

В заключение следует отметить, что проведенный анализ может оказаться полезным при планировании экспериментов и трактовке результатов акустических измерений, проводимых в подвижных объектах.

Автор выражает благодарность В. А. Красильникову за интерес к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Госсард Э., Хук У. Волны в атмосфере. — М.: Мир, 1978.
2. Федяков Е. М., Колтаков В. К., Богдатов Е. Е. Измерение переменных давлений. — М.: Изд-во стандартов, 1982.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. — М.: Наука, 1976. — Ч. 1.
4. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977.
5. Павлов В. И., Треблер П. М. К теории волн в сдвиговых потоках неоднородной сжимаемой жидкости // ПМТФ. — 1983. — № 2.
6. Треблер П. М. Теория акустических явлений, связанных с излучением волн в неоднородных и движущихся средах: Дис... канд. физ.-мат. наук. — М.: МГУ, 1981.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. — М.: Наука, 1973.
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. — М.: Наука, 1986.
9. Островский Л. А. Величины второго порядка малости в бегущей звуковой волне // Акуст. журн. — 1968. — Т. 14, № 1.
10. Псакович М. А. Общая акустика. — М.: Наука, 1973.
11. Пюнин Б. И., Стержанов В. П. Исследование изменения уровня инфразвука в кузове легкового автомобиля // Автомоб. пром-сть. — 1977. — № 1.

Поступила 10/II 1987 г.

УДК 532.526.5

### О ДИСКРЕТНОМ ХАРАКТЕРЕ ВИХРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРИ ВОЗНИКНОВЕНИИ ЦИРКУЛЯЦИОННОГО ОБТЕКАНИЯ КРЫЛА

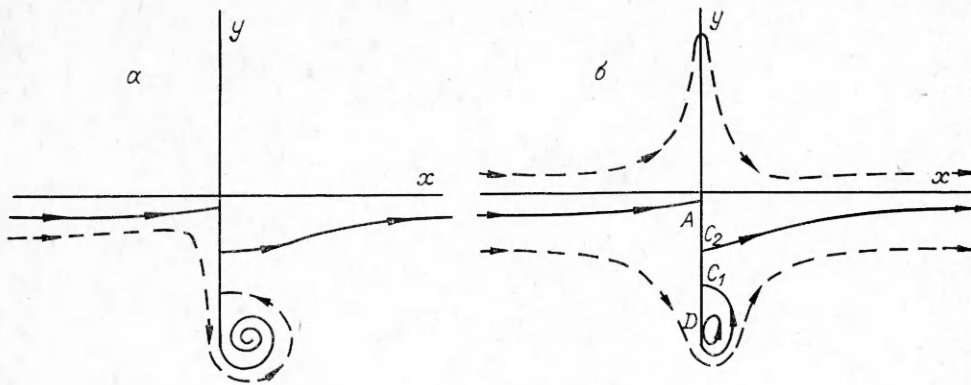
*В. С. Садовский, Г. И. Таганов*

*(Москва)*

Проблема возникновения циркуляционного обтекания крыла, начавшего движение с постоянной скоростью из состояния покоя в невязкой несжимаемой жидкости, получила первое количественное описание (в линейном приближении) более 60 лет тому назад в работе Вагнера [1], основанной на предположении Прандтля о сходе непрерывной вихревой пелены с задней острой кромки крыла. Проблема нестационарного обтекания в более общем случае движения крыла в связи с явлением флаттера привлекла около 50 лет тому назад внимание советских ученых М. В. Келдыша, М. А. Лаврентьева, А. И. Некрасова, Л. И. Седова, в большой мере способствовавших разработке существующей стандартной теории неустановившегося движения крыла в линейном приближении. О понимании трудностей нелинейной задачи, существовавшим 50 лет тому назад, свидетельствует их описание, принадлежащее Л. И. Седову [2], справедливое для точного описания течения и в настоящее время.

Поскольку точное описание течения связано с указанными трудностями, представляется разумным заменить точное описание схода вихревой пелены с задней кромки модельным описанием. В применении к задаче возникновения циркуляционного обтекания крыла, начавшего движение с постоянной скоростью из состояния покоя, в [3, 4] с помощью дипольной модели рассмотрено обтекание плоской пластины под углом атаки  $\alpha = 90^\circ$  в предположении, что обтекание передней кромки происходит без отрыва. Следует отметить, что поле диполя представляет собой не только предельное состояние системы источник — сток, но и предельное состояние (в направлении, перпендикулярном оси диполя) системы двух вихрей с циркуляциями скорости разного знака, поэтому дипольная модель для описания течений, содержащих области с замкнутыми линиями тока, может рассматриваться как вырождение классической модели Фёйшля в модель с вихрями бесконечно большой циркуляции, расположенными на поверхности тела.

В упомянутых работах обнаружено, что после достижения некоторого критического времени  $t_*$  линия тока, сходящая с задней кромки пластины, перестает быть линейной, замыкающей область с замкнутыми траекториями частиц, и высказано предположение о том, что при  $t > t_*$  происходит отсоединение этой области от пластины. Предполагалось также, что, спустя некоторое время, на задней кромке начинает образовываться новая область с замкнутыми траекториями частиц, размер которой возрастает до нового предельного значения при  $t = t_{**}$  и т. д.



Р и с. 1

Таким образом, процесс возникновения циркуляционного обтекания крыла в невязкой жидкости, обусловленный сходом вихревой пелены с задней кромки в модельном течении, представлялся не непрерывным, а состоящим из последовательного формирования и отсоединения дискретных областей жидкости с замкнутыми траекториями частиц, образованных дискретными участками вихревой пелены.

Ниже приводится дополнительная информация о дипольной модели при  $t = t_*$ , с ее помощью дана оценка циркуляции первого вихря, отошедшего от задней кромки пластины, а также исследована картина модельного течения после бифуркации диполя при  $t > t_*$ .

На рис. 1 представлена в системе координат, связанной с пластиной, мгновенная картина течения в момент времени  $t < t_*$  после начала движения для двух случаев описания течения: *a* — при точном описании, когда область с замкнутыми траекториями жидких частиц образована свертывающейся вихревой пеленой, сходящей с задней кромки пластины; *b* — при модельном описании аналогичная область образована диполем, расположенным в точке *D* на задней стороне пластины. При этом линия тока, приходящая из невозмущенного потока в критическую точку *A*, омывает всю поверхность пластины, является границей дипольной зоны и в точке  $C_2$  сходит с поверхности. На пластине располагаются критические точки *A*,  $C_1$ ,  $C_2$ .

При исследовании модельного течения, как и в [3, 4], будем исходить из квазистационарного характера течения и воспользуемся вспомогательной плоскостью  $\zeta$ , в которой область течения — внешность круга единичного радиуса. Положение диполя с моментом  $m$  на окружности зададим углом  $-\beta$ , а его ось направим по касательной к окружности в сторону точки  $\zeta = -i$ . Комплексный потенциал  $w$  безциркуляционного течения около круга с диполем и единичной скоростью на бесконечности имеет вид

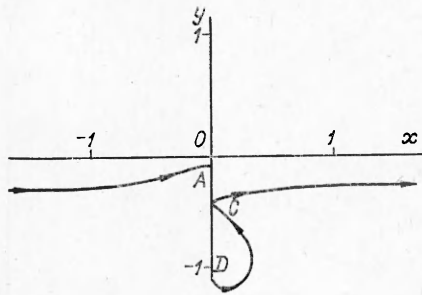
$$(1) \quad w(\zeta) = \zeta + \frac{1}{\zeta} - \frac{m}{2\pi} \frac{\exp \left[ -i \left( \frac{\pi}{2} + \beta \right) \right]}{\zeta - \exp(-i\beta)}.$$

Из условия  $dw/d\zeta(-i) = 0$ , необходимого для конечности скорости на острой кромке  $z = -i$  пластины в физической плоскости  $z = (1/2) \times (\zeta - 1/\zeta)$ , следует

$$(2) \quad m = 8\pi(1 - \sin \beta) \equiv 8\pi d$$

( $d$  — расстояние от нижней кромки до диполя вдоль пластины).

Зависимость критических точек на передней и задней стороне пластины от  $d$  при  $0 < d \leq 0,098$  исследована в [3, 4]. В начальный момент времени  $t = 0$  критические точки *A* и *C* располагаются в начале координат. При  $t > 0$  момент диполя  $m > 0$ , на задней стороне пластины образуется конечная дипольная зона с замкнутыми линиями тока, отделенная от внешнего потока линией тока, сходящей с острой кромки пластины  $z = -i$  и приходящей в точку  $C_2$  на ее задней стороне. В результате при



Р и с. 2

$d > 0$  на поверхности пластины имеются три критические точки —  $A$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ . С течением времени диполь движется вверх по пластине, размеры дипольной зоны увеличиваются, передняя критическая точка  $A$  перемещается вниз по пластине, в то время как точки  $C_1$  и  $C_2$  движутся навстречу друг другу. При  $t = t_*$  диполь достигает положения  $d_* = 0,098$  ( $\beta = 64,41^\circ$ ), а критические точки  $C_1$  и  $C_2$  сливаются в одну, расположенную на расстоянии  $s_* = 0,633$  от нижней кромки.

Эта предельная картина течения представлена на рис. 2. Ниже показано, что при дальнейшем продвижении диполя вверх по пластине критическая точка  $C$  отходит от нее и располагается в потоке, а картина течения обладает иной топологией, обусловленной бифуркацией диполя. Наличие такой качественной перестройки течения в дипольной модели может быть интерпретировано так, что на самом деле сформировавшаяся к моменту времени  $t = t_*$  дипольная зона с замкнутыми траекториями частиц при  $t > t_*$  полностью отсоединяется от пластины и в дальнейшем сносится вниз по потоку.

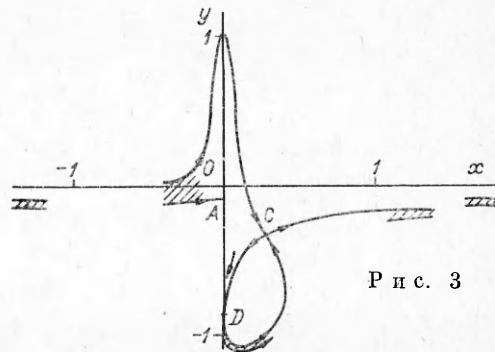
Если считать, что предлагаемая дипольная модель формирования области с замкнутыми траекториями частиц правильно отражает картину течения со свертывающейся вихревой пеленой, то предельная дипольная зона при  $d_* = 0,098$  дает возможность оценить циркуляцию  $\Gamma_1$  первого вихря, отошедшего от задней кромки, и, как следствие, циркуляцию  $-\Gamma_1$ , возникшую около пластины (присоединенный вихрь).

Предположим, что в момент отрыва дипольной зоны от пластины эта область заполнена покоящейся жидкостью (сам диполь необходим лишь для образования зоны). В таком случае ее жидкая граница становится вихревым слоем, суммарная интенсивность (циркуляция) которого легко определяется из (1) с учетом (2). Простой подсчет показывает, что для пластины с хордой, равной 2, в потоке с единичной скоростью на бесконечности  $\Gamma_1 = 1,612$ . Отождествляя эту величину с циркуляцией первой вихревой области (начальный вихрь), отделившейся от пластины, и сопоставляя ее с циркуляцией стационарного течения Жуковского около пластины  $\Gamma_\infty = 2$ , которая установится за бесконечное время после того, как след, состоящий из бесконечного числа убывающих по величине дискретных вихревых областей, удалится на бесконечное расстояние вниз по потоку, найдем  $\Gamma_1 = 0,2566 \Gamma_\infty$ .

Для площади, характеризующей содержащуюся в первой вихревой области массу жидкости, расчет дает  $F = 0,149$ , откуда средняя завихренность в ней  $\omega \approx \Gamma_1/F = 10,82$ .

Пусть диполь расположен на расстоянии  $d > d_*$  от нижней кромки пластины, что отвечает его угловому положению  $\beta < 64,41^\circ$  на окруж-

$d$	$y_1$	$x_2$	$y_2$
0,098	-0,072	0	-0,367
0,134	-0,094	0,297	-0,320
0,293	-0,188	0,667	-0,133
1,0	-0,544	1,115	0,772



Р и с. 3

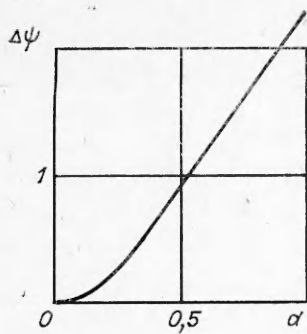


Рис. 4

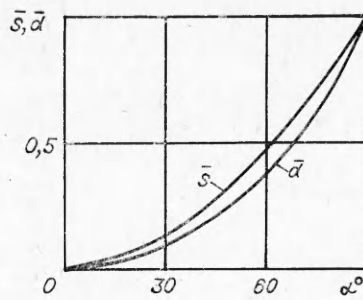


Рис. 5

ности в плоскости  $\zeta$ . С помощью (1), (2) для критических точек получается алгебраическое уравнение четвертой степени. Один из его корней очевиден:  $\zeta = -i$ . Численный анализ показывает, что при  $0 \leq \beta < 64,41^\circ$  еще один корень расположен на окружности, причем в третьем квадранте. Этот корень соответствует передней критической точке  $A$  на пластине. Оставшиеся два корня симметричны относительно окружности (т. е. только один из них находится в поле течения) и расположены в зависимости от  $\beta$  либо в четвертом, либо в первом квадранте.

На рис. 3 изображена расчетная картина характерных линий тока около пластины при  $d = 0,134$ , а в таблице приведены ордината  $y_1$  точки  $A$  и координаты  $x_2, y_2$  критической точки  $C$  в потоке для некоторых значений  $d$ .

Самым характерным для запредельной дипольной картины течения является то, что диполь как бы расщепляется: часть его мощности идет на создание замкнутой дипольной зоны (имеющей теперь с пластиной только одну общую точку  $D$ ), а оставшаяся часть расходуется на захват части жидкости  $q = \Delta\psi$  непосредственно из невозмущенного потока и выброса точно такого же количества в поток с другой стороны (на рис. 3 указанные струйки тока частично заштрихованы, явление расщепления есть бифуркация диполя). Зависимость захватываемого расхода  $\Delta\psi$  от положения диполя  $d$  представлена на рис. 4. Отметим, что поперечный размер захватываемой из невозмущенного потока струйки тока определяет порядок величины отхода от пластины отсоединенной части жидкости.

Приведенные выше количественные данные относятся к случаю обтекания пластины при  $\alpha = 90^\circ$ . Однако наличие до- и закритических режимов (а значит, и точки бифуркации) имеет место и при малых углах атаки, когда предположенное безотрывное обтекание передней кромки может быть реализовано при скруглении. В подтверждение этого на рис. 5 приведены зависимости расстояния от задней кромки пластины до диполя  $\bar{d}$  и критической точки  $\bar{s}$  в предельном случае (отнесенные к соответствующим величинам при  $\alpha = 90^\circ$ ) от  $\alpha$ . Следовательно, и при  $\alpha \neq 90^\circ$  сохраняется обнаруженная картина дискретного образования первого вихря (начального) при возникновении циркуляционного течения в невязкой несжимаемой жидкости.

Однако образование второго вихря на задней кромке пластины уже не может быть описано с помощью только дипольной модели. Для получения правильной картины течения около задней кромки после достижения точки бифуркации первого диполя надо иметь в виду, что отходящая от пластины часть жидкости действует на течение уже как вихрь с циркуляцией  $\Gamma_1$ . Это обстоятельство сильно осложняет модельное описание течения. Однако если предположить, что второй вихрь образуется только после того, как первый удалится достаточно далеко вниз по потоку, то дипольная модель позволяет получить оценку циркуляции второго вихря. Так, для пластины при  $\alpha = 90^\circ \Gamma_2 = 0,1631 \Gamma_\infty$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Wagner. Über die Entstehung des dynamischen Auftriebs von Tragflügeln // ZAMM.— 1925.— S. 17.
2. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики.— М.: Наука, 1966.
3. Таганов Г. И. Исследование трехмерных отрывных течений с помощью математической модели // Тр. ЦАГИ.— 1969.— Вып. 1173.
4. Taganov G. I. A mathematical model for a theoretical study of three-dimensional separated flows // Arch. mech. stosow.— 1970.— V. 22, N 2.

Поступила 10/IV 1987 г.

УДК 532.5

### СМЕЩЕНИЕ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ ПРИ ОБТЕКАНИИ ЦИЛИНДРА

И. С. Долина, С. А. Ермаков, Е. Н. Пелиновский  
(Горький)

Как известно, задача о потенциальном обтекании цилиндра потоком жидкости со свободной поверхностью сводится к интегральным уравнениям [1], точное решение которых неизвестно. На практике большое распространение получило приближение Лэмба [1], при котором цилиндр заменяется гидродинамическим диполем и задача решается в линейной постановке. Настоящая работа посвящена экспериментальной проверке приближения Лэмба и дальнейшему совершенствованию теории (учету непотенциальности обтекания).

Эксперимент проводился в лотке из оргстекла (150×50×18 см), в котором по горизонтальным направляющим с различными скоростями  $U$  (от 20 до 80 см/с) двигался цилиндр радиусом  $R = 1$  см. Полная глубина жидкости, как правило, в несколько раз превосходила глубину погружения цилиндра  $h$ , так что влияние дна было незначительным, числа Фруда  $Fr = U^2/gh$  не превышали 3. Профиль свободной поверхности исследовался по фотографиям с помощью масштабной сетки, нанесенной на боковую стенку ванны, а также для достаточно малых смещений (порядка и менее 1 мм) с помощью датчика проводимости.

Форма поверхности над цилиндром существенно зависит от  $Fr$ , вид ее при  $Fr = 2$  приведен на рис. 1. При  $Fr > 1$  над цилиндром образуется



Р и с. 1

пучность, максимум которой соответствует координате центра цилиндра, при понижении  $Fr$  ( $Fr < 1,2-1,3$ ) пучность уменьшается и смещается вперед. При малых  $Fr$  ( $Fr = 0,3-0,5$ ) пучности над телом вообще не наблюдается, уровень воды плавно понижается, переходя во впадину позади цилиндра. В области за цилиндром видна быстро затухающая (не более 1—2 периодов) поверхностная волна, распространяющаяся со скоростью  $U$ .

Приведем сначала известные сведения о генерации волны движущимся источником в приближении Лэмба. Смещение поверхности жидкости в линейной постановке определяется выражением [1]

$$(1) \quad \frac{\xi_h}{2R^2} = (1 + \tau^2 Fr^2)^{-1} - \int_0^{\infty} \frac{\sin t - Fr t \cos t}{t^2 Fr^2 + 1} e^{-\tau Fr t} dt + \frac{\xi_{\infty} h}{2R^2},$$