gidaspow D.** *Multiphase Flow and Fluidization: Continuum and Kinetic Theory Descriptions*. — Boston: Acad. Press, 1994.
80. **Кул А. Л., Балакришнан К.** Газодинамическая модель течения слабозапыленной двухфазной среды с горением // *Физика горения и взрыва*. — 2012. — Т. 48, № 5. — С. 59–76.
81. **Бедарев И. А., Федоров А. В., Шульгин А. В.** Расчет бегущей волны в гетерогенной среде с двумя давлениями при уравнении состояния газа, зависящего от концентраций фаз // *Журн. вычислит. математики и мат. физики*. — 2018. — Т. 58, № 5. — С. 806–820.
82. **Jenkins J. T., Savage S.** A theory for the rapid flow of identical, smooth, nearly elastic, spherical particles // *J. Fluid Mech.* — 1983. — V. 130. — P. 187–202. — <https://doi.org/10.1017/S0022112083001044>.
83. **Goldshtein A., Shapiro M.** Mechanics of collisional motion of granular materials. Part I. General hydrodynamics equations // *J. Fluid Mech.* — 1995. — V. 282. — P. 75–114. — <https://doi.org/10.1017/S0022112095000048>.
84. **Goldshtein A., Shapiro M., Gutfinger C.** Mechanics of collisional motion of granular materials. Part 3. Self-similar shock wave propagation // *J. Fluid Mech.* — 1996. — V. 316. — P. 29–51. — <https://doi.org/10.1017/S0022112096000432>.
85. **Fedorov A. V., Khmel T. A.** Description of shock wave processes in gas suspensions using the molecular-kinetic collisional model // *Heat Transfer Res.* — 2012. — V. 43, N 2. — P. 95–107. — <https://doi.org/10.1615/HeatTransRes.v43.i2.10>.
86. **Хмель Т. А., Федоров А. В.** Описание динамических процессов в двухфазных столкновительных средах с привлечением молекулярно-кинетических подходов // *Физика горения и взрыва*. — 2014. — Т. 50, № 2. — С. 81–93.
87. **Хмель Т. А., Федоров А. В.** Моделирование распространения ударных и детонационных волн в запыленных средах при учете межчастичных столкновений // *Физика горения и взрыва*. — 2014. — Т. 50, № 5. — С. 53–62.
88. **Khmel T. A., Fedorov A. V.** Numerical simulation of dust dispersion using molecular-kinetic model for description of particle-to-particle collisions // *J. Loss Prev. Process Ind.* — 2015. — V. 36. — P. 223–229. — <https://doi.org/10.1016/j.jlp.2015.02.006>.
89. **Хмель Т. А., Федоров А. В.** Численное исследование диспергирования шероховатого плотного слоя частиц под воздействием расходящейся ударной волны // *Физика горения и взрыва*. — 2017. — Т. 53, № 6. — С. 87–96. — DOI: 10.15372/FGV20170610.
90. **Федоров А. В., Хмель Т. А.** О качественных свойствах столкновительной модели для описания ударно-волновой динамики газозвесей // *Мат. моделирование*. — 2019. — Т. 31, № 3. — С. 3–22.
91. **Fan B. C., Chen Z. H., Jiang X. H., Li H. Z.** Interaction of a shock wave with a loose dusty bulk layer // *Shock Waves*. — 2007. — V. 16, N 3. — P. 179–187. — <https://doi.org/10.1007/s00193-006-0059-5>.
92. **Liu H., Guo Yi., Lin W.** Simulation of shock-powder interaction using kinetic theory of granular flow // *Powder Technol.* — 2015. — V. 273. — P. 133–144. — <https://doi.org/10.1016/j.powtec.2014.12.031>.
93. **Houim R. W., Oran E. S.** Numerical simulation of dilute and dense layered coal-dust explosions // *Proc. Combust. Inst.* — 2015. — V. 35, N 2. — P. 2083–2090. — <https://doi.org/10.1016/j.proci.2014.06.032>.
94. **Houim R. W., Oran E. S.** Structure and flame speed of dilute and dense layered coal-dust explosions // *J. Loss Prev. Process Ind.* — 2015. — V. 36. — P. 214–222. — <https://doi.org/10.1016/j.jlp.2015.01.015>.
95. **Lai S., Houim R. W., Oran E. S.** Effects of particle size and density on dust dispersion behind a moving shock // *Phys. Rev. Fluids*. — 2018. — V. 3, N 6. — P. 064306(1–25). — <https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.3.064306>.
96. **Lai S., Houim R. W., Oran E. S.** Dispersion of stratified dust layers by a moving shock wave // *Int. J. Multiphase Flow*. — 2019. — V. 118. — P. 87–96. — <https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2019.06.008>.
97. **Бойко В. М., Киселев В. П., Киселев С. П., Папырин А. Н., Поплавский С. В., Фомин В. М.** О взаимодействии ударной волны с облаком частиц // *Физика горения и взрыва*. — 1996. — Т. 32, № 2. — С. 86–99.
98. **Knudsen J. G., Katz D. L.** *Fluid Dynamics and Heat Transfer*. — New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1958.
99. **Сандарам Д., Янг В., Зарко В. Е.** Горение наночастиц алюминия (обзор) // *Физика горения и взрыва*. — 2015. — Т. 51, № 2. — С. 37–63.

100. **Kratova Y. V., Kashkovsky A. V., Shershnev A. A.** Numerical simulation of shock wave propagation in 2-D channels with obstacles filled with chemically reacting gas suspensions // *Thermal Sci.* — 2019. — V. 23, suppl. 2. — P. S623–S630. — <https://doi.org/10.2298/TSCI19S2623K>.

*Поступила в редакцию 25.06.2020.*

*После доработки 06.08.2020.*

*Принята к публикации 10.08.2020.*

---