

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ ОПТИЧЕСКИХ ВОЛН

УДК 535.24; 535.6

# Анализ точности алгоритмов регистрации оптических вихрей

Ф.Ю. Канев, В.П. Аксенов, И.Д. Веретехин\*

*Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН  
634055, г. Томск, пл. Академика Зуева 1*

Поступила в редакцию 13.07.2020 г.

Рассмотрено применение четырех методов регистрации оптических вихрей в модельных задачах сингулярной оптики. Приведены вычислительные схемы, построение которых необходимо для программной реализации алгоритмов, указана входная информация, требуемая для работы компьютерных приложений. Особое внимание уделялось точности регистрации числа и координат особых точек волнового фронта. В зависимости от характеристик методов и объема входных данных были определены области (эксперимент или исключительно численное моделирование) их возможного использования.

*Ключевые слова:* оптические вихри, особые точки волнового фронта, локальные наклоны волнового фронта, датчик Шека–Гартмана; optical vortices, singular points of wavefront, local tilts of wavefront, Shack–Hartmann sensor.

### Введение

Вихревое излучение находит широкое применение в различных областях современной оптики. Достаточно часто пучок такого типа используется в качестве оптического пинцета, т.е. для перемещения объектов малых размеров [1–3]. Уникальные свойства излучения позволяют не только контролировать простые смещения микрочастиц и создавать оптические ловушки, но и выполнять более сложные операции, например, проводить оптическую сортировку, основанную на том, что траектории помещенных в лазерный пучок частиц зависят от их размера, формы, показателя преломления, а также от параметров волнового фронта. Для сортировки предлагается использовать излучение со сформированным специальным образом распределением фазы [4].

Еще одним активно развивающимся направлением сингулярной оптики является исследование возможности передачи информации вихревым пучком и в линиях оптической связи [5, 6]. Предполагается, что атмосферные искажения оказывают меньшее влияние на такую линию по сравнению с обычной, кроме того передаваемая информация имеет более высокую степень защиты от перехвата [6].

Отдельная область – использование вихрей в микроскопии. Как показано авторами [7], вихревой пучок позволяет в несколько раз увеличить разрешение сканирующего микроскопа, а в [8] предлагается применять излучение указанного типа для регистрации микросмещений частиц (смещений на несколько микрон).

Большое количество опубликованных к настоящему времени статей посвящено определению характеристик процессов и объектов с помощью излучения, включающего особые точки. Так, в распределении вихрей, сформированном при отражении, может содержаться информация о размерах неоднородностей шероховатой поверхности [9], форме и координатах физического тела [10] или о скорости протекания процесса [11] (авторы [11] определяли время высыхания краски).

Во многих из перечисленных здесь задач необходима регистрация числа и координат вихрей, а в последних трех примерах без получения точных данных о распределении особых точек реализации метода невозможна. Начиная с 1990-х гг. статьи, посвященные развитию алгоритмов регистрации, выходят достаточно регулярно [12–17]. Несмотря на большой объем опубликованных данных невозможно уверенно ответить на вопрос о том, какой метод обеспечивает требуемую точность регистрации, и определить, в каких случаях целесообразно использовать тот или иной подход.

Для решения указанной задачи было проведено исследование, результаты которого представлены в настоящей статье. В модельном эксперименте сравнивались четыре метода регистрации вихрей, определялась их предельная точность (точность в идеальных условиях), были отмечены области возможного применения.

## 1. Особенности построения распределенного компьютерного приложения

Используемая для численного решения задачи компьютерная модель строилась на основе СОМ-технологии (component object model, в русскоязычной

\* Федор Юрьевич Канев (kanev@iao.ru); Валерий Петрович Аксенов (avp@iao.ru); Игорь Дмитриевич Веретехин (aswer95@inbox.ru).

литературе — «модель распределенных объектов» [18, 19]). Схема соответствующего распределенного приложения, сформированная в архитектуре «клиент — сервер», приведена на рис. 1, а. В большинстве численных экспериментов клиентом была программа, моделирующая распространения вихревого излучения в неискажающей среде. При анализе метода, в котором регистрация осуществлялась по интерференционной картине, клиент был изменен, в него вводился второй пучок, необходимый для получения интерференции.

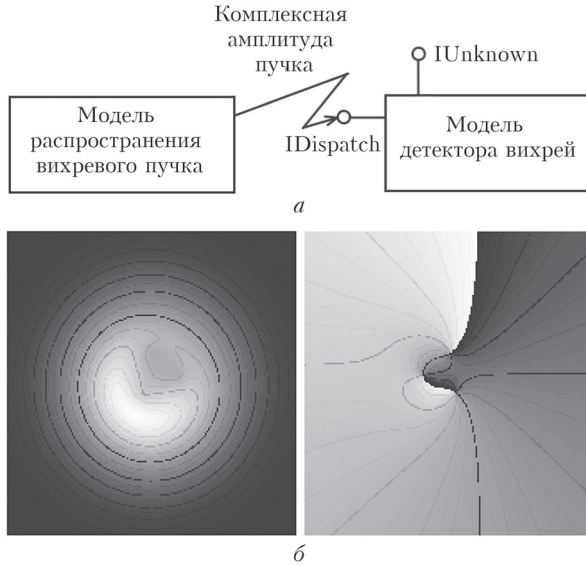


Рис. 1. Схематическое изображение распределенного компьютерного приложения (а) и распределение амплитуды и фазы, передаваемое через СОМ-интерфейс в модель детектора (б)

Структура приложения обеспечивала подключение различных серверов, в качестве которых использовались четыре модели детектора вихрей. Такой подход, во-первых, обеспечил одинаковые условия численного эксперимента при исследовании разных алгоритмов, во-вторых, позволил создать модель, имеющую потенциал для дальнейшего развития (исследования распространения при наличии искажений, пучки в турбулентной атмосфере и т.д.).

При задании граничных условий в плоскости источника излучения в волновой фронт пучка вводились особые точки на основе уравнения, заимствованного из [20]:

$$E(x, y) = \prod_{k=0}^K \prod_{n_k=1}^{N_k} [(x - x_{n_k}) + i(y - y_{n_k})]^k \times \prod_{n_k=1}^{N'_k} [(x - x_{n_k}) - i(y - y_{n_k})]^k \exp[-(x^2 + y^2)/a_0^2], \quad (1)$$

где  $x$  и  $y$  — текущие координаты в плоскости, перпендикулярной направлению распространения излучения;  $x_{n_k}$ ,  $y_{n_k}$  — координаты особых точек;  $N_k$  и  $N'_k$  — число вихрей с положительными и отрицательными топологическими зарядами соответственно;  $k$  — топологический заряд вихря, который может

изменяться в диапазоне от 0 до  $K$ ;  $a_0$  — начальный радиус пучка. Амплитудный и фазовый профили пучка, комплексная амплитуда которого задавалась согласно (1), показаны на рис. 1, б.

В выполненных численных экспериментах количество особых точек варьировалось, топологические заряды  $k$  задавались равными  $\pm 1$  (рассматривались вихри только первого порядка). Несмотря на то, что координаты  $x_{n_k}$ ,  $y_{n_k}$  задавались генератором случайных чисел, ограничение их интервала обеспечило размещение всех особых точек в области с меньшим радиусом, чем энергетический радиус пучка.

Четыре модели детектора особых точек (т.е. входящие в приложение серверы) строились на основе совершенно разных принципов. Общим было то, что в серверы через СОМ-интерфейс передавались одинаковые данные: рассчитанная в результате решения задачи свободной дифракции комплексная амплитуда (в одном из вариантов передавалась интерференционная картина), энергетический радиус и смещение энергетического центра пучка, а также координаты помещенных в пучок дислокаций.

Как отмечалось выше, во многих прикладных задачах сингулярной оптики [10, 11] необходимо определение координат и числа оптических вихрей в лазерном пучке, поэтому именно с этой точки зрения оценивалась точность работы алгоритмов. Точность характеризовалась отклонением числа и координат зарегистрированных дислокаций от соответствующих параметров особых точек, введенных в волновой фронт. Для этого в программе, моделирующей распространение излучения, рассчитывался один шаг свободной дифракции [21, 22], длина которого равнялась нулю. Нулевая длина трассы была выбрана для того, чтобы не допустить смещения вихрей, которое всегда присутствует при распространении пучка, в результате чего их координаты изменяются относительно заданных. Полученное в плоскости наблюдения распределение амплитуды и фазы показано на рис. 1, б. Визуальное сравнение полученного фазового распределения с начальным показало (рисунки не приводятся в статье), что в рассматриваемых условиях дополнительные особые точки не появляются в волновом фронте, а введенные дислокации не смещаются.

При анализе точности в программе-сервере каждому найденному вихрю ставился в соответствие заданный вихрь, а отклонение координат в паре находилось как

$$\Delta r_{\text{рег}}^{(j)} = \sqrt{(x_{\text{intr}}^{(j)} - x_{\text{рег}}^{(j)})^2 + (y_{\text{intr}}^{(j)} - y_{\text{рег}}^{(j)})^2},$$

(индекс intr (от introduced) обозначает параметры (здесь — координаты) введенной в волновой фронт особой точки; индекс reg (registered) — параметры зарегистрированного вихря;  $j$  — текущий номер пары, для которой было найдено соответствие). Определение соответствия означало, что, во-первых, найденный вихрь является ближайшим к заданному, во-вторых, расстояние между ними значительно меньше, чем радиус пучка (допустимое отклонение регулируется специально вводимым параметром).

Полное среднее отклонение вычислялось как

$$\langle \Delta r_{\text{reg}} \rangle = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \Delta r_{\text{reg}}^{(j)}, \quad (2)$$

где  $M$  — число пар вихрей, между которыми найдено соответствие. Каждая пара входит в сумму только один раз. Дислокации, для которых пара не найдена (обычно это означает, что число введенных вихрей не совпадает с числом зарегистрированных дислокаций), в суммировании не участвуют.

Полная модель несколько отличалась от рассмотренной выше только тогда, когда наличие особых точек и их координаты определялись по ветвлению полос интерференционной картины. При этом блок задания граничных условий не изменялся, но для формирования интерферограммы задавалась конечная (больше нуля) длина трассы распространения. При работе программы через СОМ-интерфейс передавалось полученное изображение (фактически массив чисел, задающих интенсивность интерферограммы в каждой точке).

Сервер модели (т.е. программа обработки интерференционной картины) мог работать и как независимое приложение (stand-alone application). В этом случае изображение в файле с расширением BMP считывалось программой, оцифровывалось, затем массив чисел обрабатывался специальным образом. Скорость определения вихрей уменьшалась, но появлялась возможность регистрировать дислокации не только в модельных задачах, но и в экспериментально полученных интерферограммах; именно с этой целью и было построено это программное приложение.

## 2. Алгоритм регистрации оптических вихрей как точек пересечения линий, сформированных нулевыми значениями мнимой и действительной частей комплексной амплитуды излучения

### 2.1. Последовательность операций в алгоритме

Краткое описание исследуемого метода содержится в [23, 24]. К сожалению, авторы указанных публикаций не анализировали точность алгоритма регистрации вихрей, построенного на его основе. В связи с этим мы посчитали возможным, во-первых, более детально рассмотреть основные операции, формирующие процедуру определения особых точек, во-вторых, исследовать точность алгоритма.

В настоящей статье работа численной модели иллюстрируется на примере пучка, в волновой фронт которого было введено 12 особых точек. Распределение дислокаций в плоскости апертуры источника задавалось генератором случайных чисел, параметры вихрей в плоскости регистрации находились согласно рассмотренной ниже методике.

Первая операция алгоритма — это определение координат точек, в которых равны нулю значения

числовых массивов модели, формирующих действительную и мнимую части комплексной амплитуды. При выполнении этой операции возникает проблема, связанная с сеточным заданием функций. Так, если для определения координат нуля используется равенство  $f(x_i, y_j) = 0$  ( $f(x_i, y_j)$  — действительная или мнимая часть комплексной амплитуды;  $x_i, y_j$  — координаты узла расчетной сетки;  $i, j$  — номер узла), то находится очень малое количество точек, удовлетворяющих этому условию, так как часть нулей заданной дискретно функции  $f(x_i, y_j)$  попадает между узлами. Можно отказаться от задания точного равенства и ввести некоторый интервал, при попадании в который значение функции считается равным нулю. Например, если  $-\epsilon \leq f(x_i, y_j) \leq \epsilon$ , то полагается, что  $f(x_i, y_j) = 0$ , но в этом случае неоднозначным является выбор  $\epsilon$ , а от величины этого параметра зависит число найденных точек.

Проблема решалась следующим образом. Был введен дополнительный массив, при задании которого полагалось, что формирующие его числа равны единице в узлах  $(x_i, y_j)$ , если  $f(x_i, y_j) > 0$ , и нулю, если  $f(x_i, y_j) \leq 0$ . Контур, ограничивающий область положительных значений определенной таким образом двумерной функции, находится достаточно просто, а образующие его точки приблизительно соответствуют  $f(x_i, y_j) = 0$ . Найденные таким образом нули действительной части амплитуды показаны на рис. 2, а, нули мнимой части — на рис. 2, б.

Для выделения точек использовалось четыре цвета, их выбор зависел от того, как изменялась функция  $f(x_i, y_j)$  при пересечении контура (т.е. при смещении в цикле программы в сторону увеличения  $X$  и  $Y$ ). Если наблюдалось изменение от положительных значений к отрицательным, вводились точки светло-серого цвета на распределении действительной части и темно-серого — на распределении мнимой. Если наоборот, от отрицательных к положительным, то использовались белые и черные точки. Выделение различных типов нулевых точек впоследствии позволило определить знак топологического заряда оптического вихря.

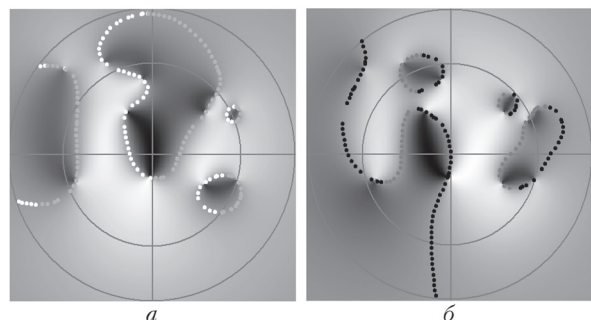


Рис. 2. Действительная (а) и мнимая (б) части комплексной амплитуды сингулярного волнового фронта; кружками показаны координаты точек, в которых значения соответствующих числовых массивов равны нулю

Вторая операция — это группировка найденных точек в линии. Фактически каждая линия формировалась из наиболее близко расположенных друг к другу нулей, но, так как расстояние между

ними неодинаковое (это видно на рис. 2), оказалось достаточно сложно сформулировать условие их объединения в линию. Поэтому вначале было сформировано несколько линий из точек, находящихся на приблизительно одинаковых расстояниях друг от друга, затем линии были объединены в одну. Объединение линий реализуется проще, так как их относительное расположение является более равномерным, чем расположение точек. Результат этой процедуры показан на рис. 3, *а*, где полученные линии нарисованы поверх фазового профиля пучка. Белые соответствуют нулям действительной части, черные – мнимой части комплексной амплитуды поля.

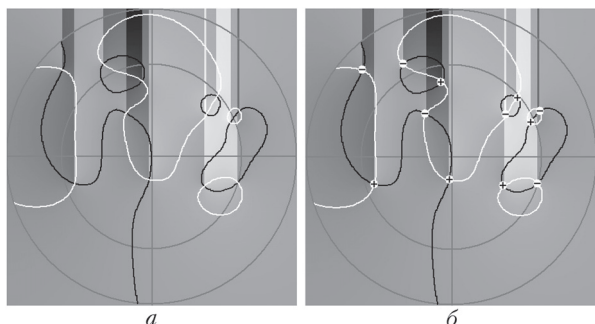


Рис. 3. Линии, получившиеся в результате группировки точек нулей (*а*); пересечение линий и найденные оптические вихри (*б*)

Точки пересечения линий определяют положения вихрей и позволяют найти их топологический заряд. Если обе пересекающиеся линии соответствуют изменению функций от отрицательных значений к положительным или наоборот, то найденная дислокация имеет положительный топологический заряд. Пересечение линий различной ориентации означает присутствие дислокации с отрицательным зарядом (рис. 3, *б*).

## 2.2. Точность определения числа и координат дислокаций

Работу алгоритма иллюстрирует рис. 4, где точками показано число вихрей  $N_{\text{reg}}$ , определенное детектором на различных реализациях  $N_R$  (всего 1000 реализаций) ансамбля случайных координат. В пучок было введено 20 дислокаций, вычисления проводились на расчетной сетке размерностью  $512 \times 512$  узлов, радиус пучка составлял  $1/5$  от размеров сетки, т.е. расстояние между узлами приблизительно равнялось  $0,01$  радиуса. Как будет показано в дальнейшем, от указанных параметров зависит точность регистрации.

Так как вероятность, для которой находился доверительный интервал на рис. 3, была выбрана равной 95%, ряд точек попал за его пределы. Результаты рассмотренного численного эксперимента показывают, что среднее число найденных вихрей очень близко к числу дислокаций, введенных в волновой фронт (20,1 и 20 соответственно), хотя на отдельных реализациях алгоритмом регистрируется от 18 до 22 особых точек. Вероятность превышения среднего приблизительно равна вероятности получить заниженные результаты.

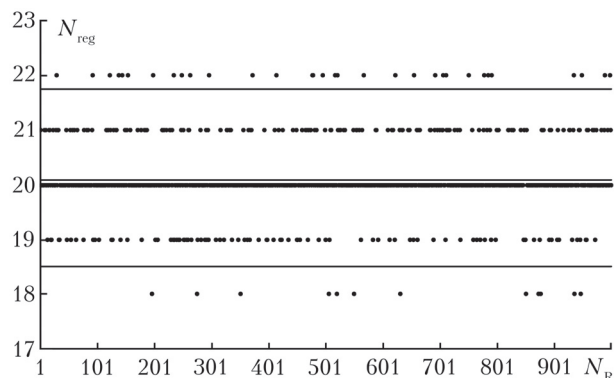


Рис. 4. Число вихрей (точки), зарегистрированное на различных реализациях случайного процесса задания их координат. В пучке 20 дислокаций, размерность расчетной сетки  $512 \times 512$ . Среднее число найденных особых точек и доверительный интервал (прямые линии)  $\langle N_{\text{reg}} \rangle = 20,1 \pm 1,7$ ; дисперсия результатов  $\sigma_N^2 = 0,41$

Данные, детально характеризующие алгоритм, приводятся на рис. 5 и 6: среднее число дислокаций  $\langle N_{\text{reg}} \rangle$  (рис. 5, *а*, *в*), определенных в результате детектирования, усредненное отклонение их координат  $\langle \Delta r_{\text{reg}} \rangle$  от заданных (рис. 5, *б*, *г*), а также дисперсия регистрации указанных параметров (рис. 6). Результаты были получены при варьировании числа особых точек и использовании расчетных сеток различной размерности. Усреднение проводилось по 1000 реализаций случайного распределения координат.

Анализ данных позволяет выделить несколько характерных особенностей алгоритма регистрации. Прежде всего, нужно сказать, что во всех вариантах решаемой задачи среднее число найденных особых точек было приблизительно равно числу введенных в пучок вихрей (рис. 5, *а*, *в*). Отличия здесь не превышают одного процента. Отметим также, что при увеличении числа дислокаций от 5 до 40 растут доверительный интервал и дисперсия. Так, для варианта, обеспечивающего наибольшую точность (сетка  $1024 \times 1024$ ), дисперсия возрастала от 0,020 до 0,44 (рис. 6, *а*). При использовании сеток меньшей размерности интервал и дисперсия еще увеличились, в частности, при размерности  $256 \times 256$  и 40 вихрях  $\sigma_N^2 = 3,87$ , т.е. почти в 9 раз больше относительно значения, полученного на сетке  $1024 \times 1024$ . Графики на рис. 6, *а* также показывают, что при увеличении числа  $\sigma_N^2$  вихрей на сетках малой размерности дисперсия возрастает немонотонно (рис. 6, *а*, кривая 1), испытывает значительные осцилляции.

Изменение погрешности регистрации координат вихрей в зависимости от их числа в волновом фронте и размерности сетки показано на рис. 5, *б*, *г* и рис. 6, *б*. Здесь мы наблюдаем приблизительно равенство расстояния между узлами сетки и среднего отклонения заданных координат от найденных (рис. 5).

Например, для сетки  $256 \times 256$  и 40 особых точек отклонение координат  $\langle \Delta r_{\text{reg}} \rangle / a_0 = 0,03$  при расстоянии между узлами  $D_x = 0,02$ , а для сетки  $1024 \times 1024$  – 0,006 и 0,005 соответственно. В то же

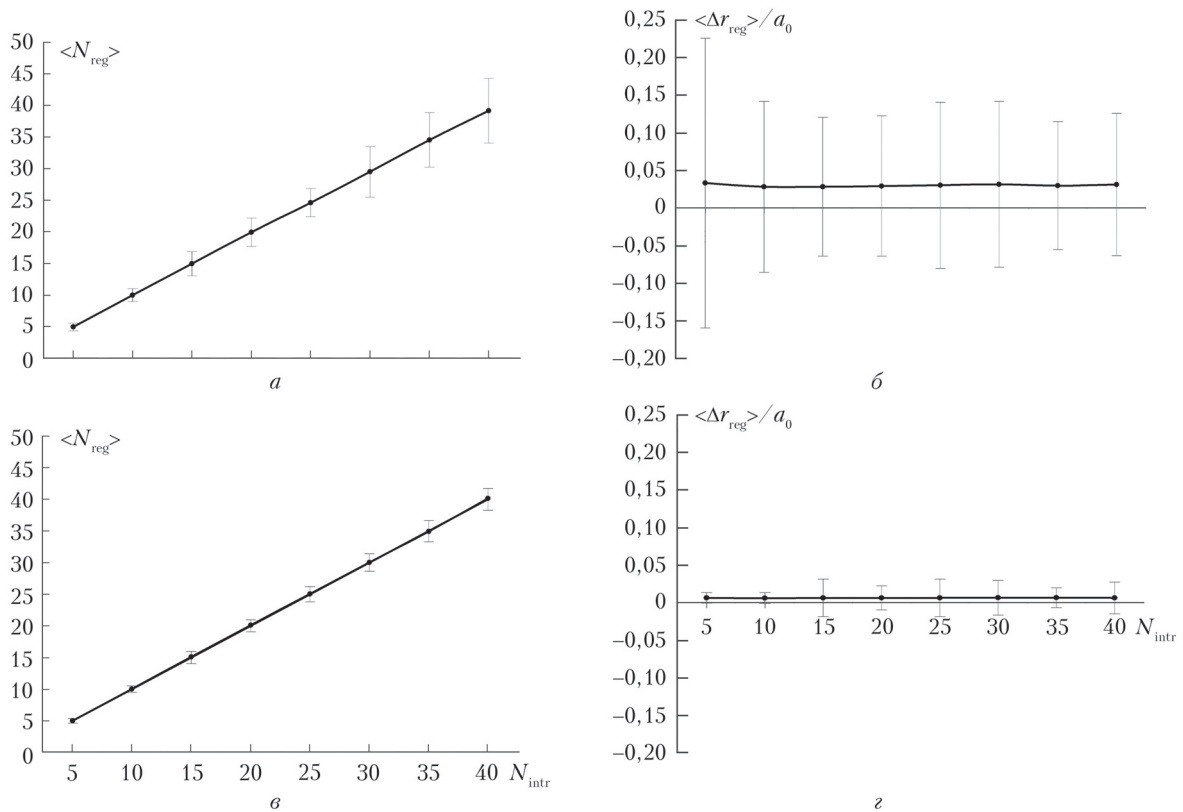


Рис. 5. Зависимость среднего числа зарегистрированных особых точек (*а, в*) и среднего отклонения координат особых точек (*б, г*) от числа введенных в волновой фронт дислокаций  $N_{\text{intr}}$ . Размерности расчетных сеток равны  $256 \times 256$  (*а, б*) и  $1024 \times 1024$  (*в, г*)

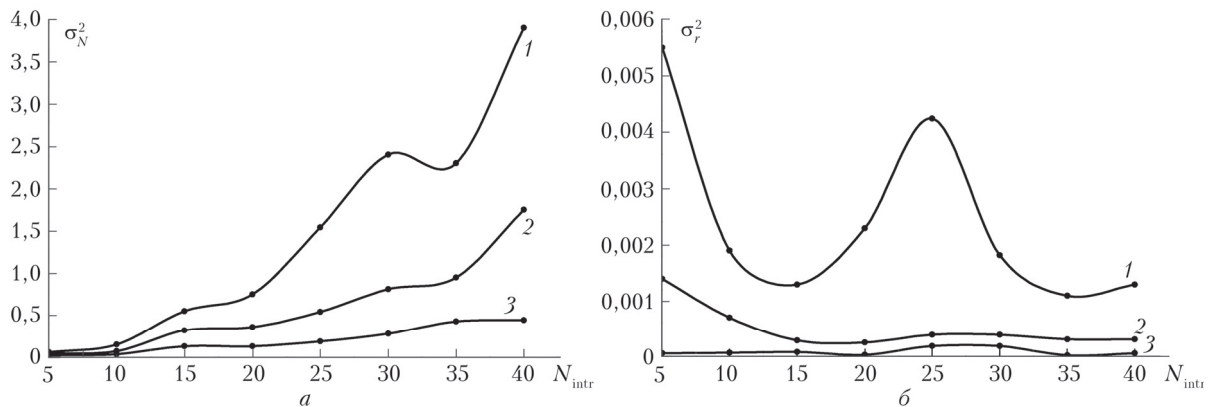


Рис. 6. Дисперсия регистрации числа  $\sigma_N^2$  (*а*) и координат  $\sigma_r^2$  (*б*) особых точек. Размерности расчетной сетки:  $256 \times 256$  (кривая 1);  $512 \times 512$  (кривая 2);  $1024 \times 1024$  (кривая 3)

время трудно объяснить поведение дисперсии измерений, которая испытывала колебания и уменьшалась при возрастании количества вихрей в пучке (рис. 6, б, кривые 1 и 2). Можно лишь предположить, что в этом случае модель детектора недостаточно точна.

### 2.3. Особенности работы алгоритма при введении ограничений на минимальное расстояние между особыми точками

В проведенном выше анализе точности алгоритма регистрации координаты особых точек (рис. 7, а)

задавались генератором, обеспечивающим равномерное распределение случайных чисел, поэтому вихри могли находиться на очень малых расстояниях друг от друга, в предельном случае — в соседних узлах сетки. В то же время во многих рассматриваемых в сингулярной оптике процессах, например при отражении излучения от шероховатой поверхности [24], пространственная частота вихрей (т.е. минимальное расстояние между ними) ограничена. Также можно ожидать, что вихри, возникающие в проходящих слой турбулентной атмосферы пучках, находятся на больших расстояниях, чем внутренний масштаб турбулентности. Поэтому,

предполагая, что алгоритм будет использоваться в модельных исследованиях распространения пучков в искажающей среде, целесообразно оценить точность его работы в случаях, когда минимальное расстояние между особыми точками не может быть меньше определенного значения. Других ограничений в случайный процесс генерации координат в настоящем разделе введено не было.

Пример распределения вихрей в указанных условиях (т.е. при наличии ограничений) приведен на рис. 7, б, отличия которого от рис. 7, а достаточно хорошо заметны.

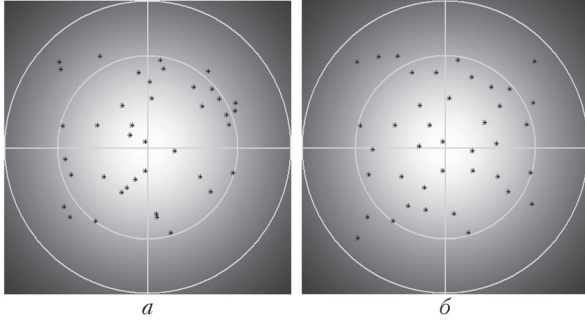


Рис. 7. Распределение введенных в волновой фронт пучка особых точек без ограничений на пространственную частоту случайного процесса (а) и при наличии ограничений (б). Во втором случае минимальное допустимое расстояние между вихрями  $\Delta_{\min}$  равно 0,2 начального радиуса пучка

Регистрация числа вихрей в указанных условиях показана на рис. 8, который является аналогом рис. 4. Как и ранее, в волновой фронт было

введено 20 особых точек, а отличие состояло в ограничении пространственной частоты случайного поля координат, которое было задано таким образом, что минимальное расстояние между вихрями составляло не менее 0,2 начального радиуса пучка (15 узлов расчетной сетки).

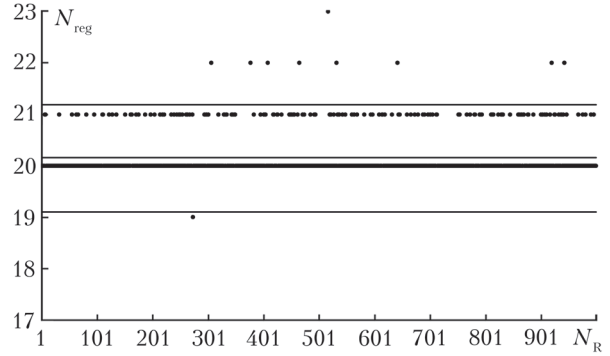


Рис. 8. То же, что и на рис. 4; минимальное расстояние между вихрями ограничено;  $\langle N_{\text{reg}} \rangle = 20,1 \pm 1,0$ ;  $\sigma_N^2 = 0,16$

Сравнивая рис. 4 и 8, видим, что, хотя среднее число найденных вихрей не изменилось, существенно (более чем в два раза) уменьшилась дисперсия результатов и соответствующим образом изменился доверительный интервал.

Уменьшение погрешности в регистрации вихрей при варьировании их числа в волновом фронте иллюстрируется на рис. 9 и 10; основное отличие от аналогичных рис. 5 и 6 здесь также заключается в уменьшении доверительного интервала и дисперсии

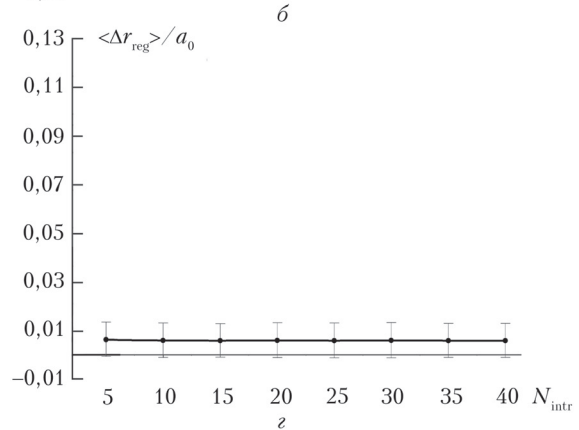
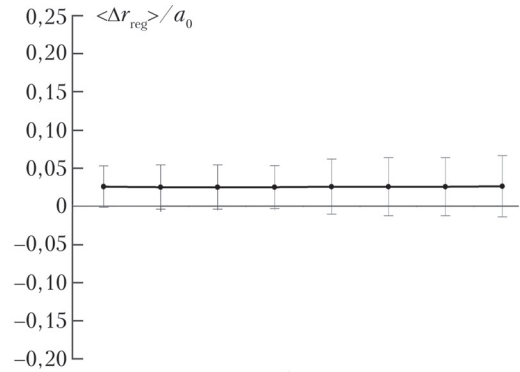
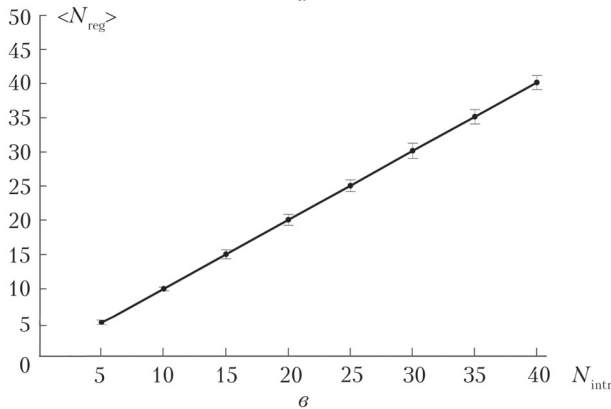
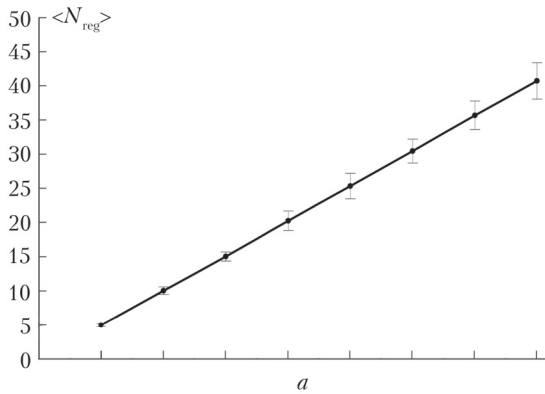


Рис. 9. То же, что на рис. 5. Размерности расчетных сеток равны  $256 \times 256$  при минимальном допустимом расстоянии между дислокациями  $\Delta_{\min} = 12$  (а, б) и  $1024 \times 1024$  при  $\Delta_{\min} = 20$  (в, г)

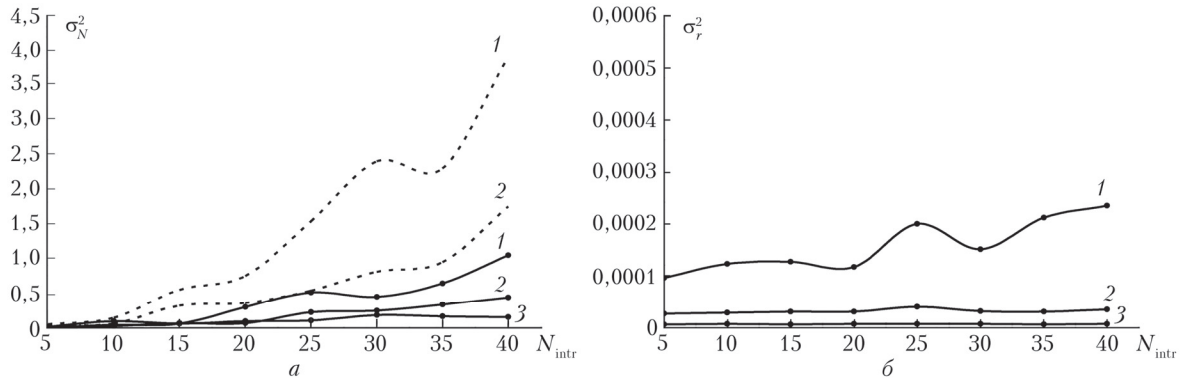


Рис. 10. Дисперсия регистрации числа (а) и координат (б) особых точек. Кривые 1 получены с использованием расчетной сетки размерностью  $256 \times 256$  при минимальном допустимом расстоянии между вихрями  $\Delta_{\min} = 12$ ; кривые 2 — для сетки  $512 \times 512$  и  $\Delta_{\min} = 15$ ; кривые 3 — для  $1024 \times 1024$  и  $\Delta_{\min} = 20$ . Точками отмечены кривые, соответствующие данным, наблюдаемым в численном эксперименте без ограничения расстояния между вводимыми в волновой фронт вихрями

результатов. Кроме того, изменения дисперсии и доверительного интервала более монотонны: оба параметра почти без осцилляций растут при увеличении числа вихрей на сетках размерностью  $256 \times 256$ ,  $512 \times 512$  и остаются практически без изменений, если размерность составляет  $1024 \times 1024$  узла.

В целом по результатам, представленным в разделе, можно сделать вывод, что рассмотренный алгоритм обладает удовлетворительной точностью определения числа и координат оптических вихрей, которая растет при увеличении размерности расчетной сетки и наличии ограничений пространственной частоты распределения особых точек.

### 3. Алгоритм регистрации оптических вихрей как точек окончания разрывов фазовой поверхности

#### 3.1. Описание алгоритма

В рассматриваемом алгоритме, в отличие от предыдущего, где особые точки определялись в результате обработки действительной и мнимой частей комплексной амплитуды поля, для регистрации вихрей применяется только один массив чисел, который содержит распределение фазового профиля пучка. Указанная особенность значительно упрощает программную реализацию алгоритма, которая включает всего две операции (рис. 11).

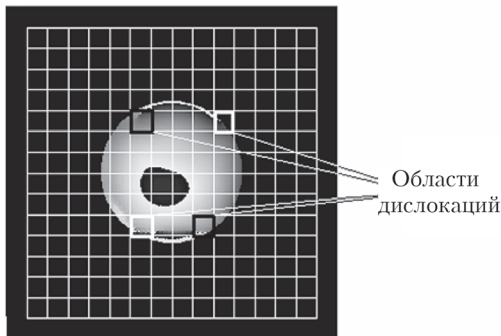


Рис. 11. Регистрация оптических вихрей как точек окончания разрывов фазовой поверхности

1. Фазовая поверхность разбивается на одинаковые квадратные ячейки. Для повышения точности проводится оптимизация их размеров. В вычислениях обычно используются ячейки со сторонами, состоящими из 4–6 узлов.

2. По периметру каждой из ячеек организован вычислительный цикл, в котором значение фазы в точке сравнивается с соответствующим значением в предыдущей точке. При изменениях фазы на  $\pm 2\pi n$ , где  $n$  — целое число, фиксируется разрыв. Если в контуре находится нечетное количество разрывов, полагается, что в пределах ячейки заключен оптический вихрь с топологическим зарядом, равным  $n$  (в настоящем исследовании анализ точности был выполнен только для дислокаций первого порядка, т.е. при  $n = 1$ ).

Нужно отметить, что величина разрывов всегда была немного меньше или немного больше  $2\pi$ . Это можно объяснить недостаточной точностью задания действительных чисел в компьютерной программе. Поэтому при отличии величины разрыва от  $6,2832$  менее чем на 5% мы полагали, что изменение фазы равно  $2\pi$ .

#### 3.2. Оценка точности алгоритма

Для характеристики точности ниже приводятся следующие данные: количество вихрей, зарегистрированных на отдельных реализациях (рис. 12); среднее число вихрей, определенное при равномерном

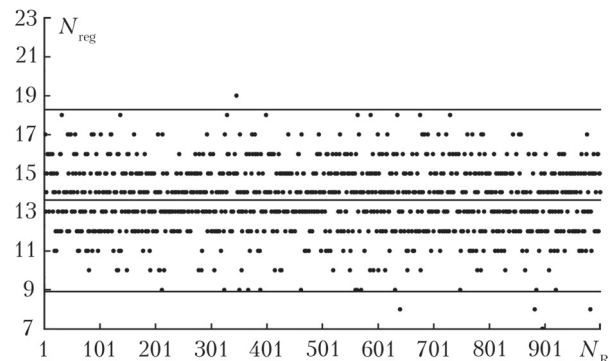


Рис. 12. То же, что и на рис. 4;  $\langle N_{\text{рег}} \rangle = 13,6 \pm 4,68$ ;  $\sigma_N^2 = 3,24$

распределении их координат в случайном процессе (рис. 13, *a, в*) и при наличии ограничений пространственной частоты задания координат (рис. 13, *б, г*); дисперсия регистрации числа вихрей (рис. 14).

В предыдущем разделе аналогичные результаты были приведены на рис. 4, 5, *в*; 6, *а*; 9, *в*. При сравнении рис. 4 и 12 видно, что если в первом случае лишь на отдельных реализациях число заданных вихрей (20) отличалось от их числа, определенного алгоритмом, то в настоящем примере ситуация кардинально меняется.

Во всех случаях алгоритм находит менее 20 особых точек. В результате уменьшается среднее число зарегистрированных дислокаций ( $\langle N_{\text{рег}} \rangle = 13,6$ ), увеличиваются доверительный интервал и дисперсия.

Аналогичные выводы можно сделать и на основе анализа зависимости погрешности от числа особых точек в волновом фронте (рис. 13). Видно, что зарегистрированное число дислокаций значительно меньше их реального числа в пучке. При 40 вихрях это отличие составляет 52% на расчетной сетке размером  $512 \times 512$  и 35% для сетки  $1024 \times 1024$

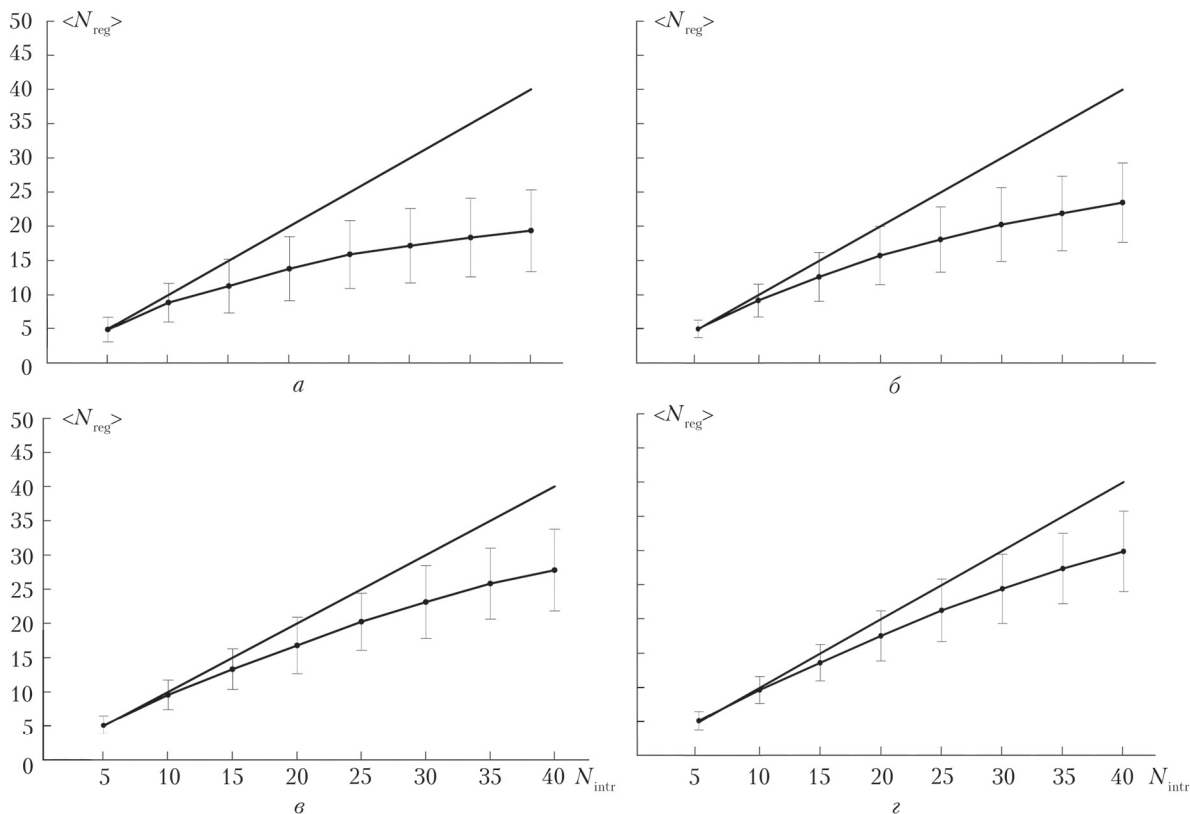


Рис. 13. Зависимость среднего числа зарегистрированных особых точек от числа введенных в волновой фронт дислокаций. Размеры расчетной сетки  $512 \times 512$  (*a, б*) и  $1024 \times 1024$  (*в, г*). Данные получены без ограничений пространственной частоты случайного процесса (*a, в*) и при минимальном расстоянии между вихрями, равном 0,2 начального радиуса пучка (*б, г*). Прямая линия – рассматриваемая зависимость при точном определении числа всех особых точек

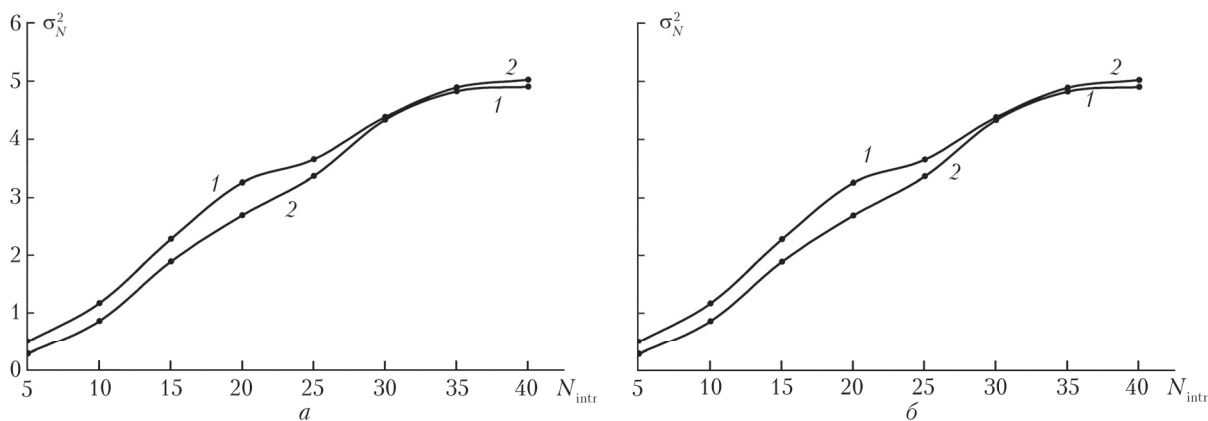


Рис. 14. Дисперсия регистрации числа особых точек на сетке размером  $512 \times 512$  (*a*) и  $1024 \times 1024$  (*б*). Кривая 1 получена при минимальном расстоянии между вихрями, равном 0,2 начального радиуса пучка, кривая 2 – без ограничений пространственной частоты случайного процесса задания координат вихрей



(см. рис. 13, а, в). Увеличение размерности численной модели или введение ограничений на пространственную частоту распределения не приводит к существенному уменьшению погрешности (см. рис. 13, б, з).

Значительно более высокой относительно предыдущего алгоритма является и дисперсия результатов, которая практически не изменяется при увеличении размерности или введении ограничений пространственной частоты задания координат (рис. 14).

В целом можно заключить, что в представленной программной реализации работа алгоритма является неудовлетворительной и его применение в задачах сингулярной оптики нецелесообразно.

## 4. Регистрация оптических вихрей на основе компьютерной обработки распределения градиентов волнового фронта

### 4.1. Описание алгоритма

Во многих опубликованных к настоящему времени статьях, например [25, 26], было показано, что регистрация особых точек также может быть выполнена при вычислении циркуляции  $\Gamma(\alpha)$  градиентов, или локальных наклонов волнового фронта  $\alpha(\mathbf{r}, z)$  пучка, т.е. интеграл

$$\Gamma(\alpha) = \oint_L \alpha(\mathbf{r}, z) d\mathbf{r} \quad (3)$$

должен быть равен  $\pm 2\pi$ , если в контуре интегрирования находится особая точка первого порядка,  $\pm 4\pi$  — если второго и т.д. В приведенном уравнении  $z$  — координатная ось, направление которой совпадает с направлением распространения пучка,  $\mathbf{r} = \{x, y\}$  задает координаты точек в плоскости перпендикулярной направлению распространения;  $L$  — контур интегрирования.

Для определения положения особых точек вся область распределения градиентов разбивается на прямоугольные ячейки, по периметру каждой из которых по формуле (3) вычисляется циркуляция градиентов. Если особая точка попадает в ячейку, то интеграл (3) принимает определенное значение, зависящее от топологического заряда вихря, именно по этому значению определяются наличие и порядок особой точки. Как и в предыдущем случае (т.е. при определении дислокаций по разрывам фазы), сторона ячейки формировалась 4–6 узлами расчетной сетки.

В численной модели градиенты волнового фронта вычислялись с помощью уравнения [26]:

$$\alpha(\mathbf{r}, z) = \frac{1}{2ikI(\mathbf{r}, z)} (E^* \nabla E - E \nabla E^*). \quad (4)$$

Здесь  $k$  — волновое число;  $I(\mathbf{r}, z)$  — интенсивность излучения;  $E(\mathbf{r}, z)$  — комплексная амплитуда поля.

Типичное распределение градиентов сингулярного волнового фронта на контуре интегрирования, вычисленное согласно (4), приведено на рис. 15.

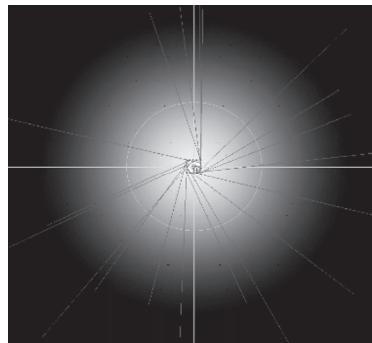


Рис. 15. Распределение градиентов волнового фронта на контуре интегрирования, используемом для вычисления циркуляции

При взгляде на рисунок создается впечатление, что там показаны векторы скорости движения частиц в вихре. Циркуляция градиентов в рассматриваемом примере равна  $2\pi$ , в контуре содержится особая точка первого порядка.

### 4.2. Оценка точности алгоритма

Точность оценивалась так же, как и для двух описанных выше алгоритмов. Визуальное представление о точности работы демонстрирует рис. 16, где отмечены найденные особые точки на каждой из 1000 реализаций случайного процесса задания их координат (в волновой фронт было введено 20 оптических вихрей).

Видно, что наибольшей является вероятность обнаружения именно 20 вихрей, хотя в отдельных реализациях регистрируется меньшее количество особых точек (17–19, иногда даже 16). Случаев, когда количество найденных вихрей было больше 20, отмечено не было. Это означает, что алгоритм имеет тенденцию к занижению числа вихрей.

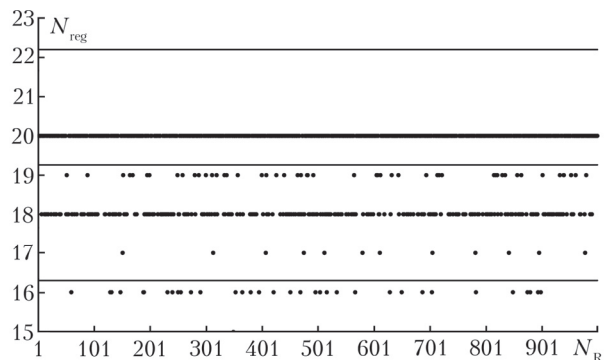


Рис. 16. То же, что и на рис. 4;  $\langle N_{\text{reg}} \rangle = 19,2 \pm 3,2$ ;  $\sigma_N^2 = 1,27$

Для двух рассмотренных выше алгоритмов аналогичные данные приведены на рис. 4 и 12. В первом случае дисперсия результатов и доверительный интервал существенно меньше, чем на рис. 16, во втором — значительно больше.

Зависимость числа зарегистрированных вихрей от числа особых точек, введенных в волновой фронт, представлена на рис. 17 без ограничений на пространственную частоту случайного поля заданных оптических вихрей и при наличии ограничений. Оба рисунка могут быть сопоставлены с соответствующими данными, рассмотренными выше (см. рис. 5, в; 9, в; 13, в, г).

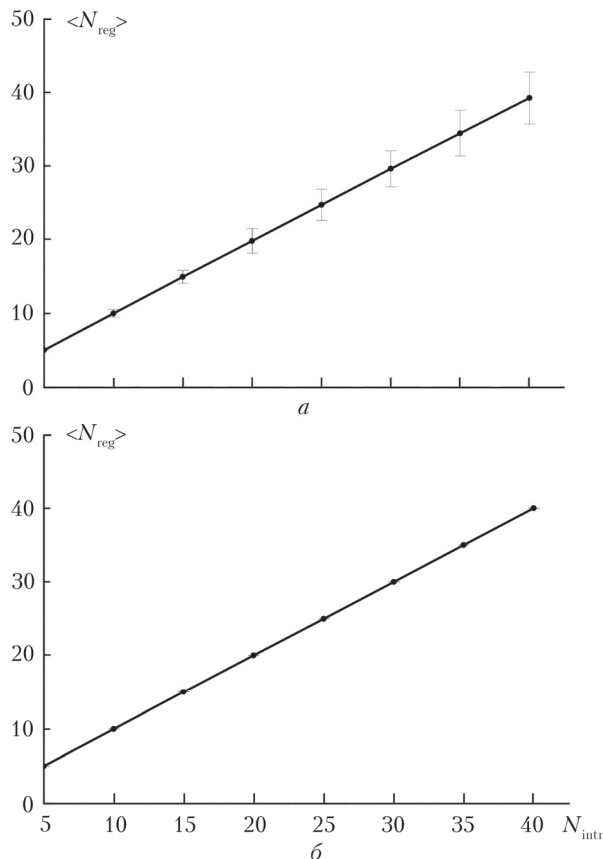


Рис. 17. Зависимость среднего числа зарегистрированных вихрей от числа вихрей, введенных в волновой фронт пучка. Размерность расчетной сетки  $1024 \times 1024$  узла. Данные получены без ограничений пространственной частоты задания координат задания координат ( $a$ ) и при минимальном расстоянии между вихрями, равном 0,2 начального радиуса пучка ( $б$ )

Характерной особенностью анализируемого алгоритма является абсолютно точная регистрация вихрей при введении ограничений на пространственную частоту: на рис. 17, б видно, что доверительный интервал во всех численных экспериментах равен нулю. Это означает, что при изменении числа введенных в волновой фронт дислокаций от 5 до 40 во всех реализациях были зарегистрированы все особые точки. Такой результат не наблюдался ни для одного из рассмотренных ранее методов, т.е. настоящий алгоритм обеспечивает наиболее высокую точность определения числа вихрей при условии, что расстояние между ними будет больше, чем 0,2 начального радиуса пучка (фактически больше, чем размер контура интегрирования).

Указанная особенность проявляется и при вычислении дисперсии результатов. Как и для двух предыдущих алгоритмов, дисперсия возрастает при увеличении числа вихрей (рис. 18), но только если не были введены ограничения на пространственную частоту задания координат особых точек. При введении ограничений дисперсия во всем диапазоне изменения числа вихрей равна нулю, поэтому соответствующей кривой нет на рис. 18.

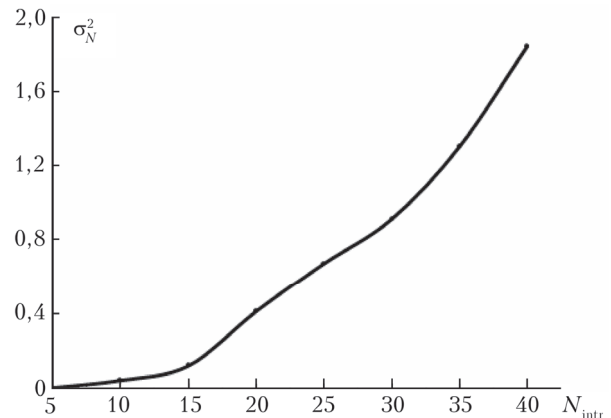


Рис. 18. Дисперсия погрешности регистрации числа дислокаций на сетке размерностью  $1024 \times 1024$ ; результаты получены без ограничений пространственной частоты случайного распределения координат вихрей

Приведенные данные позволяют сделать вывод, что наибольшую точность регистрации особых точек обеспечивает алгоритм, в котором дислокации находятся в результате обработки распределения градиентов волнового фронта излучения. При использовании расчетных сеток большой размерности (более 1000) и введении ограничений на пространственную частоту распределения вихрей возможно добиться абсолютной точности регистрации, если в волновом фронте излучения находится не более 40 особых точек.

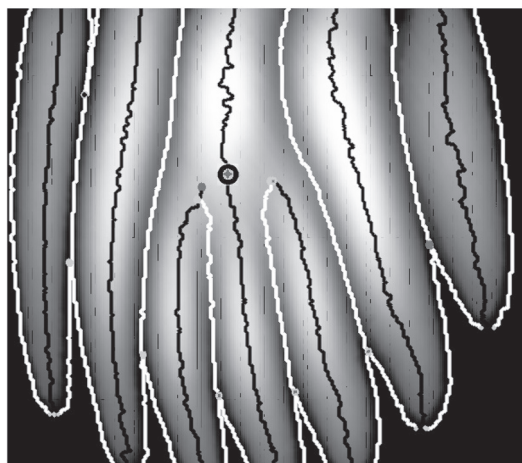
Отметим также, что качество работы рассмотренного здесь алгоритма значительно снижается, если для регистрации вихрей используются не градиенты волнового фронта, а локальные наклоны, измеренные датчиком Шека—Гартмана [25]. Это означает, что в экспериментальных исследованиях невозможно будет получить такие же высокие характеристики, какие были отмечены при численном моделировании.

## 5. Вихрь как точка ветвления полос интерференционной картины

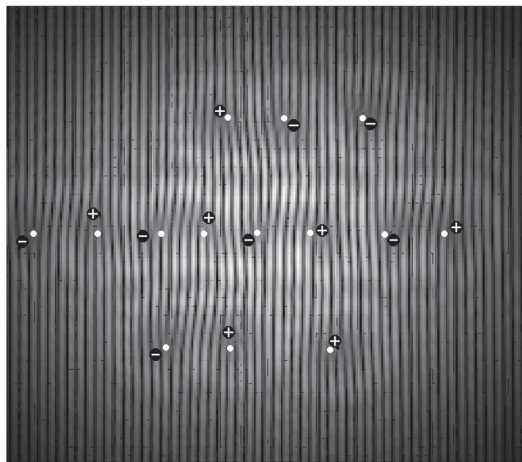
Для регистрации используется хорошо известное свойство лазерного пучка: при наличии в его волновом фронте оптических вихрей наблюдается ветвление полос интерференционной картины [27, 28]. Этот метод принципиально отличается от всех рассмотренных выше. Для определения параметров особых точек применяется интерферо-

грамма, т.е. распределение амплитуды излучения, поэтому дислокации могут быть найдены визуально, без привлечения каких-либо оптических приборов. Компьютерная обработка изображения целесообразна, если в волновом фронте есть несколько вихрей первого порядка, вихри высоких порядков либо при наличии искажений излучения [29]. Алгоритм обработки включает такие операции, как фильтрация изображения, скелетонизация интерферограммы, в результате которой интерференционные полосы преобразуются в линии максимумов и минимумов (рис. 19, *а*), и определение точки ветвления полос. Подробно алгоритм рассматривается в [29].

Несомненное достоинство метода — простота его применения, в том числе в реальных экспериментах, а основной недостаток — проблемы в использовании, возникающие при регистрации большого числа дислокаций или дислокаций, находящихся на малом расстоянии друг от друга. Так, максимальное количество особых точек, которое нам удалось зарегистрировать в численном эксперименте, составило 14, но достигнуто это было только при их равномерном распределении (рис. 19, *б*).



*а*



*б*

Рис. 19. Скелетонизация интерферограммы и регистрация особой точки с топологическим зарядом +2 (*а*); регистрация максимально возможного числа особых точек (*б*)

По результатам анализа довольно большого количества интерферограмм, полученных в численных и лабораторных экспериментах, мы сделали вывод, что минимальное расстояние между особыми точками должно быть не меньше, чем ширина 2-3 полос интерференционной картины, т.е. при использовании метода принципиально невозможно добиться высокого разрешения [26].

## Заключение

В настоящей статье рассмотрены четыре алгоритма определения параметров оптических вихрей в волновом фронте излучения, в которых вихри регистрируются как:

- 1) точки пересечения линий, сформированных нулевыми значениями массивов, содержащих действительную и мнимую части комплексной амплитуды;
- 2) точки окончания разрывов фазовой поверхности;
- 3) центры контуров, для которых циркуляция градиентов волнового фронта принимает определенное значение ( $\pm 2\pi n$ );
- 4) точки ветвления полос интерференционной картины.

Проведенный анализ позволил сделать следующие выводы.

В численных исследованиях целесообразно использовать алгоритмы 1 и 3, так как при решении модельных задач они обеспечивают наибольшую точность. От применения алгоритма 2 нужно отказаться (низкая точность) или радикально изменить его программную реализацию. Принципиально возможно включение в численную модель алгоритма 4, но из-за низкого разрешения его применение оправдано только в случаях, когда волновой фронт содержит небольшое (менее 10) число особых точек.

В экспериментальных исследованиях неприменимы алгоритмы 1 и 2, так как невозможно (или, во всяком случае, очень проблематично) получить информацию, требуемую для их реализации. Для экспериментального решения задач сингулярной оптики предназначены алгоритмы 3 и 4, но в первом случае в оптическую схему необходимо включить датчик Шека–Гартмана, что приводит к возрастанию сложности эксперимента и снижению точности исследований (разрешение датчика всегда ниже, чем разрешение численной модели). Во втором случае определение вихрей по интерферограмме возможно визуально и в результате компьютерной обработки изображения, но в обоих случаях разрешение, достигаемое при регистрации особых точек, будет невысоким.

Основная часть приводимых в статье данных получена в рамках государственного задания ИОА СО РАН. Моделирование алгоритмов и выполнение численных экспериментов, результаты которых приводятся в разд. 3 и 4, было проведено при финансовой поддержке РФФИ (грант № 20-19-00-597). Разработка использованных в настоящей статье численных моделей была выполнена в рамках государственного задания ИОА СО РАН.

1. Ng J., Lin Z., Chan C.T. Theory of optical trapping by an optical vortex beam // *Phys. Rev. Lett.* 2010. V. 104. P. 103601-1-4. DOI: 10.1103/PhysRevLett.104.103601.
2. Gahagan K.T., Swartzlander G.A.Jr. Optical vortex trapping of particles // *Opt. Lett.* 1996. V. 21, N 11. P. 827-829.
3. Gahagan K.T., Swartzlander G.A.Jr. Trapping of low-index microparticles in an optical vortex // *J. Opt. Soc. Am. B.* 1998. V. 15, N 2. P. 524-534.
4. Cheng-Shan Guo, Ya-Nan Yu, Zhengping Hong. Optical sorting using an array of optical vortices with fractional topological charge // *Opt. Commun.* 2010. V. 283. P. 1889-1893. DOI: 10.1016/j.optcom.2009.12.063.
5. Wu J., Li H., Li Y. Encoding information as orbital angular momentum states of light for wireless optical communications // *Opt. Eng.* 2007. V. 46, N 1. P. 019701-1-019701-5.
6. Gibson G., Courtial J., Padgett M.J., Vasnetsov M., Pas'ko V., Barnett S.M., Franke-Arnold S. Free-space information transfer using light beams carrying orbital angular momentum // *Opt. Express.* 2004. V. 12, N 22. P. 5448-5456.
7. Popiolek-Masajada A., Masajada J., Kurzynowski P. Analytical model of the optical vortex scanning microscope with a simple phase object // *Photonics.* 2017. V. 4, N 38. P. 1-14. DOI: 10.3390/photonics4020038.
8. Vadnjal A.L., Etchepareborda P., Federico A., Kaufmann G.H. Measurement of in-plane displacements using the phase singularities generated by directional wavelet transforms of speckle pattern images // *Appl. Opt.* 2013. V. 52, N 9. P. 1805-1813.
9. Passos M.H.M., Lemos M.R., Almeida S.R., Balthazar W.F., Da Silva L., Huguenin J.A.O. Speckle patterns produced by an optical vortex and its application to surface roughness measurements // *Appl. Opt.* 2017. V. 56, N 2. P. 330-335.
10. Wang W., Qiao Y., Ishijima R., Yokozeki T., Honda D., Matsuda A., Hanson S.G., Takeda M. Constellation of phase singularities in a specklelike pattern for optical vortex metrology applied to biological kinematic analysis // *Opt. Express.* 2008. V. 16, N 18. P. 13908-13917.
11. Li X., Tai Y., Zhang L., Li H., Li L. Characterization of dynamic random process using optical vortex metrology // *Appl. Phys. B.* 2014. V. 116. P. 901-909. DOI: 10.1007/s00340-014-5776-3.
12. Patorski K., Pokorski K. Examination of singular scalar light fields using wavelet processing of fork fringes // *Appl. Opt.* 2011. V. 50, N 5. P. 773-781.
13. Huang H., Luo J., Matsui Y., Toyoda H., Inoue T. Eight-connected contour method for accurate position detection of optical vortices using Shack-Hartmann wavefront sensor // *Opt. Eng.* 2015. V. 54, N 11. P. 111302-1-111302-7. DOI: 10.1117/1.OE.54.11.111302.
14. Chen M., Roux F.S. Dipole influence on Shack-Hartmann vortex detection in scintillated beams // *J. Opt. Soc. Am. A.* 2008. V. 25, N 5. P. 1084-1090.
15. Fried D.L. Branch point problem in adaptive optics // *J. Opt. Soc. Am. A.* 1998. V. 15, N 10. P. 2759-2767.
16. Sztul H.I. and Alfano R.R. Double-slit interference with Laguerre-Gaussian beams // *Opt. Lett.* 2006. V. 31, N 7. P. 999-1001.
17. Khajavi B., Ureta R.G., and Galvez E.J. Determining vortex-beam superpositions by shear interferometry // *Photonics.* 2018. V. 5, N 16. P. 1-12.
18. Оберг Р.Дж. *Технология СОМ+. Основы и программирование*: М.: Вильямс, 2000. 480 с.
19. Трельсен Э. *Модель СОМ и применение ATL 3.0*. СПб.: БХВ, 2000. 928 с.
20. Indebetouw G. Optical vortices their propagation // *J. Modern Opt.* 1993. V. 40, N 1. P. 73-87.
21. Лукин В.П., Фортес Б.В. *Адаптивное формирование пучков и изображений в атмосфере*. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. 212 с.
22. Кандидов В.П., Чесноков С.С., Шленов С.А. *Дискретное преобразование Фурье*. М.: Изд-во физического факультета МГУ, 2019. 88 с.
23. Angelsky O.V., Maksimyak A.P., Maksimyak P.P., Hanson S.G. Spatial behaviour of singularities in fractal and gaussian speckle fields // *Open Opt. J.* 2009. V. 3. P. 29-43.
24. Nye J.F. *Natural focusing and fine structure of light. Caustics and wave dislocations*. Bristol and Philadelphia: Institute of Physics Publishing 1999. 328 p.
25. Chen M., Roux F.S., Olivier J.C. Detection of phase singularities with a Shack-Hartmann wavefront sensor // *J. Opt. Soc. Am. A.* 2007. V. 24, N 7. P. 1994-2002.
26. Канев Ф.Ю., Аксенов В.П., Веретехин И.Д. Регистрация оптических вихрей датчиком Шека-Гартмана // *Вестн. РФФИ*. 2018. № 4. С. 8-10.
27. White A.G., Smith C.P., Heckenberg N.R., Rubinsztein-Dunlop H., McDuff R., Weiss C.O., Tamm C. Interferometric Measurements of phase singularities in the output of a visible laser // *J. Modern Opt.* 1991. V. 38, N 12. P. 2531-2541.
28. Denisenko V.G., Minovich A., Desyatnikov A.S., Krolikowski W., Soskin M.S., Kivshar Y.S. Mapping phases of singular scalar light fields // *Opt. Lett.* 2008. V. 33, N 1. P. 89-91.
29. Канев Ф.Ю., Аксенов В.П., Стариков Ф.А., Долгополов Ю.В., Копалкин А.В., Веретехин И.Д. Алгоритм определения топологических зарядов и числа оптических вихрей по ветвлению полос интерференционной картины // *Оптика атмосф. и океана*. 2019. Т. 32, № 8. С. 620-627.

*F.Yu. Kanev, V.P. Aksenov, I.D. Veretekhin. Precision of algorithms for detecting optical vortices.*

Application of four algorithms developed for detecting optical vortices in problems of singular optics is considered. Structure of numerical models and design of corresponding computational application are described; input parameters required for the model implementation are listed. Special attention is devoted to precision of vortex coordinates and number. Depending on these characteristic, suggestions are made for possible application of the algorithms: two of them can only be used in theoretical studies, while other two can be applied in real laboratory experiments.