

4. Толубинский В. И., Островский Ю. Н., Кривенко А. А. Теплообмен при кипении бинарных смесей. Тепло- и массоперенос. Т. 2. Минск, 1968, с. 211—218.
5. Гайдаров Ш. А. Рост пузырьков на поверхности нагрева при кипении смесей жидкостей. Тепло- и массообмен в химической технологии. Казань, 1973, вып. 1, с. 74—77.
6. Глухман А. А. Применение теории подобия к исследованию процессов тепло- и массообмена. М., 1967.
7. Кутателадзе С. С. и др. Некоторые проблемы гидродинамической теории теплообмена при кипении.— «Труды ЦКТИ. Котлотурбостроение». Л., 1965, вып. 58, с. 1—14.
8. Чернобыльский И. Н., Павличев М. Н. Исследование кризиса кипения растворов.— «Труды ЦКТИ. Котлотурбостроение». Л., 1965, вып. 58, с. 29—32.
9. Линард, Дир. Гидродинамический расчет максимального теплового потока при кипении в большом объеме на нагревателях конечных размеров. Теплопередача.— «Труды Америк. о-ва инженеров-механиков. Сер. С.», 1973, т. 95, № 2.

УДК 532.516:532.526:536.24

ОБТЕКАНИЕ И ТЕПЛОМАССООБМЕН СФЕРЫ СО ВДУВОМ ПРИ СРЕДНИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

М. В. Башкатов, С. И. Шабанов

(Новосибирск)

Проведено численное решение уравнений Навье — Стокса и тепломассообмена для сферы с равномерным вдувом по поверхности в области чисел Рейнольдса до 20. В обеих задачах предложен метод уточнения граничных условий вдали от сферы. При решении гидродинамической задачи использована разностная схема других авторов, а для тепловой — разработана явная разностная схема со вторым порядком аппроксимации.

Показано, что вдув уменьшает аэродинамическое сопротивление сферы и градиенты температур или концентраций у ее поверхности, т. е. интенсивность тепло- и массообмена.

В работах [1, 2] методом сращивания асимптотических разложений были получены аналитические решения задач об обтекании и тепломассообмене сферы с равномерным вдувом на поверхности при числах Рейнольдса и Пекле меньше единицы.

Данная работа преследует цель — получить решения тех же задач, но численными методами и при значениях критерия Re^* до 20, что представляет интерес для некоторых скоростных процессов, например для плазмохимической переработки распыленных материалов (здесь $Re^* = 2aU_\infty v^{-1}$; a — радиус сферы; U_∞ — скорость набегающего потока; v — коэффициент кинематической вязкости).

Считается, что вдуваемый газ имеет те же константы, что и набегающий газовый поток, и в окрестностях сферы не происходит химических или фазовых превращений. Влияние неизотермичности предполагается малым, поэтому допустимо независимое решение сначала гидродинамической задачи при изотермическом обтекании, а затем — тепловой.

Задача обтекания сводится к решению уравнений Навье — Стокса и сплошности, которые в безразмерном виде через функцию тока ψ и

вихрь $\xi = \text{rot } V$ можно выразить следующим образом:

$$D^2\psi = \xi r \sin \theta; \\ \frac{\text{Re}^*}{2} \left[\frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\xi}{r \sin \theta} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\xi}{r \sin \theta} \right) \right] \sin \theta = D^2(\xi r \sin \theta),$$

где

$$D^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \text{оператор Стокса}; r = \bar{r}/a -$$

— безразмерный радиус; $\theta = \pi$ — направление набегающего потока.
При этом

$$V_r = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta} / r^2 \sin \theta, \quad V_\theta = \frac{\partial \psi}{\partial r} / r \sin \theta,$$

где V_r и V_θ — безразмерные радиальная и тангенциальная составляющие скорости потока.

Для сферы со вдувом граничные условия на поверхности следующие:
при $r=1$ $V_r=k$; $V_\theta=0$

или

$$(1) \quad \psi = -k(1 - \cos \theta); \quad \xi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} / \sin \theta,$$

где $k=V_1/U_\infty$ — параметр вдува; V_1 — радиальная скорость вдува на поверхности сферы.

На оси симметрии справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \text{при } \theta = 0 \quad & V_\theta = 0; \quad \partial V_r / \partial \theta = 0; \quad \psi = 0; \quad \xi = 0; \\ \text{при } \theta = \pi \quad & V_\theta = 0; \quad \partial V_r / \partial \theta = 0; \quad \psi = -2k; \quad \xi = 0. \end{aligned}$$

В качестве граничных условий на бесконечном удалении от сферы обычно используются условия невозмущенного потока.

По-видимому, единственное численное решение гидродинамической задачи для сферы со вдувом при тех же допущениях имеется в [3]. Из этой работы и была заимствована явная разностная схема для расчета скоростей во всех точках поля, знание которых необходимо для решения тепловой задачи. Однако в методику решения было внесено уточнение.

Дело в том, что при численных расчетах невозможно задать $r \rightarrow \infty$. Поэтому в [3] принято, что условия невозмущенного потока имеют место уже на конечном, хотя и значительном радиусе A . Такое допущение предполагает выбор A очень большим, что увеличивает число узлов сетки по объему необходимых вычислений.

Для устранения указанных недостатков предлагается в качестве граничных условий на конечном радиусе A использовать полученное в [1] аналитическое решение для озеновской области

$$(2) \quad \begin{aligned} \psi &= \frac{A^2 \sin \theta}{2} - k(1 - \cos \theta) + \frac{4B}{\text{Re}^{*2}} (1 - \cos \theta) \times \\ &\times \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{A \text{Re}^*}{4} (1 + \cos \theta) \right] \right\}; \\ \xi &= \frac{B}{2A} \left(1 + \frac{4}{A \text{Re}^*} \right) \sin \theta \exp \left[-\frac{A \text{Re}^*}{4} (1 + \cos \theta) \right]. \end{aligned}$$

Здесь B — коэффициент, который в [1] находился путем спивки выражений (2) с решениями для пространства вблизи сферы.

Допустимо считать, что при средних числах Рейнольдса вдали от сферы, где возмущения значительно ослаблены, сохраняется такой же характер течения, т. е. уравнения (2) с точностью до коэффициента B выражают граничные условия на радиусе A .

Найти значения B можно с помощью известного интегрального соотношения

$$(3) \quad F_i = - \int_{\Omega} [L_i(V_j n_j) - \Pi_{ij}] d\Omega,$$

где F_i — сила аэродинамического сопротивления; L_i — i -компоненты импульса; V_j , n_j — соответственно j -компоненты скорости и нормали к Ω ; Π_{ij} — тензор напряжений.

Подстановка равенств (2) в (3) и интегрирование по бесконечно удаленной поверхности дает выражение

$$B = (k + C_f/8) Re^{*2}/4,$$

где $C_f = (C_1 + C_2)$ — коэффициент аэродинамического сопротивления сферы со вдувом, определяемый численным интегрированием сил трения (C_1) и сил давления (C_2) по поверхности сферы. Соответствующие составляющие вычислялись по уравнениям

$$(4) \quad C_1 = \frac{8}{Re^*} \int_0^{\pi} \xi \sin^2 \theta d\theta; \quad C_2 = 4 \int_0^{\pi} p \sin \theta \cos \theta d\theta,$$

причем давление p для каждого θ определялось по найденному закону распределения вихря по поверхности сферы

$$p = p_{\theta=0} + 1/2 \int_0^{\theta} \left\{ \frac{2}{Re^*} \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial r} \right) + \xi \right] - k\xi \right\}_{r=1} d\theta.$$

После определения поля скоростей решалась тепловая задача, т. е. уравнение теплового баланса, в следующем безразмерном виде:

$$(5) \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial h}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial h}{\partial \theta} \right) = \frac{Pe}{2} \left(V_r \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} \right).$$

Здесь $h = (T - T_\infty)/(T_a - T_\infty)$ — безразмерная температура (или концентрация); T_a — температура поверхности сферы; T_∞ — температура набегающего потока; $Pe = 2aU_\infty/D$; D — коэффициент температуропроводности.

Границные условия на поверхности сферы при $r=1$ $h=1$; в невозмущенном потоке при $r \rightarrow \infty$ $h=0$; на оси симметрии

$$(6) \quad dh/d\theta = 0.$$

Как и в задаче об обтекании, радиус отсчитывался в логарифмическом масштабе $Z = \ln r$ и уравнение (5) переходило в следующее:

$$(7) \quad \frac{\partial^2 h}{\partial Z^2} + \frac{\partial h}{\partial Z} + \frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \cdot \frac{\partial h}{\partial \theta} = \frac{Pe}{2} \left(V_Z \frac{\partial h}{\partial Z} + V_\theta \frac{\partial h}{\partial \theta} \right) \exp Z.$$

Как и в предыдущем случае, в качестве граничного условия на большом, но конечном радиусе A использовалось аналитическое решение,

полученное в [2] для этой области при малых значениях чисел Рейнольдса и Пекле

$$(8) \quad h = \frac{B_1}{r} \exp \left[-\frac{\text{Pe}}{4} r (1 + \cos \theta) \right].$$

Коэффициент B_1 может быть найден с помощью интегрального соотношения

$$(9) \quad \int_{\Omega_2} \left(\frac{\text{Pe}}{2} V_r h - \frac{\partial h}{\partial r} \right)_{r=A} d\Omega_2 - \int_{\Omega_1} \left(\frac{\text{Pe}}{2} V_r h - \frac{\partial h}{\partial r} \right)_{r=1} d\Omega_1 = 0,$$

которое отражает тот факт, что в газовом объеме без источников при уставновившемся режиме поток энтальпии через сферическую поверхность Ω_2 с радиусом A равен ее потоку, отходящему от твердой поверхности сферы Ω_1 .

Подставив в (9) условия (1), (6) и (8) и приняв в первом приближении на радиусе A условие невозмущенного потока $V_r \approx -\cos \theta$, получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left\{ -\frac{B_1 \text{Pe}}{2r} \cos \theta \exp \left[-\frac{\text{Pe}}{4} r (1 + \cos \theta) \right] - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{B_1}{r} \times \right. \right. \\ & \times \exp \left[-\frac{\text{Pe}}{4} r (1 + \cos \theta) \right] \left. \right)_{r \rightarrow \infty} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi - \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\text{Pe} k}{2r} - \frac{\partial h}{\partial r} \right)_{r=1} \times \\ & \times \sin \theta d\theta d\varphi = 2\pi (2B_1 - \text{Pe} k - \text{Nu}) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$(10) \quad B_1 = \frac{\text{Pe} k + \text{Nu}}{2}, \quad \text{где} \quad \text{Nu} = - \int_0^\pi \left(\frac{\partial h}{\partial r} \right)_{r=1} \sin \theta d\theta.$$

Выражение (8) со значением B_1 согласно (10) принималось в качестве более точного граничного условия на радиусе A , причем критерий Нуссельта (Nu) находился численным интегрированием по поверхности сферы и уточнялся при каждой итерации.

Численные решения гидродинамической и тепловой задач проводились с использованием одной и той же сетки. Для тепловой задачи применялась явная разностная схема со вторым порядком аппроксимации, аналогичная использованной в гидродинамической задаче. Если по направлению $Z = \ln r$ величину шага и его номер обозначить через ζ и i , а по углу θ через ϑ и j , то разностное уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} & h[i+1, j] \left[\frac{4 + \zeta (2 - \text{Pe} V_Z[i, j] \exp Z[i])}{4\zeta^2} \right] + \\ & + h[i-1, j] \left[\frac{4 - \zeta (2 - \text{Pe} V_Z[i, j] \exp Z[i])}{4\zeta^2} \right] + \\ & + h[i, j+1] \left[\frac{4 + \vartheta (2 \operatorname{ctg} \theta[j] - \text{Pe} V_Z[i, j] \exp Z[i])}{4\vartheta^2} \right] + \\ & + h[i, j-1] \left[\frac{4 - \vartheta (2 \operatorname{ctg} \theta[j] - \text{Pe} V_Z[i, j] \exp Z[i])}{4\vartheta^2} \right] - \\ & - h[i, j] \left[\frac{2}{\zeta^2} - \frac{2}{\vartheta^2} \right] = 0. \end{aligned}$$

Уравнение (7) для оси симметрии как при $\theta=0$, так и при $\theta=\pi$ с учетом (6) после раскрытия получающейся в нем неопределенности приобретает вид

$$\frac{\partial^2 h}{\partial Z^2} + \frac{\partial h}{\partial Z} + 2 \frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} = \frac{Pe}{2} V_Z \frac{\partial h}{\partial Z} \exp Z.$$

Выразив приращение h с помощью ряда Тейлора, можно граничное условие на оси симметрии со вторым порядком аппроксимации представить для $\theta=0$ следующим образом:

$$\begin{aligned} h[i, 0] \left(1 + \frac{\vartheta^2}{2\xi^2}\right) - h[i, 1] - h[i+1, 0] \{4 + \xi(2 - \right. \\ \left. - Pe V_Z [i, 0] \exp Z[i])\} \frac{\vartheta^2}{16\xi^2} - h[i-1, 0] \{4 - \xi(2 - \right. \\ \left. - Pe V_Z [i, 0] \exp Z[i])\} \frac{\vartheta^2}{16\xi^2} = 0. \end{aligned}$$

Для $\theta=\pi$, когда $j=m$, уравнение имеет тот же вид, но с заменой индекса j на m вместо нуля и на $m-1$ вместо 1.

Численное решение всех уравнений проводилось с помощью ЭВМ. Шаг сетки ϑ по углу θ составлял 6° , по $Z=\ln r$ выбирался $\xi=0,1$, причем было принято, что $\ln A=3$ ($A \approx 20$). Задавались значения Re^* и k , и гидродинамическая задача решалась первой. При $k=0$ за начальное приближение принималось известное решение Стокса и методом итераций уточнялись ψ и ξ . Каждое полученное решение использовалось для определения начального приближения при следующем значении k по соотношениям, вытекающим из [1]

$$\psi_n \approx \psi_{n-1} - (k_{n-1} - k_n)(1 - \cos \theta), \quad \xi_n \approx \xi_{n-1}.$$

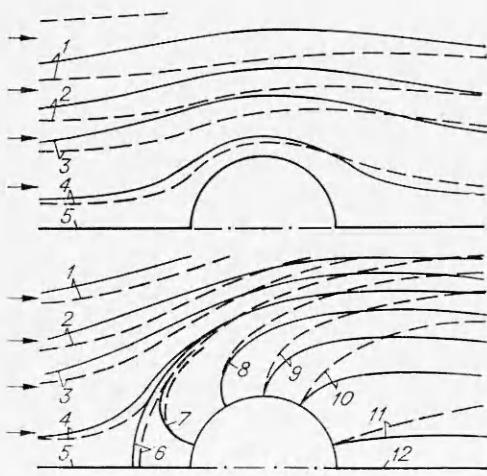
Выбор итерационного параметра при каждом значении Re^* производился в соответствии с [4]. Решение разностных схем велось по методу Зейделя [5]. Уточнение ψ , ξ и h , а также C_f и Nu заканчивалось, когда разность значений первых трех функций в последовательных итерациях становилась меньше 10^{-4} .

После определения поля скоростей при данных Re^* и k решение тепловой задачи повторялось для шести значений критерия Прандтля $S=v/D$, начиная от 0,5 до 1 через 0,1.

За начальное приближение при $k=0$ принималось поле температур в неподвижной среде, когда $h=0$ на радиусе A

$$h = \frac{1}{A-1} \left(\frac{A}{r} - 1 \right).$$

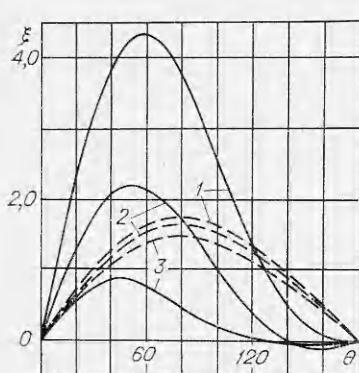
Найденное поле температур принималось за начальную аппроксимацию для следующего k . Параметр вдува k варьировался во внутреннем цикле от 0 до 1 через 0,2, а во внешнем цикле Re^* принимал значения 1; 5; 10; 15 и 20.



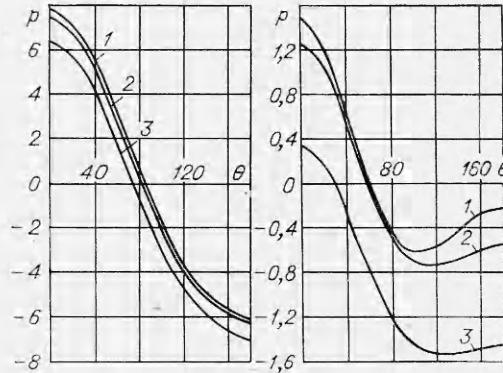
Фиг. 1

На фиг. 1 вверху изображены линии тока при $k=0$, а внизу — при $k=1$ для $Re^*=1$ (сплошные линии) $Re^*=20$ (штриховые); кривым 1—5 соответствуют $\psi=2; 1; 0,5; 0,05; 0$, а кривым 6—12 — значения $\psi=0; -0,05; -0,5; -1; -1,5; -1,95$ и -2 . Сравнение графиков показывает, как сильно вдув деформирует поле скоростей, оттесняя набегающий поток от твердой поверхности до линии тока $\psi=0$.

Фиг. 2 иллюстрирует распределение вихря по поверхности сферы для $Re^*=1$ (штриховые) и $Re^*=20$ (сплошные линии). Кривым 1—3 соответствуют $k=0; 0,4$ и 1 . Фиг. 3, на которой использованы те же обозначения, показывает распределение давления по поверхности сферы (слева $Re^*=1$, справа $Re^*=20$).



Фиг. 2



Фиг. 3

В табл. 1 указана зависимость коэффициента аэродинамического сопротивления сферы со вдувом от Re^* и k . В последнем столбце даны значения, вычисленные на основе аналитического решения [1]:

$$(11) \quad C_1 = \frac{16}{Re^*} \left(1 + \frac{3}{16} Re^* - \frac{3k}{16} Re^* \right);$$

$$(12) \quad C_2 = \frac{8}{Re^*} \left(1 + \frac{3}{16} Re^* - \frac{k}{16} Re^* \right).$$

Хорошее соответствие данных в первом и последнем столбцах свидетельствует об удовлетворительной точности численного решения и о возможности использования уравнений (11), (12) до $Re^*=1$.

Из (4), (11) следует, что C_1 при всех значениях Re^* уменьшается с ростом k . Физически это объясняется снижением градиента скорости у поверхности сферы (фиг. 1) и уменьшением завихренности (фиг. 2). Слагающееся C_2 при малых Re^* тоже уменьшается по мере возрастания k , поскольку давление на лобовую полусферу при этом снижается больше, чем на кормовую. Однако при больших Re^* оттеснение набегающего потока ветром вдува настолько велико, что восстановление давления за кормой происходит значительно хуже. Поэтому с ростом k , как показывает фиг. 3, давление на лобовую полусферу хотя и снижается, но меньше, чем на кормовую, и составляющая C_2 возрастает. Тем не менее в исследованной области возрастание C_2 еще невелико и вполне компенсируется снижением C_1 , в результате чего величина C_f монотонно убывает с увеличением k .

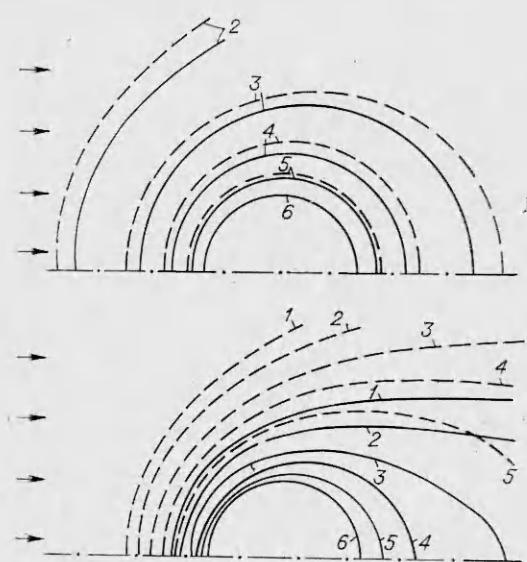
Таблица 1

Параметры	κ	Re*					
		1	5	10	15	20	1 по [1]
C_1	0	18,366	4,741	2,823	2,148	1,739	19,0
		9,434	2,402	1,482	1,142	0,954	9,5
		27,500	7,143	4,305	3,260	2,693	28,5
C_1	0,2	17,715	4,137	2,225	1,529	1,160	18,4
		9,054	2,391	1,500	1,187	1,028	9,4
		26,766	6,528	3,725	2,717	2,188	27,8
C_1	0,4	17,130	3,601	1,745	1,098	0,772	17,8
		8,978	2,363	1,503	1,212	1,071	9,3
		26,408	5,964	3,248	2,310	1,843	27,1
C_1	0,6	16,560	3,132	1,369	0,795	0,527	17,2
		8,915	2,333	1,495	1,223	1,093	9,2
		25,475	5,465	2,864	2,018	1,620	26,4
C_1	0,8	16,007	2,722	1,080	0,589	0,378	16,6
		8,831	2,303	1,484	1,224	1,102	9,1
		24,838	5,025	2,564	1,813	1,480	25,7
C_1	1,0	15,471	2,370	0,862	0,452	0,287	16,0
		8,758	2,269	1,469	1,224	1,103	9,0
		24,229	4,639	2,331	1,676	1,390	25,0

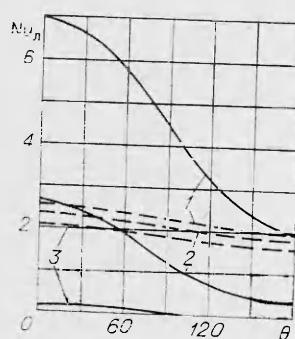
На фиг. 4 изображено поле температур вокруг сферы в случае $S=1$ для $Re^*=1$ (наверху) и $Re^*=20$ (внизу) при $k=0$ (сплошные линии) и $k=1$ (штриховые). Кривые 2—6 относятся к значениям h от 0,2 до 1,0 через 0,2, а 1 — к значению $h=0,4$.

Видно, что подобно линиям тока изотермы тоже «оттесняются» от сферы, вследствие чего уменьшается градиент температур или концентраций, особенно в корме. Соответственно уменьшаются и локальные критерии Нуссельта, распределение которых вдоль поверхности сферы представлено на фиг. 5 (здесь $S=1$, штриховые линии относятся к $Re^*=1$, сплошные — к $Re^*=20$; кривым 1—3 соответствуют $k=0; 0,4; 1,0$).

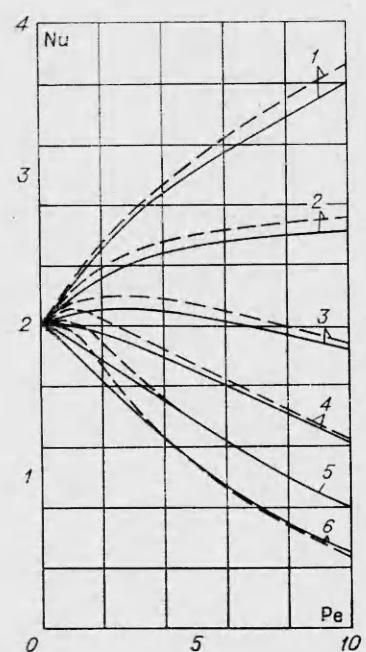
Усредненные значения критерия Нуссельта (10) тоже уменьшаются при возрастании k , что видно из фиг. 6, где показано его изменение в зависимости от Re при $S=0,5$ (штриховые) и $S=1,0$ (сплошные линии). Кривым 1—6 соответствуют значения k от 0 до 1,0 через 0,2. В принятых координатах Nu сравнительно слабо зависит от критерия Прандтля, по крайней мере при больших Re и k . В координатах Nu— Re^* зависимость от S сильней, что можно проследить по табл. 2, в которой приведены более подробные и точные данные о зависимости усредненного Nu от Re^* , k и S .



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

Т а б л и ц а

S	k	Re*					h	Re*				
		1	5	10	15	20		1	5	10	15	20
0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1,0	0	2,148	2,666	3,100	3,438	3,725	0,6	2,076	1,977	1,730	1,477	1,242
		2,174	2,730	3,214	3,583	3,893		2,046	1,901	1,617	1,333	1,079
		2,200	2,811	3,325	3,716	4,044		2,019	1,845	1,518	1,204	0,936
		2,229	2,883	3,425	3,836	4,181		2,008	1,795	1,423	1,085	0,812
		2,256	2,950	3,517	3,947	4,306		2,004	1,745	1,332	0,976	0,704
		2,282	3,012	3,595	4,050	4,422		2,000	1,695	1,252	0,878	0,611
0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1,0	0,2	2,133	2,460	2,596	2,674	2,709	0,8	2,032	1,766	1,382	1,050	0,782
		2,125	2,437	2,595	2,666	2,688		1,995	1,667	1,240	0,888	0,621
		2,136	2,457	2,613	2,666	2,668		1,964	1,586	1,115	0,750	0,493
		2,152	2,480	2,622	2,656	2,640		1,948	1,511	1,001	0,632	0,390
		2,168	2,499	2,625	2,641	2,606		1,926	1,440	0,897	0,533	0,309
		2,184	2,515	2,627	2,621	2,569		1,919	1,370	0,800	0,448	0,245
0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1,0	0,4	2,109	2,202	2,435	2,017	1,879	1,0	1,997	1,572	1,088	0,725	0,471
		2,083	2,156	2,067	1,922	1,758		1,945	1,453	0,932	0,568	0,337
		2,075	2,135	2,011	1,834	1,645		1,907	1,352	0,798	0,444	0,240
		2,079	2,117	1,956	1,749	1,536		1,876	1,260	0,682	0,347	0,170
		2,085	2,097	1,901	1,664	1,432		1,851	1,173	0,582	0,270	0,120
		2,091	2,076	1,846	1,581	1,334		1,829	1,091	0,496	0,210	0,086

ЛИТЕРАТУРА

- Башкатов М. В., Шабанов С. И. Обтекание сферы с поперечным потоком вещества при малых числах Рейнольдса.— ПМТФ, 1972, № 3.
- Башкатов М. В., Шабанов С. И. Теплообмен сферы со вдувом при медленном обтекании.— ПМТФ, 1972, № 4.
- Hamielec A. E., Hoffman T. W., Ross L. L. Numerical solution of the Navier — Stokes equation for flow past spheres. Pt. 1.— «A. I. Ch. E. Journal», 1967, vol. 13, N 2.
- Le Clair B. P., Hamielec A. E., Pruppacher H. R. A numerical study of the drag on a sphere at low and intermediate Reynolds numbers.— «J. Atmos. Sciens», 1970, vol. 27, N 2.
- Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. 2, М., Физматгиз, 1962.