

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ПОЛНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ  
СВЕРХЗВУКОВОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

С. А. Гапонов, А. А. Маслов

(Новосибирск)

Предлагается метод численного решения задачи о полной стабилизации сверхзвукового пограничного слоя. Показано, что при значительном охлаждении поверхности кривая нейтральной устойчивости расщепляется на две кривые.

Проведен расчет температур полной стабилизации для обеих нейтральных кривых. Сравнение результатов данной работы с асимптотическими расчетами показало, что после  $M = 2$  ( $M$  — число Маха) асимптотический метод дает неверные результаты.

1. В работе Лиза [1] впервые было показано, что с помощью интенсивного охлаждения можно обеспечить полную устойчивость сверхзвукового ламинарного пограничного слоя по отношению к двумерным малым возмущениям. Расчеты критических значений температур поверхности, необходимых для полной стабилизации пограничного слоя на плоской пластине, с использованием асимптотического метода были проведены в работах [2-6]. Численное решение задачи о полной стабилизации авторам не известно.

При формулировке асимптотического метода, применяемого во всех упомянутых выше работах, требовалось, чтобы параметр разложения  $\varepsilon = (\alpha R)^{-1/2}$ , где  $\alpha$  — волновое число возмущения,  $R$  — число Рейнольдса, был мал по сравнению с единицей. Однако в диапазоне чисел Маха  $M$  от 2 до 6  $\varepsilon$  меняется от 0.34 до 0.47, т. е. не является малым. Поэтому результаты, полученные в этих работах для  $M > 2$ , могут оказаться неправильными.

В данной работе предлагается метод численного решения задачи о полной стабилизации сверхзвукового пограничного слоя, свободный от каких-либо ограничений на величину  $\alpha R$ .

2. Из асимптотических формул Лиза [1], справедливых в случае больших сверхзвуковых чисел Маха, можно показать, что на верхней и нижней асимптотах кривой нейтральной устойчивости значения  $\alpha R$  стремятся к конечным и разным пределам. При уменьшении температуры поверхности значение критического числа Рейнольдса  $R^*$  увеличивается, а ветви нейтральной кривой сближаются, уменьшая область неустойчивости. При достижении некоторой критической температуры поверхности  $T_w^*$  верхняя и нижняя ветви кривой нейтральной устойчивости сливаются, а значения  $\alpha R$  на них совпадают. Тогда в плоскости  $(T_w, \alpha R)$  должна существовать кривая значений  $\alpha R$  на асимптотах, минимальное значение  $T_w$  на которой должно давать температуру полной стабилизации  $T_w^*$ . При температурах, меньших  $T_w^*$ , в ламинарном пограничном слое вязкого теплопроводного газа не могут существовать нейтральные или неустойчивые дозвуковые возмущения [1]. Для построения кривой значений  $\alpha R$  на асимптотах в данной работе использовалась система уравнений Дана и Лина [4]. Так как на асимптотах можно принять

$$\alpha = 0, R = \infty, \alpha R = \text{const} \quad [1]$$

то система Дана и Линя примет вид

$$\begin{aligned} \rho^\circ [i(U^\circ - c)u + U_y^\circ v] + \frac{iP}{\gamma M^2} &= \frac{\mu}{\alpha R} u_{yy} & (1) \\ P_y &= 0 \\ i(U^\circ - c)\rho + \rho_y^\circ v + \rho^\circ (iu + v_y) &= 0 \\ \rho^\circ [i(U^\circ - c)\theta + T_y^\circ v] + (\gamma - 1)(iu + v_y) &= \frac{\gamma \mu}{\sigma \alpha R} \theta_{yy} \\ \frac{P}{P^\circ} &= \frac{\theta}{T^\circ} - \frac{\rho}{\rho^\circ} \end{aligned}$$

Здесь  $U^\circ$ ,  $\rho^\circ$ ,  $T^\circ$  — осредненные по времени скорость, плотность и температура,  $u$ ,  $\alpha v$ ,  $\rho$ ,  $\theta$ ,  $P$  — возмущения продольной и поперечной скоростей, плотности, температуры и давления,  $y$  — расстояние по нормали к поверхности, нижний индекс  $y$  означает дифференцирование,  $\gamma$  — постоянная адиабаты,  $M$  — число Маха,  $\sigma$  — число Прандтля,  $\mu$  — вязкость,  $R$  — число Рейнольдса,  $\alpha$  — волновое число возмущения,  $c = c_r + ic_i$  — фазовая скорость возмущения (на асимптотах  $c = 1 - M^{-1}$ ). Предполагается, что зависимость возмущений от продольной координаты  $x$  и времени имеет вид  $\exp i\alpha(x - ct)$ . Аналогичный предельный переход для расчета значений  $\alpha R$  на асимптотах кривой нейтральной устойчивости для течения несжимаемой жидкости использовался в работе [7].

Граничные условия для системы (1) можно взять в виде

$$u(0) = v(0) < \theta_y(0) = 0 \quad (2)$$

$u$ ,  $v$ ,  $\theta$  ограничены при  $y \rightarrow \infty$ . По-видимому, более правильным граничным условием на возмущения температуры следует считать  $\theta(0) = 0$ . Выбор граничного условия  $\theta_y(0) = 0$  объясняется тем, что этот случай наиболее хорошо изучен с помощью асимптотических методов. А это позволяет провести детальное сравнение результатов и наиболее правильно дать заключение о применимости асимптотических методов.

Введением переменных

$$z_1 = u, \quad z_2 = u_y, \quad z_3 = v, \quad z_4 = P/\gamma M^2, \quad z_5 = \theta, \quad z_6 = \theta_y$$

система (1) сводится к системе шести уравнений первого порядка

$$z_{iy} = \sum_{j=1}^6 G_{ij} z_j, \quad (i = 1, \dots, 6) \quad (3)$$

с граничными условиями

$$z_1(0) = z_3(0) = z_6(0) = 0 \quad (4)$$

$z_1$ ,  $z_3$ ,  $z_5$  ограничены при  $y \rightarrow \infty$ .

Вне пограничного слоя коэффициенты системы постоянны, и решение имеет вид

$$z_i = \sum_{j=1}^6 C_j A_i^{(j)} e^{\lambda_j y}$$

где  $\lambda$  принимает следующие значения:

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{i\alpha R/M}, \quad \lambda_{3,4} = \pm \sqrt{i\alpha R\sigma/M}, \quad \lambda_{5,6} = 0$$

Так как решения с  $\lambda_1$  и  $\lambda_3$  не удовлетворяют граничным условиям на бесконечности,  $C_1$  и  $C_3$  должны быть тождественно равны нулю. Собствен-

ные векторы  $A^{(2)}$  и  $A^{(4)}$  имеют по три не нулевые компоненты

$$\begin{aligned} A_1^{(2)} &= 1, & A_2^{(2)} &= \lambda_2, & A_3^{(2)} &= -i/\lambda_2 \\ A_3^{(4)} &= i/M, & A_5^{(4)} &= \lambda_4, & A_6^{(4)} &= \lambda_4^2 \end{aligned} \quad (5)$$

Собственные векторы, соответствующие  $\lambda_5$  и  $\lambda_6$ , удобно сложить

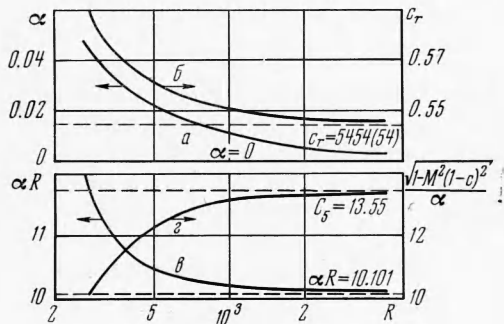
$$\begin{aligned} A_1^{(6)} &= -M, & A_2^{(6)} &= A_6^{(6)} = 0 \\ A_3^{(6)} &= C_5, & A_4^{(6)} &= 1, & A_5^{(6)} &= (\gamma - 1)M^2 \end{aligned} \quad (6)$$

Сравнивая решение системы (3) на границе пограничного слоя (5) и (6) с решениями полной системы уравнений устойчивости для  $y = \delta$  ( $\delta$  — толщина пограничного слоя) при  $\alpha = 0$ ,  $c = 1 - M^{-1}$  [8] можно видеть, что

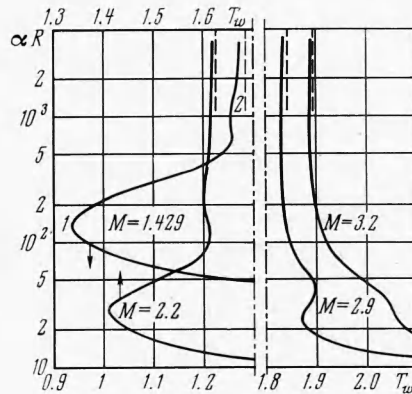
$$C_5 = \lim_{\alpha \rightarrow 0, c \rightarrow 1 - M^{-1}} \frac{\sqrt{1 - M^2(1 - c)^2}}{\alpha}$$

Существование такого предела было показано при асимптотическом решении задачи о полной стабилизации [9].

Каждый из трех векторов  $A^{(i)}$  использовался в качестве начальных данных при численном интегрировании системы (3) от внешней границы



Фиг. 1



Фиг. 2

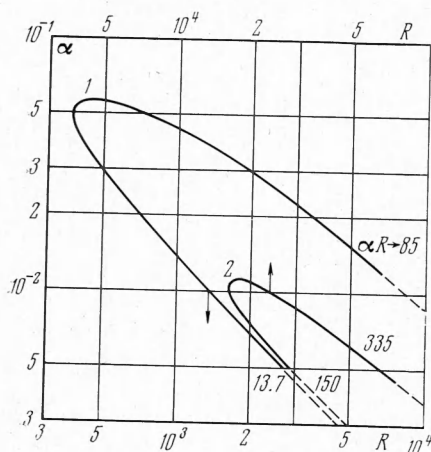
пограничного слоя к стенке. В том случае, если параметр при старшей производной  $(\alpha R)^{-1}$  становился мал, при численном интегрировании использовался метод ортогонализации С. К. Годунова [10]. В процессе счета подбирались такие значения  $\alpha R$ ,  $T_w$  и  $C_5$ , чтобы при фиксированном  $M$  удовлетворить однородным граничным условиям на поверхности пластины [11].

3. При расчетах принималось  $\sigma = 0.75$ ,  $\gamma = 1.4$ ,  $\mu = T^\circ$ . Для определения  $U^\circ$ ,  $T^\circ$  и  $\rho^\circ$  — распределения скорости, температуры и плотности основного течения — совместно с системой (3) численно интегрировались уравнения ламинарного пограничного слоя на плоской пластине.

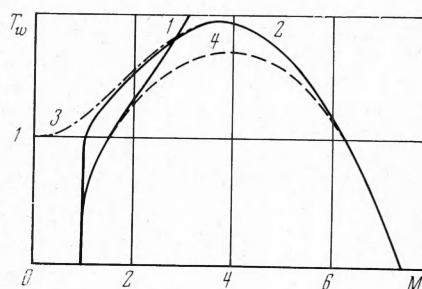
На фиг. 1, а приведена нижняя ветвь кривой нейтральной устойчивости для  $M = 2.2$ ,  $T_w = 1.82$  и показано поведение  $c_r$  (фиг. 1, б),  $\alpha R$  (фиг. 1, в) и  $\sqrt{1 - M^2(1 - c)^2} / \alpha$  (фиг. 1, г) с увеличением числа  $R$ . Предельные значения  $\alpha R$  и  $\sqrt{1 - M^2(1 - c)^2} / \alpha$  получены при численном интегрировании системы (1).

Кривые значений  $\alpha R$  на асимптотах в зависимости от температуры поверхности для разных чисел Маха приведены на фиг. 2. Для  $M = 1.429$  и  $2.2$  существует область температур, в которой каждому значению  $T_w$  соответствуют четыре значения  $\alpha R$ , а значит, возможны две кривые нейтральной устойчивости. Обе эти кривые были рассчитаны для системы Дана и Лия при  $M = 2.2$ ,  $T_w = 1.606$  (фиг. 3). При температуре поверхности, которой соответствуют три значения  $\alpha R$ , эти кривые сливаются в одну.

С уменьшением температуры поверхности вторая кривая 2 очень быстро исчезает. Первая нейтральная кривая 1 продолжает еще существовать в не-



Фиг. 3



Фиг. 4

котором диапазоне температур. С увеличением  $\alpha R$  кривые на фиг. 1 при некоторой температуре имеют асимптоты. Из формул Лиза и Лия [9] можно показать, что это температуры полной невязкой стабилизации.

При увеличении числа  $M$  температура полной стабилизации второй нейтральной кривой 2 приближается к температуре полной невязкой стабилизации, а температура полной стабилизации первой кривой 1 становится даже больше температуры полной невязкой стабилизации. При  $M = 3.2$  первая нейтральная кривая полностью исчезает, так что остается только одна нейтральная кривая, у которой на асимптотах

$$\alpha \rightarrow 0, \quad c \rightarrow 1 - M^{-1}, \quad \alpha R \rightarrow \text{const}$$

Такое разделение на первую и вторую нейтральные кривые весьма условно, но позволяет проследить динамику изменения области неустойчивости с изменением  $T_w$  и числа  $M$ .

На фиг. 4 показана зависимость температур полной стабилизации от числа  $M$ . Цифрами 1 и 2 отмечены температуры полной стабилизации первой и второй нейтральной кривых, полученные в данной работе. Цифрой 3 отмечены температуры полной невязкой стабилизации [3], цифрой 4 — температуры полной стабилизации, полученные асимптотическим методом [4].

До  $M = 1.8$  температуры полной стабилизации первой кривой совпадают с асимптотическими расчетами. После  $M = 2$  результаты данной работы даже качественно не согласуются с результатами, полученными асимптотическим методом. Ошибка, появляющаяся в асимптотических методах, связана не только с уменьшением  $\alpha R$  (увеличением  $\varepsilon = (\alpha R)^{-1/2}$ ). Несмотря на то, что после  $M = 2.7$  параметр  $\alpha R$ , полученный численным расчетом, начинает расти, разница численных и асимптотических резуль-

татов продолжает увеличиваться. По-видимому, с ростом  $M$  температурные возмущения все больше влияют на возмущения скорости, что не учитывалось в асимптотических методах решения.

Поступила 15 VII 1971

#### ЛИТЕРАТУРА

1. L e e s L. The stability of the laminar boundary layer in a compressible fluid. NACA Techn. Rept, 1947, No. 876.
2. B l o o m M. The effect of surface cooling on laminar boundary layer stability. J. Aeronaut. Sci., 1951, vol. 18, No. 9.
3. V a n D r i e s t E. R. Calculation of the stability of the laminar boundary layer in a compressible fluid on a flat plate with heat transfer. J. Aeronaut. Sci., 1952, vol. 19, No. 12.
4. D u n D. W., L i n C. C. On the stability of the laminar boundary layer in a compressible fluid. J. Aeronaut. Sci., 1955, vol. 22, No. 7.
5. R e s h o t k o E. Transition reversal and Tollmin-Schlichting instability. Phys. Fluids, 1963, vol. 6, No. 3.
6. Д р ы ж о в А. С. Расчет условий стабилизации охлаждением сверхзвукового пограничного слоя на пластине при точной постановке граничных условий для температурных возмущений. Изв. СО АН СССР, 1970, № 8, вып. 2.
7. E a g l e s P. M. The stability of a family of Jeffery-Hamel solutions for divergent channel flow. J. Fluid Mech., 1966, vol. 24, pt 1.
8. M a s k L. M. Computation of the stability of the laminar compressible boundary layer. In: Methods Computat. Phys., vol. 4, New York — London, Acad. Press., 1965.
9. Л и н ь Ц з я - ц з я о. Теория гидродинамической устойчивости. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
10. Г о д у н о в С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Усп. матем. н., 1961, т. 16, вып. 3.
11. Г а п о н о в С. А., М а с л о в А. А. Устойчивость сжимаемого пограничного слоя при дозвуковых скоростях. Изв. СО АН СССР, 1971, № 3, вып. 1.