

УДК 532.7

## **Моделирование сопряженного теплообмена в наножидкости в микроканале методом двухфазных решеточных уравнений Больцмана**

**А.Х. Сабери, М. Калтех**

*Университет Гуйлань, Решт, Иран*

E-mail: mkalteh@guilan.ac.ir

В работе представлены результаты численного моделирования сопряженного теплообмена в водно-медной наножидкости в микроканале с использованием метода двухфазных решеточных уравнений Больцмана, учитывающего вязкое рассеяние. Авторами изучаются и анализируются межмолекулярные силы, такие как аэродинамическое сопротивление, броуновская сила, сила выталкивания, а также силы Ван-дер-Ваальса и Борна. Оцениваются величины этих сил и определяется важность их учета при моделировании. Исследуется влияние увеличения объемной доли и диаметра наночастиц на теплообмен и течение жидкости. Кроме того, определяется влияние теплопроводности стенки микроканала на числа Нуссельта.

**Ключевые слова:** наножидкость, двухфазный метод решеточных уравнений Больцмана, сопряженный теплообмен, число Нуссельта.

### **Введение**

Для развития различных областей промышленности и технологий важнейшей задачей является изучение теплообмена и методов его улучшения [1]. Эффективным для этой цели является применение в качестве рабочих жидкостей наножидкостей с лучшими теплообменными свойствами, чем у традиционно используемых. Известно много численных и эмпирических исследований теплообмена в наножидкостях. Так, в работе [2] экспериментально исследовался теплообмен в наножидкости в трубе. Результаты показали, что при добавлении наночастиц в чистую воду теплообмен увеличивается. Авторы [3] экспериментально исследовали коэффициент теплообмена в наножидкости в горизонтальной трубе в условиях постоянного теплового потока. Было показано, что развитие теплового пограничного слоя снижает коэффициент теплопередачи. В работе [4] проводились экспериментальные исследования теплообмена наножидкостей в микроканале. Результаты показали, что увеличение скорости теплопередачи путем добавления наночастиц к потоку чистой воды с низкой скоростью более ощутимо, чем их добавление к высокоскоростному водному потоку. Авторы [5] использовали численное моделирование двухфазного потока для изучения влияния диаметра наночастиц на ламинарное течение наножидкости в изогнутой трубе. Было установлено, что число Нуссельта уменьшается с увеличением диаметра наночастиц.

Метод решеточных уравнений Больцмана (LBM, Lattice Boltzmann Method) — это численный метод, который можно применять для моделирования наножидкостей. Простота использования для решения сложных задач и граничных условий сделала его очень популярным. Авторы [6] использовали однофазный LBM для моделирования свободной конвекции наножидкости. Результаты показали хорошее согласование с данными, полученными с помощью других численных методов. В работе [7] LBM применялся для моделирования естественной конвекции наножидкости в квадратной полости. Было получено, что число Нуссельта растет с увеличением объемной доли наночастиц и средней температуры жидкости. Авторы [8] использовали LBM для моделирования теплового потока при вынужденной конвекции течения наножидкости в канале, в нижнюю стенку которого вмонтированы блоки. Было установлено, что добавление наночастиц и наличие вихрей, создаваемых блоками, оказывают значительное влияние на усиление теплообмена. В работе [9] использовался метод решеточных уравнений Больцмана для исследования теплообмена и течения наножидкости в квадратной полости. Результаты показали, что число Рэлея и объемная доля твердого вещества существенно влияют на усиление теплообмена. В работе [10] применялся LBM для моделирования ламинарных потоков в канале. Полученные данные показали хорошее согласование с результатами исследования методом ANSYS-FLUENT. Авторы [11] разработали LBM с учетом внешних сил для моделирования естественной конвекции в полости с открытой стенкой. Результаты показали, что учет силового воздействия при моделировании дает более точные результаты. В работе [12] использовался метод однофазных решетчатых уравнений Больцмана с учетом вязкой диссипации для моделирования потока ламинарной наножидкости в микротеплообменнике. Было показано, что число Нуссельта растет при увеличении объемной доли наночастиц и уменьшается с увеличением диаметра наночастиц.

Авторы [13] использовали LBM для моделирования одного из компонентов многофазного потока, а также модель Шаня и Ченя [14] и показали, что LBM обладает лучшей способностью моделировать смачиваемость и разделение фаз. В работе [15] применялись вычислительная гидродинамика и LBM для моделирования вынужденного конвекционного теплообмена в микроканалах различной геометрии. Полученные результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Моделирование теплообмена в двухфазных течениях — одно из широко распространенных применений LBM. Оно является мощным инструментом для исследования теплообмена в потоках наножидкостей. В работах [16–18] был разработан двухфазный LBM для моделирования двухфазных несмешивающихся жидкостей с большой разницей в плотности. Результаты продемонстрировали хорошее согласование с аналитическими и экспериментальными прогнозами. Авторы [19] усовершенствовали LBM для моделирования многокомпонентной многофазной системы с жидкостями с высоким отношением плотностей. В работе [20] использовался многофазный LBM аналогичный методу Шана–Чена для моделирования двухфазного потока в пористых средах. Было показано, что LBM является подходящим методом для моделирования течения в пористых средах.

Важными параметрами при моделировании наножидкостей являются силы взаимодействия между частицами. Моделирование с использованием двухфазного метода Больцмана имеет особое значение благодаря его простоте и способности исследовать силы взаимодействия между частицами. В работе [21] применялся двухфазный LBM для моделирования течения наножидкости. При этом рассматривались межмолекулярные силы, такие как сила сопротивления, броуновская сила и силы выталкивания и Ван-дер-Ваальса. Результаты показали, что LBM является подходящим методом для моделирования наножидкостных течений и теплообмена. В работе [22] использовался двухфазный LBM для моделирования естественной конвекции в наножидкостях с учетом межмолекулярных сил. Было получено, что среднее число Нуссельта увеличивается с увеличением

объемной доли наночастиц. Это увеличение больше при более высоких числах Рэлея. Также было обнаружено, что броуновский потенциал взаимодействия и силы гравитационного выталкивания оказывают положительное влияние на естественную конвекцию, в то время как сила сопротивления уменьшает теплообмен. Авторы [23] разработали двухфазный LBM для прогнозирования характеристик течения наножидкости. Они также привели формулы для измерения величины сил взаимодействия между частицами. Этот метод был ими использован для моделирования теплообмена и распределения частиц между двумя параллельными пластинами. Результаты показали, что наножидкости способны увеличить температуру жидкости и скорость теплообмена. В работе [24] был использован двухфазный LBM для сравнения естественной конвекции внутри квадратной полости, заполненной наножидкостью и обычной жидкостью. Результаты показали, что присутствие наножидкости увеличивает теплообмен. Кроме того, термический пограничный слой, сформированный около стенки, оказывался тоньше, когда в полости использовалась наножидкость. В работе [25] применялся двухфазный LBM для исследования теплообмена с естественной конвекцией в различных прямоугольных замкнутых областях с учетом сил взаимодействия частиц. Результаты показали, что воздействие на жидкость за счет разности температур и последующие за ним броуновская сила и сила сопротивления, оказывают наибольшее влияние на теплообмен при естественной конвекции. Кроме того, было установлено, что теплообмен увеличивается с уменьшением диаметра наночастиц. Авторы [26] использовали LBM для изучения теплообмена и течения наножидкости в микроканале. Они рассматривали силы взаимодействия частиц и комбинировали их с моделью белого гауссового шума, которая используется для моделирования броуновского движения наночастиц. Было показано, что броуновская сила может привести к колебаниям числа Нуссельта по длине канала. Более того, среднее число Нуссельта будет расти с увеличением объемной доли наночастиц и числа Рейнольдса на входе. В работе [27] применялся двухфазный LBM для моделирования теплообмена естественной конвекцией в квадратном замкнутом объеме. Результаты показали, что двухфазный метод позволяет повысить точность решения задач теплообмена в наножидкостях. Авторы [28] использовали LBM конечного объема для моделирования течения наножидкости. Они рассматривали внутренние и внешние силы, действующие на течение наножидкости. Было показано, что число Нуссельта наножидкости выше, чем у чистой жидкости.

Важным параметром при моделировании течения и теплообмена в микроканалах является вязкая диссипация. В работе [29] рассматривалась роль вязкой диссипации для течения и теплообмена в микроканалах. Авторы [30] ввели термический интеграл столкновений Батнагара в LBM, используемый для расчета тепловых потоков в течении Пуазейля, в течении Куэтта, а также в задаче о естественной конвекции с вязкой диссипацией. Полученные результаты показали хорошее согласование с существующими решениями.

В работе [31] были разработаны микроустройства для охлаждения в биохимических приложениях, криогенной технике, аэрокосмической промышленности и микроэлектромеханических системах. Этим микроустройствам необходимы собственные системы охлаждения, чтобы предотвратить их перегрев. Микроканалы являются основной частью оборудования, используемого в системах охлаждения микроустройств. Толщина стенки микроканала может быть значительной по сравнению с шириной канала, поэтому передачей тепла теплопроводностью в стенке пренебрегать нельзя [32]. В работе [33] использовался однофазный LBM для моделирования сопряженного теплообмена наножидкости в микроканале. Результаты показали, что при увеличении объемной доли наночастиц и числа Рейнольдса наблюдается рост числа Нуссельта. Авторы [34] разработали с помощью LBM моделирование сопряженного теплообмена для системы

жидкость–твердое тело. Результаты показали хорошее согласование с классическим методом вычислительной гидродинамики. В работе [35] LBM применялся для сопряженного теплообмена при моделировании микроканалов на основе металлов. Полученные результаты коррелировали с численными и экспериментальными данными. Авторы [36] использовали LBM для моделирования сопряженного теплообмена в прямоугольном канале. Было показано, что он является подходящим методом для моделирования сопряженного теплообмена. В работе [37] LBM применялся для моделирования сопряженного теплообмена в прямоугольной полости. Было установлено, что LBM является подходящим методом для моделирования сопряженного теплообмена. Температуропроводность нагреваемой стенки является определяющим параметром сопряженной скорости теплообмена. Авторы [38] использовали LBM для моделирования сопряженного теплообмена и течения жидкости в микроканале. Результаты подтвердили важность учета сопряженной постановки для изучения теплообмена в микроканале.

В работах [21–26] в качестве важных факторов при двухфазном моделировании LBM рассматривались силы сопротивления, броуновская сила и силы выталкивания и Ван-дер-Ваальса, но ни в одном из этих исследований не учитывалась сила отталкивания Борна. Авторы [39] ввели формулу для силы отталкивания между ближайшими коллоидными частицами. Они утверждали, что эта формулировка более совместима с реальностью, чем другие формулы, которые не учитывают силу отталкивания. Авторы [28] также подчеркивали, что при двухфазном моделировании наночастиц следует учитывать силу отталкивания. В работах [40] и [41] исследовались силы отталкивания Борна и Ван-дер-Ваальса в наночастицах с использованием молекулярно-динамического моделирования. Авторы пришли к выводу, что сила притяжения Ван-дер-Ваальса и сила отталкивания Борна должны учитываться при моделировании поведения наночастиц.

Из анализа вышеперечисленной литературы можно видеть, что вопрос о сопряженном переносе тепла в наножидкости с использованием двухфазного LBM не изучался. Кроме того, в исследованиях при двухфазном LBM-моделировании потока и теплообмена в наножидкости не принималась во внимание сила отталкивания Борна. С учетом данного положения дел в настоящей работе рассматривается моделирование сопряженного теплопереноса в наножидкости в микроканале с использованием двухфазного LBM. Авторы анализируют степень влияния силы сопротивления, броуновской силы, сил плавлучести, Ван-дер-Ваальса и Борна, исследуют и оценивают их величину. В работе также изучается влияние материала стенок микроканала на теплообмен и число Нуссельта.

## 1. Численное моделирование

В представленной работе двухфазное LBM моделирование используется для исследования течения и сопряженного теплообмена в водно-медной наножидкости в микроканале с толстой стенкой. Стенка микроканала выполнена из кремния. Стоит отметить, что в моделировании учитываются межмолекулярные силы, такие как силы сопротивления и выталкивания, броуновская сила и силы Ван-дер-Ваальса и Борна. Схематический вид микроканала показан на рис. 1. Согласно рисунку, холодный поток наножидкости с температурой 293 К втекает в микроканал с левой стороны. На нижнюю стенку действует постоянный тепловой поток  $40 \text{ кВт} \cdot \text{м}^{-2}$ . Тепло движется поперек стенки канала и достигает границы раздела жидкость–твердое вещество. Температура наножидкости увеличивается по мере получения тепла от границы раздела. Нагретая жидкость выходит с правой стороны микроканала. Число Рейнольдса потока наножидкости  $\rho_{bf} H / \nu_{bf}$  принимается равным 10. Предполагается, что входящий в канал поток развивается термически и гидравлически. Высота канала составляет  $3 \cdot 10^{-4}$  м. Диаметр наночастиц считается равным 100 нм, за исключением раздела 3.3, в котором планируется рассмотреть влияние этого диаметра на число Нуссельта.

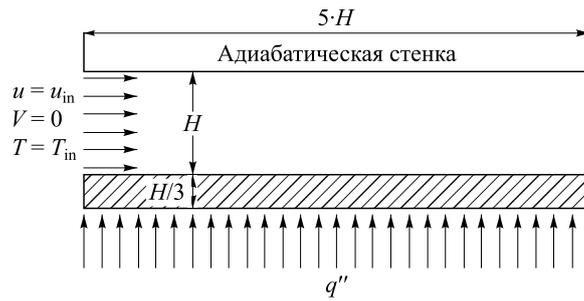


Рис. 1. Схема микроканала.

Решеточное уравнение Больцмана для двухфазного потока жидкости записывается следующим образом [22]:

$$f_i^\sigma(x + \mathbf{e}_i \Delta t, t + \Delta t) - f_i^\sigma(x, t) = -\frac{1}{\tau^\sigma} [f_i^\sigma(x, t)] - f_i^{\sigma, \text{eq}}(x, t) + \frac{2\tau^\sigma - 1}{2\tau^\sigma} \cdot \frac{D\Delta t B_i}{c^2} \mathbf{F}^\sigma \cdot \mathbf{e}_i, \quad (1)$$

$$\tau^\sigma = 3\nu^\sigma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = 0,5, \quad (2)$$

где  $f_i^\sigma(x, t)$  — функция распределения  $\sigma$ -компоненты наножидкости со скоростью  $\mathbf{e}_i$  (вместе с направлением  $i$ ),  $x$  — положение решетки,  $\tau^\sigma$  — безразмерное время релаксации столкновения для компоненты  $\sigma$ ,  $\mathbf{F}^\sigma$  — сумма всех межмолекулярных сил, действующих на  $\sigma$ -компоненту,  $\nu^\sigma$  — коэффициент кинематической вязкости. Согласно работе [23], средняя кинематическая вязкость наножидкости определяется следующим образом:

$$\nu = \frac{2 \sum_{\sigma} C_{\sigma} \tau^{\sigma} - 1}{6} \cdot \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}, \quad (3)$$

здесь  $C_{\sigma}$  — массовая доля компоненты  $\sigma$ , рассчитываемая как

$$C_{\sigma} = \frac{\varphi^{\sigma} \rho^{\sigma}}{\varphi^{\sigma} \rho^{\sigma} + (1 - \varphi^{\sigma}) \rho^{\sigma i}}, \quad (4)$$

где  $\varphi^{\sigma}$  — объемная доля компоненты  $\sigma$  наножидкости.

Остальные величины в уравнениях (1) имеют вид:

$$\mathbf{e}_i = \begin{cases} (0, 0) & \text{при } i = 0, \\ c \left( \cos \frac{(i-1)\pi}{2}, \sin \frac{(i-1)\pi}{2} \right) & \text{при } i = 1, \dots, 4, \\ \sqrt{2}c \left( \cos \frac{(2i-9)\pi}{4}, \sin \frac{(2i-9)\pi}{4} \right) & \text{при } i = 5, \dots, 8, \end{cases} \quad (5)$$

$$B_i = \begin{cases} 0 & \text{при } i = 0, \\ 1/6 & \text{при } i = 1, \dots, 4, \\ 1/24 & \text{при } i = 5, \dots, 8, \end{cases} \quad (6)$$

$$c = \Delta x / \Delta t, \quad (7)$$

где  $B_i$  — весовой коэффициент,  $c$  — решеточная скорость звука,  $\Delta t$  и  $\Delta x$  — шаг по времени и длина ячейки решетки соответственно,  $f_i^{\sigma, \text{eq}}(\mathbf{x}, t)$  — функция локального распределения в равновесном состоянии, определяемая следующим образом:

$$f_i^{\sigma, \text{eq}} = \omega_i \rho^\sigma(x, t) \left[ 1 + 3 \frac{(e_i \mathbf{u}^\sigma)}{c^2} + \frac{9 (e_i \mathbf{u}^\sigma)}{2 c^4} - \frac{3 (\mathbf{u}^\sigma)^2}{2 c^2} \right], \quad (8)$$

здесь  $\rho^\sigma$  и  $\mathbf{u}^\sigma$  — плотность и скорость компоненты  $\sigma$  наножидкости соответственно,  $\omega_i$  — весовой коэффициент, принимающий значения:

$$\omega_i = \begin{cases} 4/9 & \text{при } i = 0, \\ 1/9 & \text{при } i = 1, \dots, 4, \\ 1/36 & \text{при } i = 5, \dots, 8; \end{cases} \quad (9)$$

$$\rho^\sigma(x, t) = \sum_i f_i^\sigma(x, t), \quad (10)$$

$$\mathbf{u}^\sigma = \frac{1}{\rho^\sigma} \sum_i f_i^\sigma(x, t) \mathbf{e}_i. \quad (11)$$

В работе [42] функция распределения температуры с оценкой вязкой диссипации при низкоскоростном потоке определялась следующим образом:

$$g_i^\sigma(x + \mathbf{e}_i \Delta t, t + \Delta t) - g_i^\sigma(x, t) = -\frac{1}{\tau_\theta^\sigma} [g_i^\sigma(x, t)] + \Delta t \hat{R}, \quad (12)$$

$$g_i^{\sigma, \text{eq}} = \omega_i \theta^\sigma(x, t) \left[ 1 + 3 \frac{(e_i \mathbf{u}^\sigma)}{c^2} + \frac{9 (e_i \mathbf{u}^\sigma)}{2 c^4} - \frac{3 (\mathbf{u}^\sigma)^2}{2 c^2} \right], \quad (13)$$

$$\hat{R} = \left( \frac{1}{3R} \right) (f_i^\sigma - f_i^{\sigma, \text{eq}}) (\mathbf{c} - \mathbf{u}^\sigma) (\mathbf{c} - \mathbf{u}^\sigma) / \frac{\partial \mathbf{u}^\sigma}{\partial \mathbf{r}}, \quad (14)$$

$$\tau_\theta^\sigma = 3\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + 0,5, \quad (15)$$

где  $\alpha^\sigma$  — коэффициент температуропроводности,  $\mathbf{r}$  —  $X$  или  $Y$  направление. Согласно исследованию [25], средняя температуропроводность записывается в виде

$$\alpha = \frac{2 \sum_\sigma C_\sigma \tau_\theta^\sigma - 1}{6} \cdot \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}. \quad (16)$$

Безразмерная макроскопическая температура рассчитывается как

$$\theta^\sigma = \sum_i g_i^\sigma, \quad (17)$$

$$\theta^\sigma = \frac{(T^\sigma - T_{\text{in}}) K^\sigma}{q'' D_h}. \quad (18)$$

Этап распространения определяется следующим образом:

$$f_i(x + \mathbf{e}_i \Delta t, t + \Delta t) = \bar{f}_i(x, t + \Delta t). \quad (19)$$

Как отмечалось ранее, силы взаимодействия между твердыми частицами и базовой жидкостью играют важную роль в двухфазном моделировании наножидкостей. Приведем описание уравнений этих сил. Выражение для силы сопротивления имеет вид [22]:

$$\mathbf{F}_D = -6\pi\mu a \Delta \mathbf{u}, \quad (20)$$

где  $\mu$  — вязкость базовой жидкости,  $a$  — радиус наночастиц,  $\Delta u$  — разность скоростей между наночастицей и базовой жидкостью. Согласно работе [43], броуновская сила записывается как

$$\mathbf{F}_B = C_c K_b T_{bf} / (6\pi\mu a), \quad (21)$$

где  $\lambda$  — средняя длина пробега,  $C_c$  — поправочный коэффициент Каннингема, определяемый как

$$C_c = 1 + \frac{2\lambda}{d_p} \left[ 1,257 + 0,4e^{(1,1d_p/2\lambda)} \right]. \quad (22)$$

Сила выталкивания рассчитывается следующим образом [22]:

$$\mathbf{F}_H = -\frac{4}{3}\pi a^3 g \Delta\rho, \quad (23)$$

где  $\Delta\rho$  — разница плотностей между наночастицами и базовой жидкостью.

Согласно работам [39] и [40], силы потенциала взаимодействия (силы Ван-дер-Ваальса и Борна) представим в виде

$$E_{VDW} = -\frac{A}{6} \left[ \frac{2a^2}{L_{cc}^2 - 4a^2} + \frac{2a^2}{L_{cc}^2} + \ln \frac{L_{cc}^2 - 4a^2}{L_{cc}^2} \right], \quad (24)$$

$$E_{Br} = 4A \left[ \frac{\Lambda}{a} \right]^6 \frac{(n'-8)!}{(n-2)!} \frac{a}{L_{cc}} \left[ \frac{-2[(L_{cc}/a)^2 + 30]}{(L_{cc}/a)^7} + \frac{(L_{cc}/a)^2 + 14L_{cc}/a + 54}{(L_{cc}/a + 2)^7} + \frac{(L_{cc}/a)^2 - 14L_{cc}/a + 54}{(L_{cc}/a - 2)^7} \right], \quad (25)$$

$$\mathbf{F}_{VDW,Br} = \sum_{i=1}^8 n_i \frac{\partial E_{VDW,Br}}{\partial r_i}, \quad (26)$$

где  $\Lambda$  — конечное расстояние, на котором результирующие потенциальные силы взаимодействия равны нулю,  $n_i$  — число частиц в каждом направлении,  $i$  — направление,  $A$  и  $L_{cc}$  — постоянная Гамакера и расстояние между центрами частиц соответственно, согласно [44]  $L_{cc}$  рассчитывается как

$$L_{cc} = \sqrt[3]{\frac{4\pi}{3\varphi}} R, \quad (27)$$

здесь  $n_i$  — число частиц в каждом направлении ( $i$  — направление), записываемое в виде

$$n_i = \frac{\rho^\sigma V}{m^\sigma}, \quad (28)$$

здесь  $V$  и  $m^\sigma$  — объем решетки и масса наночастицы соответственно. Количество сил, действующих на наночастицы в единице объема элемента решетки, получается следующим:

$$\mathbf{F}_p = -\frac{n(\mathbf{F}_D + \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_H + \mathbf{F}_{VDW} + \mathbf{F}_{Br})}{V}, \quad (29)$$

где  $n$  — общее число частиц в каждой ячейке решетки. Результирующие силы, действующие на базовую жидкость, определяются как

$$\mathbf{F}_{bf} = -n(\mathbf{F}_D + \mathbf{F}_B). \quad (30)$$

Макроскопические скорости наночастиц и базовой жидкости оцениваются согласно [3] следующим образом:

$$\mathbf{u}_{p\text{-new}} = \mathbf{u}_p + \frac{\mathbf{F}_p \Delta t \mathbf{e}_i}{2\rho_p}, \quad (31)$$

$$\mathbf{u}_{\text{bf-new}} = \mathbf{u}_{\text{bf}} + \frac{\Delta t \mathbf{F}_{\text{bf}}}{2L_x L_y \rho_{\text{bf}}}, \quad (32)$$

где  $L_x$  и  $L_y$  — число ячеек решетки в направлениях  $X$  и  $Y$  соответственно. В соответствии с данными работы [26] теплообмен между наночастицами и базовой жидкостью описывается выражениями

$$T_{\text{new}}^\sigma = T^\sigma + \Delta t \tau_\theta^\sigma \Phi_{p,\text{bf}}, \quad (33)$$

$$\Phi_{p,\text{bf}} = \frac{h_{p,\text{bf}} [T_p(x, t) - T_{\text{bf}}(x, t)]}{\rho^\sigma C_p^\sigma S^a}, \quad (34)$$

$$h_{p,\text{bf}} = \left[ 2 + 1,1 \text{Re}^{0,6} \text{Pr}_{\text{bf}}^{(1/3)} \right] \left[ \frac{K_p}{2a} \right], \quad (35)$$

$$S^a = \frac{6}{\rho_p d_p}, \quad (36)$$

где  $\Phi_{p,\text{bf}}$  — энергоперенос между наночастицами и базовой жидкостью,  $h_{p,\text{bf}}$  — коэффициент теплоотдачи от конвективного теплообмена между жидкой и твердой фазами,  $K_p$  — теплопроводность частицы,  $S^a$  — удельная площадь поверхности компонента  $\sigma$  наножидкости. Среднее число Нуссельта рассчитывается как

$$\text{Nu} = \frac{q'' D_h}{T_w - T_{\text{bulk}} K_{\text{bf}}}, \quad (37)$$

$$\overline{\text{Nu}}_{\text{ave}} = \frac{1}{L} \int_0^L \text{Nu}(x) dx, \quad (38)$$

где  $T_w$  — температура стенки,  $T_{\text{bulk}}$  — среднемассовая температура. Критерии сходимости для скорости и температуры определены следующим образом:

$$\begin{aligned} & \text{погрешность скорости} = \\ & = \frac{\sqrt{\sum_{i,j} \left\{ \left[ \mathbf{u}_x^\sigma(i, j, t + \Delta t) - \mathbf{u}_x^\sigma(i, j, t) \right]^2 + \left[ \mathbf{u}_y^\sigma(i, j, t + \Delta t) - \mathbf{u}_y^\sigma(i, j, t) \right]^2 \right\}}}{\sqrt{\sum_{i,j} \left[ \mathbf{u}_x^\sigma(i, j, t + \Delta t)^2 + \mathbf{u}_y^\sigma(i, j, t + \Delta t)^2 \right]}} < \varepsilon_1, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} & \text{погрешность температуры} = \frac{\sqrt{\sum_{i,j} \left[ T^\sigma(i, j, t + \Delta t) - T^\sigma(i, j, t) \right]^2}}{\sqrt{\sum_{i,j} T^\sigma(i, j, t + \Delta t)^2}} < \varepsilon_2. \end{aligned} \quad (40)$$

В текущем расчете  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  предполагаются равными  $2 \cdot 10^{-6}$ .

## 2. Сеточная сходимость

В целях определения сеточной сходимости изучалось влияние количества узлов сетки на среднее число Нуссельта. Результаты приведены в табл. 1, откуда видно, что

**Таблица 1**  
Средние числа Нуссельта для различных сеток при  $Re = 10$  и  $\phi = 1\%$

№ сетки	Количество узлов сетки	Среднее число Нуссельта
1	$300 \times 80 = 24000$	8,32
2	$450 \times 120 = 54000$	8,11
3	$600 \times 160 = 96000$	7,94
4	$750 \times 200 = 150000$	7,84
5	$900 \times 240 = 216000$	7,79

наилучший результат (с минимальными погрешностью и временем расчета) соответствует плотности сетки  $750 \times 200$  в направлениях  $X$  и  $Y$  соответственно.

Проверка результатов расчета проводится двумя этапами. Сначала результаты двухфазного моделирования LBM в микроканале с различными числами Пекле  $Pe$  сравниваются с экспериментальными и численными данными [45]. Результаты сравнения представлены на рис. 2. Видно, что данные двухфазного моделирования LBM лучше согласуются с экспериментальными данными, чем результаты программного моделирования однофазных потоков (CFD — Computational Fluid Dynamics). Здесь число  $Pe$  определяется как

$$Pe = Re \cdot Pr_{гг}. \quad (41)$$

На втором этапе моделируется однофазный сопряженный теплообмен в наножидкости между двумя параллельными пластинами, верхняя из которых является более толстой. Результаты этого моделирования приведены в табл. 2 и сравниваются с данными работы [46]. Согласно таблице, между результатами моделирования сопряженного теплообмена наблюдается хорошее согласование.

Таблица 2

Сравнение процентного увеличения числа Нуссельта, полученного в настоящем исследовании и в работе [46]

Объемная доля наночастиц, %	Число Нуссельта (данные настоящего исследования)	Процентное увеличение числа Нуссельта наножидкости в сравнении с чистой водой	
		Данные настоящего исследования	Данные работы [46]
0	1,565	—	—
2	1,677	7,15655	7
4	1,833	17,1246	17

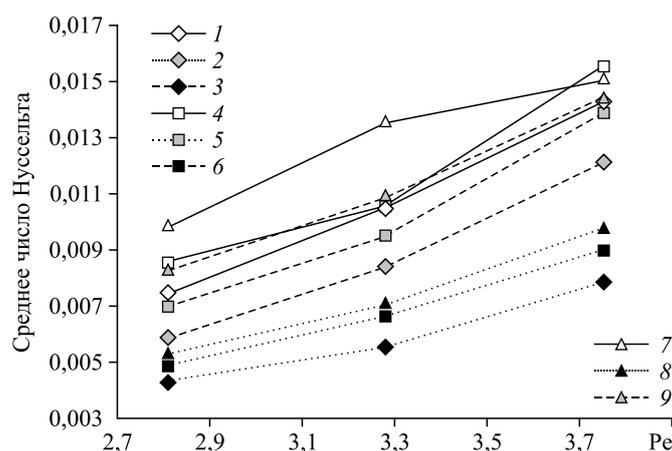


Рис. 2. Сравнение численных результатов для средних чисел Нуссельта, полученных в настоящем исследовании и в работе [45].

Экспериментальные данные [45] при  $T_w = 75$  (1), 60 (4), 45 (7) °С, результаты однофазного моделирования CFD [45] при  $T_w = 75$  (2), 60 (5), 45 (8) °С и результаты настоящего двухфазного моделирования LBM при  $T_w = 75$  (3), 60 (6), 45 (9) °С для  $TiO_2 = 0,01$  млн<sup>-1</sup>.

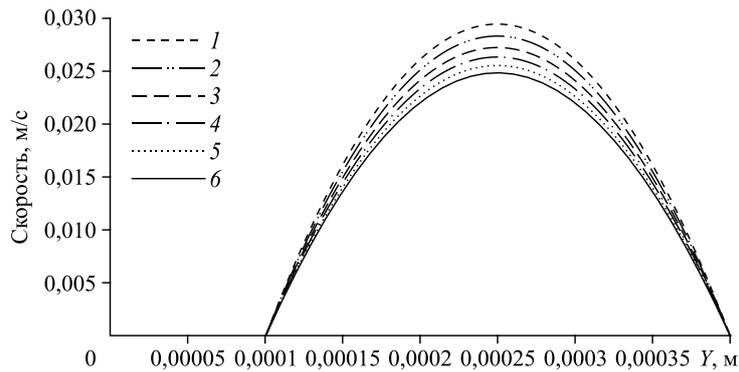


Рис. 3. Распределение скорости при  $x = 5 \cdot 10^{-4}$  и  $Re = 10$  для жидкой фазы. Объемная доля частиц  $\varphi = 0$  (1), 1 (2), 2 (3), 3 (4), 4 (5), 5 (6) %.

### 3. Результаты и обсуждение

#### 3.1. Влияние объемной доли наночастиц на распределение скорости и температуры

Проанализируем, каким образом влияет увеличение объемной доли наночастиц на температуру и скорость на участке  $x = \text{длина}/3$  и как изменяется температурный контур по микроканалу. Согласно рис. 3 на рассматриваемом участке наножидкость развивается гидравлически, а распределение скорости принимает параболическую форму. Кроме того, скорость жидкой фазы на этом участке уменьшается с увеличением объемной доли наножидкости. Это может быть связано с большим влиянием силы сопротивления на течение наножидкости при увеличении объемной доли наночастиц, что приводит к снижению максимальной и средней скоростей на этом участке.

На рис. 4 видно, что температура толстой стенки уменьшается с увеличением объемной доли наночастиц. Это явление может быть связано с увеличением теплообмена в наножидкости при увеличении объемной доли наночастиц. Увеличение теплообмена в наножидкости приводит к большему оттоку тепла от стенки микроканала. Кроме того, благодаря постоянному тепловому потоку, поступающему в микроканал, средняя температура стенки микроканала снижается. Согласно рисунку, температура жидкости возрастает с увеличением объемной доли наночастиц вблизи верхней стенки канала. Следует отметить, что средняя температура вдоль исследуемого участка растет с увеличением объемной доли наночастиц (см. табл. 3).

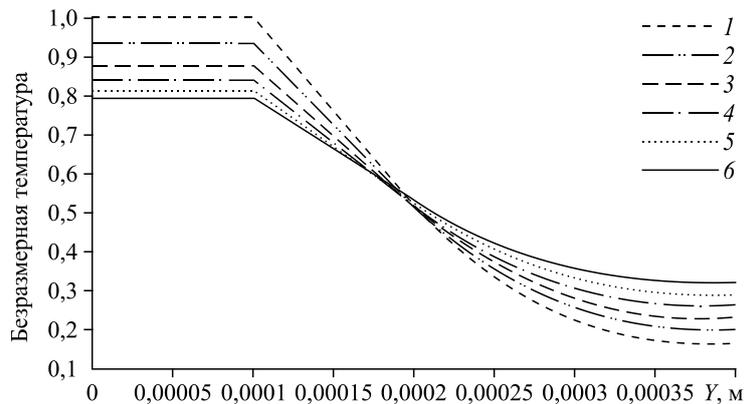


Рис. 4. Распределение температуры при  $x = 5 \cdot 10^{-4}$  и  $Re = 10$  для жидкой фазы. Обозначения см. на рис. 3.

Таблица 3

Средняя температура по микроканалу в зависимости от различных объемных долей наночастиц

Объемная доля наночастиц %	Средняя температура по микроканалу
0	0,317
1	0,323
2	0,327
3	0,335
4	0,344
5	0,355

На рис. 5 приведены температурные контуры жидкой и твердой фаз вдоль микроканала. Видно, что температура наножидкости увеличивается при протекании наножидкости по каналу. Кроме того, температура стенки увеличивается в направлении потока. Температурный контур стенки микроканала показывает, что постоянные линии температуры имеют наклон вдоль ширины стенки. Это явление связано с разницей температур между поверхностью, подвергающейся воздействию теплового потока, и поверхностью,

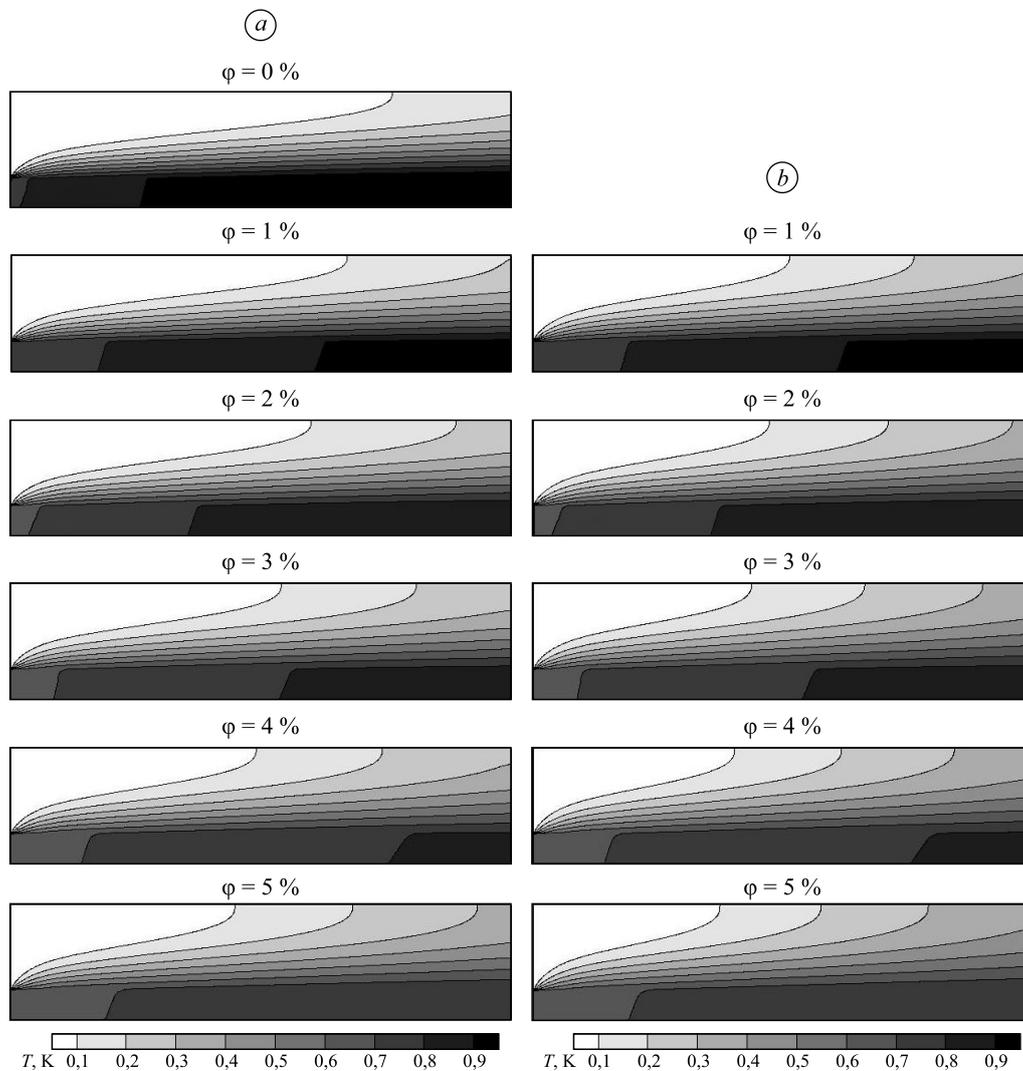


Рис. 5. Контурсы температуры для различных объемных долей наночастиц при  $Re = 10$ .

$a$  — жидкая фаза,  $b$  — твердая фаза.

подвергающейся воздействию потока наножидкости. Также установлено, что увеличение объемной доли наночастиц в каждой фазе ускоряет повышение температуры в этой фазе.

### 3.2. Влияние объемной доли наночастиц на силы взаимодействия

Рассмотрим среднее значение и распределение межмолекулярных сил вдоль канала, а также влияние увеличения объемной доли наночастиц на их изменения. Кроме того, сравнивая величину межмолекулярных сил, исследуем важность учета каждой силы в двухфазном моделировании.

На рис. 6 представлены распределения силы сопротивления вдоль канала при различных объемных долях наночастиц. На рисунке видно, что после гидравлического развития потока, вследствие того, что скорость остается неизменной в жидкой и твердой фазах, сила сопротивления, создаваемая разностью этих скоростей, также остается неизменной. Подобно профилю скорости сила сопротивления в канале увеличивается от нуля на стенке до максимума в середине канала при перемещении по его ширине. В табл. 4 представлены средние величины межмолекулярных сил по длине канала. Неожиданным оказалось, что средняя сила сопротивления уменьшается с увеличением объемной доли наночастиц. Это, очевидно, вызвано тем, что разница в скорости между жидкой и твердой фазами

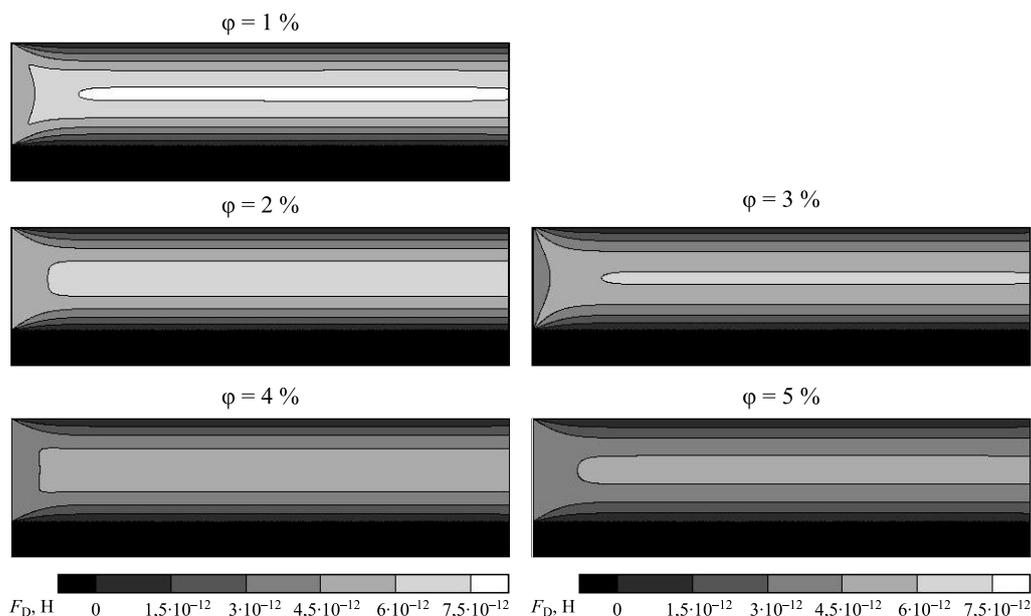


Рис. 6. Контуры силы сопротивления для различных объемных долей наночастиц при  $Re = 10$ .

Таблица 4  
Сравнение различных сил для разных объемных долей наночастиц при  $Re = 10$

Объемная доля, %	Сила сопротивления	Броуновская сила	Выталкивающая сила	Сила Ван-дер-Ваальса (X-направление)	Сила Ван-дер-Ваальса (Y-направление)	Сила Борна (X-направление)	Сила Борна (Y-направление)
1	$5,06 \cdot 10^{-12}$	$6,54 \cdot 10^{-16}$	$-2,71 \cdot 10^{-19}$	$-1,53 \cdot 10^{-27}$	$-2,34 \cdot 10^{-27}$	$1,06 \cdot 10^{-19}$	$1,28 \cdot 10^{-19}$
2	$4,52 \cdot 10^{-12}$	$6,62 \cdot 10^{-16}$	$-2,34 \cdot 10^{-19}$	$-2,31 \cdot 10^{-25}$	$-2,24 \cdot 10^{-25}$	$1,02 \cdot 10^{-16}$	$8,39 \cdot 10^{-16}$
3	$4,04 \cdot 10^{-12}$	$6,77 \cdot 10^{-16}$	$-2,10 \cdot 10^{-19}$	$-1,08 \cdot 10^{-23}$	$-1,24 \cdot 10^{-23}$	$1,04 \cdot 10^{-15}$	$7,34 \cdot 10^{-15}$
4	$3,61 \cdot 10^{-12}$	$6,96 \cdot 10^{-16}$	$-1,85 \cdot 10^{-19}$	$-3,79 \cdot 10^{-21}$	$-2,76 \cdot 10^{-21}$	$2,00 \cdot 10^{-14}$	$1,69 \cdot 10^{-14}$
5	$3,23 \cdot 10^{-12}$	$7,16 \cdot 10^{-16}$	$-1,70 \cdot 10^{-19}$	$-1,12 \cdot 10^{-20}$	$-1,18 \cdot 10^{-20}$	$2,29 \cdot 10^{-14}$	$1,95 \cdot 10^{-14}$

уменьшается с увеличением объемной доли, тем самым снижая силу сопротивления. Следует отметить, что данное уменьшение не сокращает влияние силы сопротивления в расчетах. Это связано с тем, что при двухфазном моделировании величина каждой силы умножается на количество частиц в каждой ячейке (см. (29)). Таким образом, увеличение объемной доли наночастиц приводит к увеличению числа частиц ячейки и, соответственно, к увеличению силы сопротивления в расчетах.

На рис. 7 изображены контуры броуновской силы вдоль канала для различных объемных долей наночастиц. Видно, что величина этой силы увеличивается при перемещении по каналу, что может быть обусловлено прямой связью этой силы с температурой в каждой точке. По мере роста температуры наножидкости при ее движении вдоль канала увеличивается и броуновская сила. Значения средней броуновской силы в канале представлены в табл. 4. Очевидно, что средняя броуновская сила увеличивается с увеличением объемной доли наночастиц.

На рис. 8 показаны контуры силы выталкивания для различных объемных долей наночастиц. Согласно этому рисунку, величина силы выталкивания уменьшается вдоль канала, что связано с увеличением температуры, а также с уменьшением разницы между плотностью жидкой и твердой фаз вдоль канала. В табл. 4 отражено влияние увеличения объемной доли наночастиц на среднюю силу выталкивания, когда температура вдоль канала возрастает с увеличением объемной доли наночастиц, тем самым уменьшая силу выталкивания.

На рис. 9 представлены контуры силы Ван-дер-Ваальса для различных объемных долей наночастиц. Согласно рисунку, величина силы Ван-дер-Ваальса изменяется в каждой точке вдоль канала. Последнее вполне понятно, так как расстояние между частицами является основным параметром при расчете этой силы. Кроме того, поскольку данное расстояние пропорционально количеству частиц в каждой сетке, эта сила будет меняться в зависимости от изменения числа частиц. В табл. 4 показано влияние увеличения объемной доли наночастиц на силу Ван-дер-Ваальса. Видно, что средняя сила Ван-дер-Ваальса увеличивается вдоль микроканала с увеличением объемной доли наночастиц.

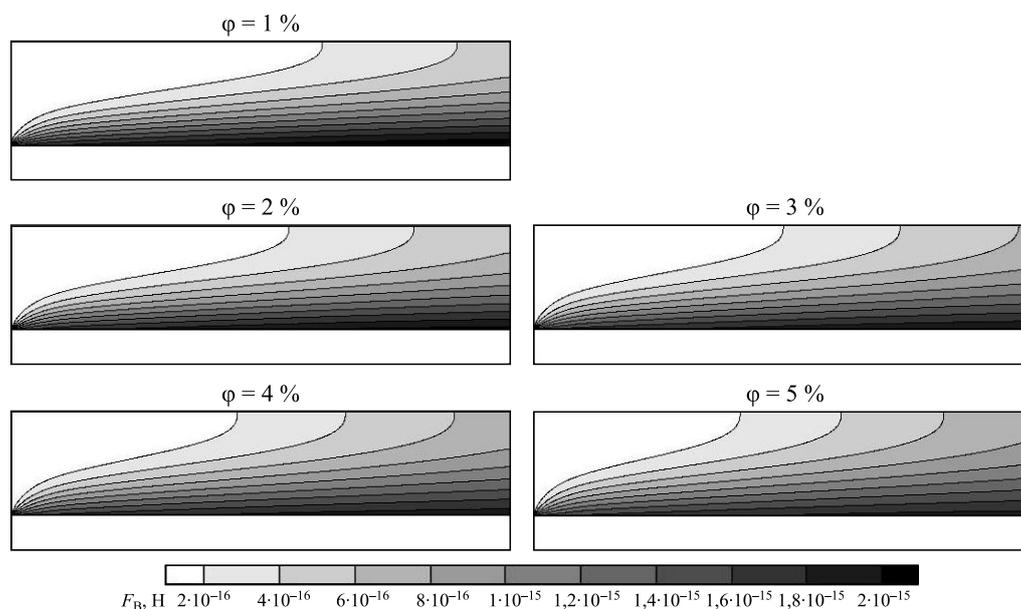


Рис. 7. Контурсы броуновской силы для различных объемных долей наночастиц при  $Re = 10$ .

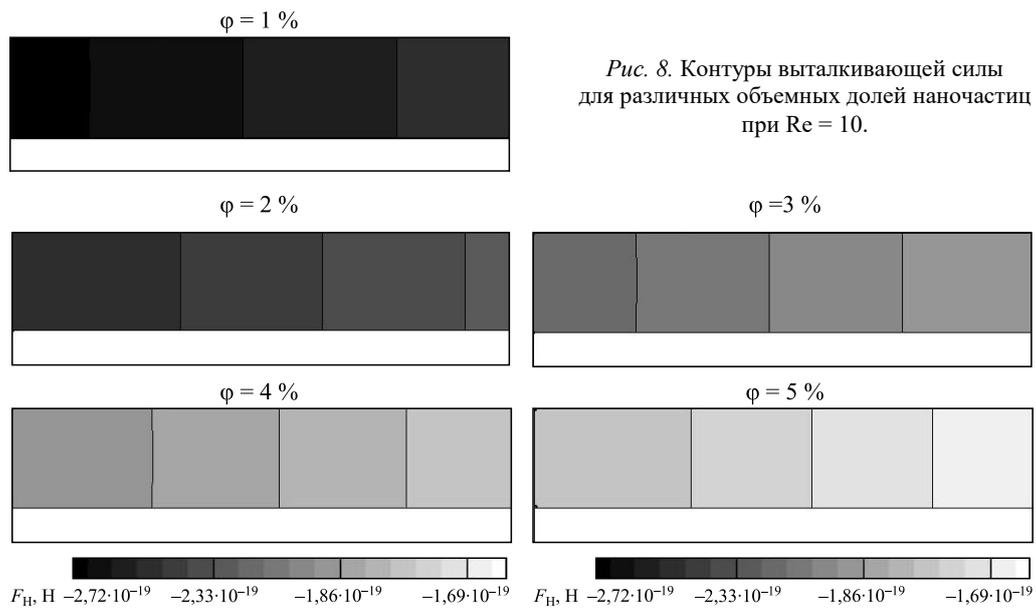


Рис. 8. Контуры выталкивающей силы для различных объемных долей наночастиц при  $Re = 10$ .

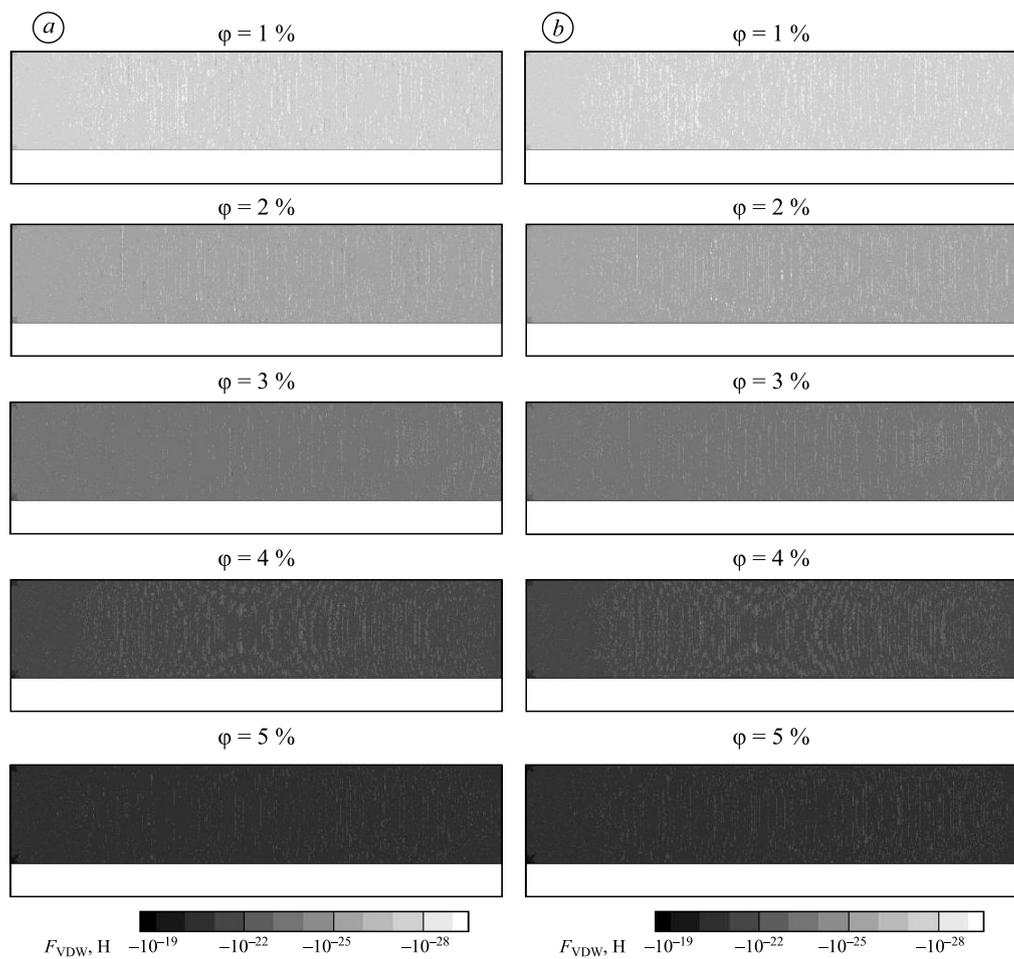


Рис. 9. Контуры силы Ван-дер-Ваальса для различных объемных долей наночастиц при  $Re = 10$ .  
 a — X-направление, b — Y-направление.

На рис. 10 представлены контуры силы Борна внутри микроканала для различных объемных долей наночастиц. Видно, что величина этой силы, как и величина силы Ван-дер-Ваальса, зависит от расстояния между частицами. Сила Борна является функцией числа частиц в каждой сетке. В табл. 4 показано влияние увеличения объемной доли наночастиц на эту силу. Согласно таблице, средняя сила Борна возрастает вдоль канала с увеличением объемной доли наночастиц.

В табл. 4 представлена средняя величина каждой силы, действующей на частицы, для различных объемных долей наночастиц. Из таблицы видно, что сила сопротивления, сопровождаемая броуновской силой и силой выталкивания, имеет наибольшую величину и влияние на скорость теплопередачи в наножидкости. Авторы [47] выявили аналогичные тенденции для потока наножидкости в микроканале с параллельными пластинами. Тщательное сравнение данных таблицы показывает, что силы Ван-дер-Ваальса и Борна претерпевают наибольшие изменения при увеличении объемной доли частиц. Это может быть связано с зависимостью сил от расстояния между частицами, которое резко меняется с возрастанием их концентрации.

### 3.3. Влияние объемной доли и диаметра наночастиц на среднее число Нуссельта

Рассмотрим влияние объемной доли наночастиц на число Нуссельта в микроканале, а также влияние диаметра наночастиц на число Нуссельта и механизм его изменения

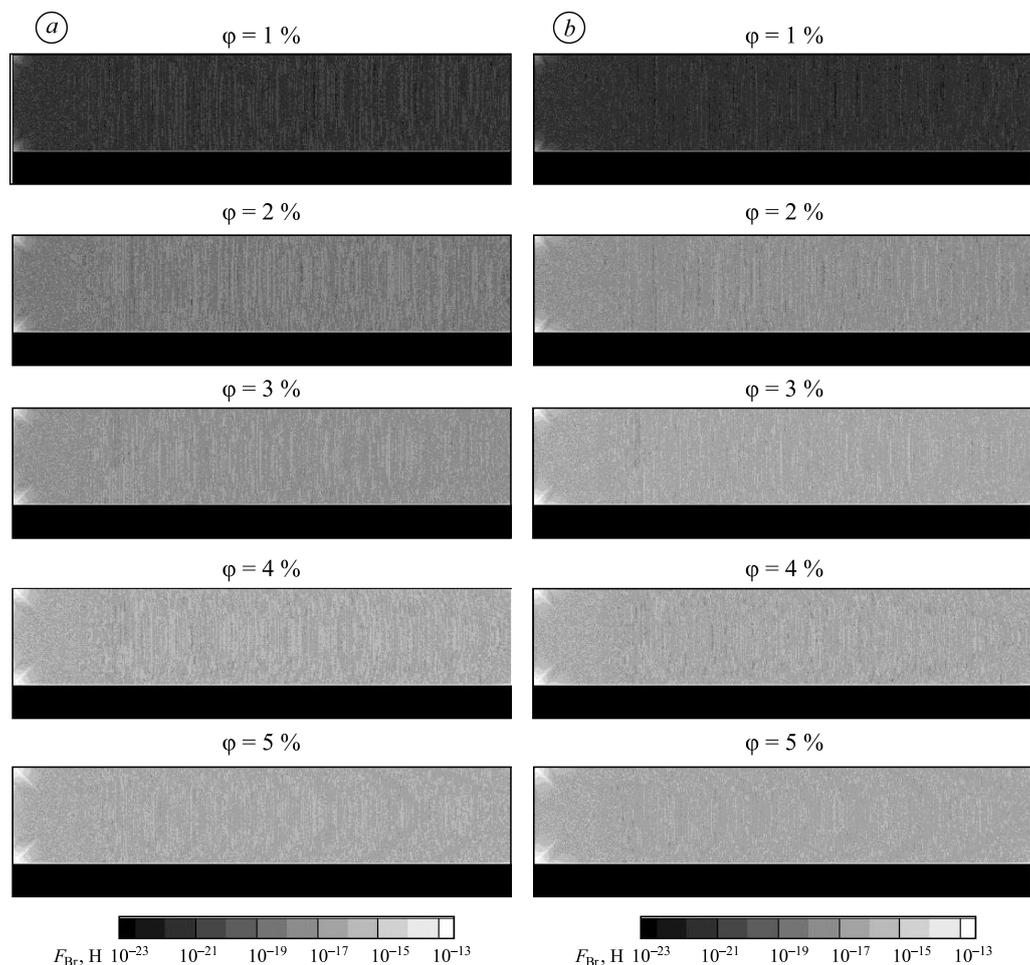


Рис. 10. Контурсы силы Борна для различных объемных долей наночастиц при  $Re = 10$ .

$a$  —  $X$ -направление,  $b$  —  $Y$ -направление.

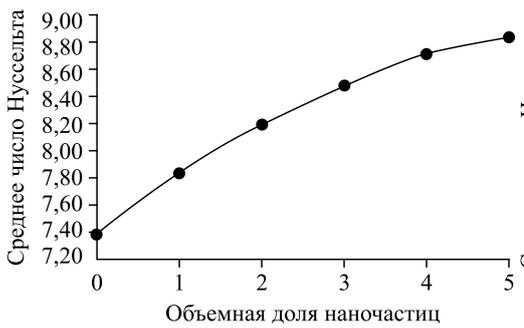


Рис. 11. Зависимость среднего числа Нуссельта от объемной доли наночастиц при  $Re = 10$ .

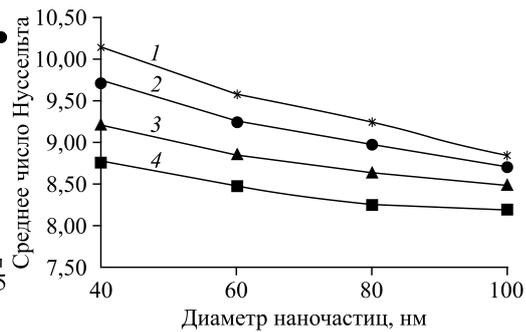


Рис. 12. Зависимость числа Нуссельта от диаметра наночастиц при  $Re = 10$ .  $\varphi = 2$  (1), 3 (2), 4 (3), 5 (4) %.

в зависимости от изменения объемной доли частиц. Согласно рис. 11, среднее число Нуссельта возрастает почти на 19,56 % с увеличением объемной доли наночастиц от 0 % до 5 %. Этот рост связан с более высокой теплопроводностью наножидкости по сравнению с базовой жидкостью. Авторы [48] связывают данное явление с броуновским движением наночастиц и увеличением поверхности контакта твердого тела с жидкостью. В работе [49] изучалось влияние броуновской скорости и размера наночастиц на теплопроводность наножидкости. Результаты показали, что при увеличении броуновской скорости и уменьшении размера наночастиц увеличивается теплопроводность наножидкости. Во многих исследованиях диаметр наночастиц рассматривается как фактор, влияющий на степень увеличения теплопередачи в наножидкости относительно базовой жидкости. Так, авторы [23] исходили из предположения, что диаметр наночастиц является важным фактором, влияющим на броуновскую силу. Результаты показали, что броуновская сила уменьшается с увеличением диаметра наночастиц, вследствие чего уменьшается теплопередача в наножидкостях. На рис. 12 показано влияние диаметра наночастиц на число Нуссельта при разных объемных долях. Из рисунка видно, что среднее число Нуссельта уменьшается с увеличением диаметра наночастиц. Это явление можно объяснить не только уменьшением броуновской силы с увеличением диаметра наночастиц (21), но в дополнение к этому и увеличением силы сопротивления (20). Скорость вдоль микроканала уменьшается с увеличением силы сопротивления, вследствие чего уменьшается число Нуссельта.

### 3.4. Влияние теплопроводности стенки микроканала на среднее число Нуссельта

Влияние теплопроводности стенки микроканала на среднее число Нуссельта и распределение температуры отражено в табл. 5 и на рис. 13. Рассматривались стенки микроканала из трех различных материалов: из меди, кремния и железа. Установлено, что при увеличении теплопроводности стенки микроканала увеличивается среднее число Нуссельта и температура стенки.

Таблица 5

Изменение числа Нуссельта в зависимости от материалов стенки микроканала

Материал стенки микроканала	Число Нуссельта
Медь	10,19
Кремний	7,84
Железо	4,70

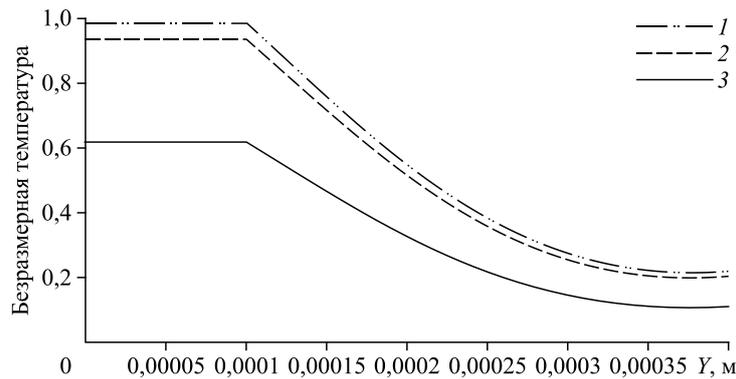


Рис. 13. Распределение температуры при  $x = 5 \cdot 10^{-4}$  (м) для различных материалов стенки микроканала.  
1 — медь, 2 — кремний, 3 — железо.

### Заключение

Проведено численное моделирование сопряженного теплообмена водно-медной наножидкости в микроканале под воздействием постоянного теплового потока от нижней стенки с использованием метода двухфазных решеточных уравнений Больцмана (LBM). Вследствие простоты применения условия непрерывности температуры на границе жидкость–твердое тело LBM хорошо подходит для моделирования сопряженного теплообмена. Он является также мощным инструментом для моделирования и использования межмолекулярных сил и сложных граничных условий. Исследование проведено с учетом межмолекулярных сил, таких как аэродинамическое сопротивление, плавучесть, броуновская сила, силы Борна и Ван-дер-Ваальса. Установлено, что сила сопротивления, сопровождаемая броуновской силой, силой выталкивания, силами Борна и Ван-дер-Ваальса, оказывает наибольшее влияние на теплообмен и число Нуссельта. В работе также изучено влияние объемной доли и диаметра наночастиц на число Нуссельта. Полученные данные показали, что число Нуссельта возрастает с увеличением объемной доли наночастиц. Кроме того обнаружено, что существует обратная зависимость между числом Нуссельта и диаметром наночастиц, которая обусловлена эффектом сопротивления и броуновскими силами. Чем больше объемная доля наночастиц, тем сильнее эта зависимость. Также исследовано влияние материала стенки микроканала на среднее число Нуссельта, отмечено, что вследствие увеличения теплопроводности стенки микроканала возрастает среднее число Нуссельта.

### Обозначения

$A$ — коэффициент Гамакера,	$h$ — коэффициент конвективного теплообмена, Вт·м <sup>-2</sup> ·К,
$a$ — радиус наночастиц, м,	$K$ — теплопроводность, Вт·м <sup>-1</sup> ·К <sup>-1</sup> ,
$B_i$ — весовой коэффициент,	$K_p$ — теплопроводность частицы, Вт·м <sup>-1</sup> ·К <sup>-1</sup> ,
$c$ — решеточная скорость звука,	$K_b$ — постоянная Больцмана, Дж·К <sup>-1</sup> ,
$C_c$ — поправочный коэффициент Каннингема,	$L_{CC}$ — расстояние между центрами частиц, м,
$D_h$ — гидравлический диаметр,	$L_x$ — число узлов в решетке в направлении $X$ ,
$d_p$ — диаметр наночастиц, м,	$L_y$ — число узлов в решетке в направлении $Y$ ,
$E_{Br}$ — потенциал взаимодействия Борна,	$m^\sigma$ — масса наночастицы, кг,
$E_{VDW}$ — потенциал взаимодействия Ван-дер-Ваальса,	$n$ — число частиц в решетке,
$e_i$ — направление скорости решетки,	$n'$ — показатель степени в потенциале Леннарда–Джонса,
$C_\sigma$ — массовая доля $\sigma$ компоненты,	
$C_p$ — удельная теплоемкость, Дж·г <sup>-1</sup> ·К <sup>-1</sup> ,	

$F_B$ — броуновская сила, Н,	$n_i$ — число частиц,
$F_{Br}$ — сила Борна, Н,	$Nu$ — число Нуссельта,
$F_H$ — сила выталкивания, Н,	$Pe$ — число Пекле,
$F_{bf}$ — сумма сил, действующих на базовую жидкость, Н,	$q''$ — тепловой поток, Вт·м <sup>-2</sup> ,
$F_D$ — сила сопротивления, Н,	$R$ — газовая постоянная, Дж·К <sup>-1</sup> ·моль <sup>-1</sup> ,
$F_P$ — сумма сил, действующих на наночастицу, Н,	$\hat{R}$ — член вязкой диссипации,
$F_{VDW}$ — сила Ван-дер-Ваальса, Н,	$Re$ — число Рейнольдса,
$f$ — функция распределения плотности,	$S^\alpha$ — удельная поверхность, м <sup>2</sup> ·кг <sup>-1</sup> ,
$f^{eq}$ — равновесная функция распределения плотности,	$T$ — температура, К,
$g$ — функция распределения температуры,	$T_{bulk}$ — среднemasсовая температура потока, К,
$g^{eq}$ — равновесная функция распределения температуры,	$t$ — время, с,
	$V$ — объем решетки,
	$u$ — макроскопическая скорость, м·с <sup>-1</sup> ,
	$x$ — положение решетки,
	$X, Y$ — осевые и вертикальные декартовы координаты.

### Греческие символы

$\alpha$ — температуропроводность, м <sup>2</sup> ·с <sup>-1</sup> ,	$\rho$ — плотность, кг·м <sup>-3</sup> ,
$\Delta t$ — временной шаг,	$\tau$ — время релаксации столкновения для потока,
$\Delta x$ — длина ячейки решетки,	$\tau_\theta$ — время релаксации столкновения для температуры,
$\theta$ — безразмерная температура,	$\varphi$ — объемная доля частиц,
$\lambda$ — средняя длина пробега, м,	$\Phi$ — энергетический обмен между наночастицами и базовой жидкостью,
$\Lambda$ — диаметр столкновения, м,	$\chi$ — средняя температуропроводность,
$\mu$ — динамическая вязкость, м <sup>2</sup> ·с <sup>-1</sup> ,	$\omega_i$ — весовой коэффициент.
$\nu$ — кинематическая вязкость, м <sup>2</sup> ·с <sup>-1</sup> ,	

### Подстрочные символы

ave — средний,	nf — наножидкость,
bf — базовая жидкость,	p — частицы,
i — направления дискретной решетки,	X и Y — координаты,
in — вход,	w — стенка.

### Надстрочные символы

$\sigma, \dot{\sigma}$  — жидкая и твердая фазы.

## Список литературы

1. Florio L.A., Harnoy A. Combination technique for improving natural convection cooling in electronics // Intern. J. of Thermal Sci. 2007. Vol. 46. P. 76–92.
2. Qiang L., Yimin X. Convective heat transfer and flow characteristics of Cu-water nanofluids // Sci. in China Series E: Technological Sci. 2002. Vol. 45. Iss. 4. P. 408–416.
3. Rashidi F., Nezamabad N.M. Experimental investigation of convective heat transfer coefficient of cnts nanofluid under constant heat flux // Proceedings of the World Congress on Engng. 2011. Vol. 3. 6 p.
4. Anoop K., Sadr R., Yu J., Kang S., Jeon S., Banerjee D. Experimental study of forced convective heat transfer of nanofluids in a microchannel // Intern. Communications in Heat and Mass Transfer. 2012. Vol. 39. P. 1325–1330.
5. Akbarinia A., Laur R. Investigating the diameter of solid particles effects on a laminar nanofluid flow in a curved tube using a two phase approach // Intern. J. of Heat and Fluid Flow. 2009. Vol. 30. P. 706–714.
6. Sheikholeslami M., Gorji-Bandpy M., Domairry G. Free convection of nanofluid filled enclosure using lattice Boltzmann method (LBM) // Applied Mathematics and Mechanics. 2013. Vol. 34. P. 833–846.
7. Lai F.-H., Yang Y.-T. Lattice Boltzmann simulation of natural convection heat transfer of Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/water nanofluids in a square enclosure // Intern. J. of Thermal Sci. 2011. Vol. 50. P. 1930–1941.
8. Mohebbi R., Lakzayi H., Sidik N.A.C., Japar W.M.A.A. Lattice Boltzmann method based study of the heat transfer augmentation associated with Cu/water nanofluid in a channel with surface mounted blocks // Intern. J. of Heat and Mass Transfer. 2018. Vol. 117. P. 425–435.
9. Zhou W.N., Yan Y.Y., Xu J.L. A lattice Boltzmann simulation of enhanced heat transfer of nanofluids // Intern. Communications in Heat and Mass Transfer. 2014. Vol. 55. P. 113–120.
10. Almalowi S.J., Oztekin A. Flow simulations using two dimensional thermal lattice Boltzmann method // J. of Applied Mathematics. 2012. Vol. 2012. P. 135173-1–135173-12.
11. Mohamad A.A., Kuzmin A. A critical evaluation of force term in lattice Boltzmann method, natural convection problem // Intern. J. of Heat and Mass Transfer. 2010. Vol. 53. P. 990–996.

12. **Saberi A.H., Kalteh M.** Numerical investigation of nanofluid flow and conjugated heat transfer in a micro-heatexchanger using the lattice Boltzmann method // Numerical Heat Transfer. Part A. 2016. Vol. 70, No. 12. P. 1390–1401.
13. **Yuan P., Schaefer L.** A thermal lattice boltzmann two-phase flow model and its application to heat transfer problems. Part 1. Theoretical Foundation // ASME J. Fluids Eng. 2006. Vol. 128. P. 151–156.
14. **Shan X., Chen H.** Lattice Boltzmann model for simulating flows with multiple phases and components // Physical Review E. 1993. Vol. 47, Iss. 3. P. 1815–1819.
15. **Liu Y., Cui J., Jiang Y.X., Li W.Z.** A numerical study on heat transfer performance of microchannels with different surface microstructures // Applied Thermal Engng. 2011. Vol. 31. P. 921–931.
16. **Inamuro T., Ogata T., Tajima S., Konishi N.** A lattice Boltzmann method for incompressible two-phase flows with large density differences // J. of Computational Physics. 2004. Vol. 198. P. 628–644.
17. **Zheng H.W., Shu C., Chew Y.T.** A lattice Boltzmann model for multiphase flows with large density ratio // J. of Computational Physics. 2006. Vol. 218. P. 353–371.
18. **Yu Z., Hemminger O., Fan L.S.** Experiment and lattice Boltzmann simulation of two-phase gas–liquid flows in microchannels // Chemical Engng Sci. 2007. Vol. 62. P. 7172–7183.
19. **Bao J., Schaefer L.** Lattice Boltzmann equation model for multi-component multi-phase flow with high density ratios // Applied Mathematical Modelling. 2013. Vol. 37. P. 1860–1871.
20. **Huang H., Li Z., Liu S., Lu X.Y.** Shan-and-Chen-type multiphase lattice Boltzmann study of viscous coupling effects for two-phase flow in porous media // Intern. J. for Numerical Methods in Fluids. 2009. Vol. 61, Iss. 3. P. 341–354.
21. **Xuan Y., Yu K., Li Q.** Investigation on flow and heat transfer of nanofluids by the thermal lattice Boltzmann model // Progress in Computational Fluid Dynamic. 2005. Vol. 5, No. 1/2. P. 13–19.
22. **Qi C., He Y., Yan S., Tian F., Hu Y.** Numerical simulation of natural convection in a square enclosure filled with nanofluid using the two-phase lattice Boltzmann method // Nanoscale Research Letters. 2013. Vol. 8. Art. 56.
23. **Xuan Y., Yao Z.** Lattice Boltzmann model for nanofluids // Heat Mass Transfer. 2005. Vol. 41. P. 199–205.
24. **Guo Y., Qin D., Shen S., Bennacer R.** Nanofluid multi-phase convective heat transfer in closed domain: simulation with lattice Boltzmann method // Intern. Communications in Heat and Mass Transfer. 2012. Vol. 39, Iss. 3. P. 350–354.
25. **Qi C., Liang L., Rao Z.** Study on the flow and heat transfer of liquid metal based nanofluid with different nanoparticle radiuses using two-phase lattice Boltzmann method // Intern. J. of Heat and Mass Transfer. 2016. Vol. 94. P. 316–326.
26. **Wu X., Kumar R.** Lattice Boltzmann model for flow and heat transfer of nanofluids in a microchannel // 3rd Intern. Conf. on Microchannels and Minichannels, June 2005. P. 537–543.
27. **Ahmed M., Eslamian M.** Numerical simulation of natural convection of a nanofluid in an inclined heated enclosure using two-phase lattice Boltzmann method: accurate effects of thermophoresis and Brownian forces // Nanoscale Research Letters. 2015. Vol. 10, No. 296. 12 p.
28. **Ghasemi J., Razavi S.E.** Numerical nanofluid simulation with finite volume lattice-Boltzmann enhanced approach // J. of Applied Fluid Mechanics. 2013. Vol. 6. P. 519–527.
29. **Avelino M., Kakac S.** Convective heat transfer in microchannels — a review // Proceedings of the 10th Brazilian Congress of Thermal Sci. and Engng — ENCIT 2004, Braz. Soc. of Mechanical Sci. and Engng — ABCM, Rio de Janeiro, Brazil, Nov. 29 – Dec. 03, 2004. 10 p.
30. **Mai H.C., Lin K.H., Yang C.H., Lin C.A.** A thermal lattice Boltzmann model for flows with viscous heat dissipation // Tech Sci. Press. 2010. Vol. 61. P. 45–63.
31. **Fedorov A.G., Viskanta R.** Three-dimensional conjugate heat transfer in the microchannel heat sink for electronic packaging // Intern. J. of Heat and Mass Transfer. 2000. Vol. 43. P. 399–415.
32. **Qu W., Mala Gh.M., Li D.** Heat transfer for water flow in trapezoidal silicon microchannels // Intern. J. of Heat and Mass Transfer. 2000. Vol. 43. P. 3925–3936.
33. **Yang Y.T., Lai F.H.** Lattice Boltzmann simulation of heat transfer and fluid flow in a microchannel with nanofluids // Heat Mass Transfer. 2011. Vol. 47. P. 1229–1240.
34. **Wang J., Wang M., Li Z.** A lattice Boltzmann algorithm for fluid–solid conjugate heat transfer // Intern. J. of Thermal Sci. 2007. Vol. 46. P. 228–234.
35. **Parida P.R., Ekkad S.V.** Numerical prediction of flow and heat transfer rates in metal based microchannels using lattice Boltzmann method // ASME Summer Heat Transfer Conf. August 2008. 9 p.
36. **Pirouz M.M., Farhadi M., Sedighi K., Nemati H., Fattahi E.** Lattice Boltzmann simulation of conjugate heat transfer in a rectangular channel with wall-mounted obstacles // Scientia Iranica B. 2011. Vol. 18. P. 213–221.
37. **Алинеджад Д., Эсфахани Д.А.** Моделирование методом решеточных уравнений Больцмана течения вязкой жидкости и сопряженного теплообмена в прямоугольной полости с нагретой подвижной стенкой // Теплофизика и аэромеханика. 2013. Т. 20, № 5. С. 623–631.
38. **Widyaparaga A., Pranowo P.** Simulation of conjugate convective-conductive heat transfer in a microchannel within the slip regime using GPU accelerated lattice Boltzmann method // Proceedings of the ASME 11th Intern. Conf. on Nanochannels, Microchannels, and Minichannels, 2013. 9 p.
39. **Feke D.L., Prabhu N.D., Mann Jr. J.A., Mann III J.A.** A formulation of the short-range repulsion between spherical colloidal particles // J. Physical Chemistry. 1984. Vol. 88. P. 5735–5739.

40. Sun W. Interaction forces between a spherical nanoparticle and a flat surface // Physical Chemistry Chemical Physics. 2014. Vol. 16. P. 5846–5854.
41. Zeng Q., Yu A., Lu G. Evaluation of interaction forces between nanoparticles by molecular dynamics simulation // Ind. Eng. Chem. Res. 2010. Vol. 49. P. 12793–12797.
42. Shi Y., Zhao T.S., Guo Z.L. Thermal lattice Bhatnagar-Gross-Krook model for flows with viscous heat dissipation in the incompressible limit // Physical Review E. 2004. Vol. 70, Iss. 6. P. 066310-1–066310-10.
43. Fani B., Kalteh M., Abbass A. Investigating the effect of Brownian motion and viscous dissipation on the nanofluid heat transfer in a trapezoidal microchannel heat sink // Advanced Powder Technology. 2014. Vol. 26, No. 1. P. 83–90.
44. Das S.K., Choi S.U., Pradeep T., Yu W. Nanofluids: sci. and technology. John Wiley & Sons Press, 2007. 416 p.
45. Yu J., Kang S.W., Jeong R.G., Banerjee D. Experimental validation of numerical predictions for forced convective heat transfer of nanofluids in a microchannel // Intern. J. of Heat and Fluid Flow. 2016. Vol. 62. P. 203–212.
46. Yang Y.T., Lai F.H. Numerical study of flow and heat transfer characteristics of alumina-water nanofluids in a microchannel using the lattice Boltzmann method // Int. Commun. Heat Mass Transfer. 2011. Vol. 38. P. 607–614.
47. Saberi A.H., Kalteh M. Numerical investigation of nanofluid convection heat transfer in a microchannel using two-phase lattice Boltzmann method // J. of Thermal Analysis Calorimetry. 2019. Vol. 138. P. 1161–1177.
48. Keblinski P., Phillpot S.R., Choi S.U.S., Eastman J.A. Mechanisms of heat flow in suspensions of nano-sized particles (nanofluid) // Int. J. Heat Mass Transfer. 2002. Vol. 45, Iss. 4. P. 855–863.
49. Chon C.H., Kihm K.D., Lee S.P., Choi S.U.S. Empirical correlation finding the role of temperature and particle size for nanofluid ( $Al_2O_3$ ) thermal conductivity enhancement // Applied Physics Letters. 2005. Vol. 87. P. 153107.

*Статья поступила в редакцию 14 января 2019 г.,  
после доработки — 2 октября 2019 г.,  
принята к публикации 6 ноября 2019 г.,  
после дополнительной доработки — 26 апреля 2021 г.*