

УСТОЙЧИВОСТЬ ОБОЛОЧЕК В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

Э. И. Григолюк, Ю. В. Липовцев

(Москва)

Рассмотрим тонкую однородную оболочку при произвольном нагружении, вызывающем потерю устойчивости. Полагаем, что оболочка имеет некоторые начальные несовершенства в форме срединной поверхности, которые можно описать заданием некоторых начальных перемещений. После приложения нагрузки в процессе ползучести происходит развитие этих начальных несовершенств и вследствие этого — перераспределение напряжений как по толщине, так и по всей поверхности оболочки. Этот процесс перераспределения напряжений может оказаться настолько существенным, что в некоторый момент времени равновесное состояние оболочки окажется неустойчивым по Эйлеру, т. е. в некоторый момент времени окажутся возможными несколько форм равновесия, переход в каждую из которых осуществляется мгновенно. Назовем этот момент времени «критическим временем» потери устойчивости оболочки.

Отклонение напряженного и деформированного докритического состояния реальной оболочки от основного, соответствующего идеально гладкой оболочке, можно описать системой уравнений относительно функции напряжений и функции прогиба, если предположить, что для величин, характеризующих эти отклонения, справедливы линейаризованные соотношения ползучести, аналогичные соотношениям для упруго-вязких тел. К этой системе уравнений нужно присоединить систему уравнений устойчивости, составленную с учетом тех напряжений и деформаций, которые определяются системой уравнений докритического состояния.

§ 1. Постановка задачи. Предположим, что компоненты напряжений докритического состояния можно представить в виде

$$\sigma_{mn} = \sigma_{mn}^{\circ} + \frac{1}{h} T_{mn} + \frac{12}{h^3} M_{mn} z \quad (1.1)$$

Здесь  $\sigma_{mn}^{\circ}$  — компоненты напряжения основного состояния;  $T_{mn}$ ,  $M_{mn}$  — удельные дополнительные усилия и моменты, отнесенные к срединной поверхности оболочки;  $z$  — расстояние от срединной поверхности;  $h$  — толщина оболочки.

Следует отметить, что в случае ползучести, когда физические соотношения носят нелинейный характер, предположение о линейном распределении напряжений по толщине оболочки, вообще говоря, противоречит гипотезе прямой нормали. Но если докритическое состояние оболочки незначительно отклоняется от основного  $\sigma_{mn}^{\circ}$ , соответствующего идеально гладкой оболочке, то физические соотношения можно линейаризовать относительно основного состояния. Тогда указанное противоречие устраняется. Уравнения равновесия докритического состояния в процессе ползучести имеют вид

$$\frac{\partial T_{m1}}{\partial x} + \frac{\partial T_{m2}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial M_{m1}}{\partial x} + \frac{\partial M_{m2}}{\partial y} = Q_m \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} + \frac{T_{11}}{R_{11}} + \frac{T_{22}}{R_{22}} - T_{11}\kappa_{11} - T_{22}\kappa_{22} - 2T_{12}\kappa_{12} = 0 \quad (1.3)$$

(m = 1, 2)

Здесь  $Q_m$  — удельная поперечная сила;  $\kappa_{mn}$  — параметры изменения кривизны и кручения срединной поверхности;  $R_{mn}$  — радиус оболочки.

Система уравнений (1.2), (1.3) с присоединенными к ним соотношениями между напряжениями и деформациями описывает процесс выпучивания

оболочки во времени, процесс перераспределения напряжений. Пусть в некоторый момент времени оболочка становится неустойчивой, это означает, что оболочка мгновенно может перейти в соседнее равновесное состояние, характеризуемое усилиями  $T_{mn} + T_{mn}^*$ ,  $Q_m + Q_m^*$ , моментами  $M_{mn} + M_{mn}^*$  и кривизнами  $\kappa_{mn} + \kappa_{mn}^*$ . Составляя уравнения равновесия для этого соседнего состояния, вычитая из них уравнения (1.2), (1.3) получим уравнения устойчивости

$$\frac{\partial T_{m_1}^*}{\partial x} + \frac{\partial T_{m_2}^*}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial M_{m_1}^*}{\partial x} + \frac{\partial M_{m_2}^*}{\partial y} = Q_m^* \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_1^*}{\partial x} + \frac{\partial Q_2^*}{\partial y} + \frac{T_{11}^*}{R_{11}} + \frac{T_{22}^*}{R_{22}} - T_{11}\kappa_{11}^* - 2T_{12}\kappa_{12}^* - T_{22}\kappa_{22}^* - \\ - T_{11}^*\kappa_{11} - 2T_{12}^*\kappa_{12} - T_{22}^*\kappa_{22} = 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

$(m = 1, 2)$

При этом были отброшены нелинейные члены.

**§ 2. Физические соотношения.** Уравнения (1.2) — (1.5) не составляют замкнутой системы уравнений поставленной задачи, ибо к ним нужно еще присоединить уравнения, определяющие связь между компонентами напряжений и компонентами деформации в процессе ползучести и в момент потери устойчивости, а также записать соотношения между компонентами деформации и составляющими перемещения.

Пусть уравнение состояния при ползучести будет

$$\dot{p}_i = g(\sigma_i, p_i) \sigma_i \quad (2.1)$$

а составляющие тензора скоростей деформации ползучести  $\dot{p}_{mn}$  и составляющие девиатора напряжений  $s_{mn}$  удовлетворяют соотношениям теории течения

$$\begin{aligned} \dot{p}_{mn} &= \frac{3}{2} g(\sigma_i, p_i) s_{mn} \\ \dot{p}_{mn} &= \varepsilon_{mn} - \frac{3}{2E} s_{mn}, \quad \dot{p}_i^2 = \frac{2}{3} \dot{p}_{mn} \dot{p}_{mn}, \quad \sigma_i^2 = \frac{3}{2} s_{mn} s_{mn} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь повторение индексов у сомножителей означает суммирование.

Обозначим напряженное состояние, соответствующее идеально гладкой оболочке, не имеющей начальных неправильностей, через  $\sigma_i^\circ$  и будем его называть основным. Тогда напряженное состояние реальной оболочки в процессе ползучести будет отклоняться от основного. На основании этого компоненты напряжений и скоростей деформации ползучести можно представить в виде

$$s_{mn} = s_{mn}^\circ + \delta s_{mn}, \quad \dot{p}_{mn} = \dot{p}_{mn}^\circ + \delta \dot{p}_{mn} \quad (2.3)$$

В соответствии с этим перепишем уравнения (2.1), (2.2)

$$\begin{aligned} \dot{p}_i^\circ + \delta \dot{p}_i &= g(\sigma_i^\circ + \delta \sigma_i, p_i^\circ + \delta p_i) (\sigma_i^\circ + \delta \sigma_i) \\ \dot{p}_{mn}^\circ + \delta \dot{p}_{mn} &= \frac{3}{2} g(\sigma_i^\circ + \delta \sigma_i, p_i^\circ + \delta p_i) (s_{mn}^\circ + \delta s_{mn}) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Причем для основного состояния также справедливы уравнения (2.1), (2.2)

$$\dot{p}_i^\circ = g(\sigma_i^\circ, p_i^\circ) \sigma_i^\circ, \quad \dot{p}_{mn}^\circ = \frac{3}{2} g(\sigma_i^\circ, p_i^\circ) s_{mn}^\circ$$

Представляя теперь правые части уравнений (2.4) в виде ряда в окрестности основного состояния и удерживая лишь линейные члены, получим

(см. работы [1,2])

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_{mn}^{\circ} - (2/3E)^{-1} \delta s_{mn}^{\circ} &= 2/3 g(\sigma_i^{\circ}, p_i^{\circ}) \{ \delta s_{mn} + \alpha_{mn}^* (Ec \delta p_i + b \delta \sigma_i) \} \\ \delta p_i^{\circ} &= g(\sigma_i^{\circ}, p_i^{\circ}) \{ Ec \delta p_i + (b+1) \delta \sigma_i \} \\ c &= \frac{\sigma_i^{\circ}}{E} \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial p_i}, \quad b = \frac{\sigma_i^{\circ}}{g} \frac{\partial g}{\partial \sigma_i}, \quad \alpha_{mn}^* = \frac{s_{mn}^{\circ}}{\sigma_i^{\circ}} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Вводя новую переменную времени

$$\tau = E \int_0^t g(\sigma_i^{\circ}, p_i^{\circ}) dt \quad (2.6)$$

найдем

$$\begin{aligned} \delta s_{mn}^{\circ} + \delta s_{mn} &= 2/3 E \delta \varepsilon_{mn}^{\circ} - \alpha_{mn}^* (Ec \delta p_i + b \delta \sigma_i) \\ E \delta p_i^{\circ} &= Ec \delta p_i + (b+1) \delta \sigma_i \end{aligned} \quad (2.7)$$

Для начального момента времени примем закон Гука

$$\delta \varepsilon_{mn} = 2/3 E^{-1} \delta s_{mn} \quad (2.8)$$

После интегрирования уравнений (2.7), с учетом начальных условий (2.8) будем иметь

$$\delta s_{mn} = 2/3 EI \delta \varepsilon_{mn} - \alpha_{mn}^* G \delta \sigma_i \quad (2.9)$$

Здесь

$$\begin{aligned} I \delta \varepsilon_{mn} &= \delta \varepsilon_{mn} - e^{-\tau} \int_0^{\tau} e^{\tau} \delta \varepsilon_{mn} d\tau \\ G \delta \sigma_i &= e^{-\tau} \int_0^{\tau} e^{c^*} \left\{ e^{c^*} \int_0^{\tau} (b+1) e^{-c^*} \delta \sigma_i d\tau + b \delta \sigma_i \right\} d\tau \quad (c^* = \int c d\tau) \end{aligned}$$

Для приращений деформаций оболочки используем выражения

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_{mn} &= \delta \varepsilon_{mn}^c + z (\kappa_{mn} - \kappa_{mn}^{\circ}) \\ \delta \varepsilon_{mn}^c &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_m}{\partial x_n} + \frac{\partial u_n}{\partial x_m} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x_n} \frac{\partial w}{\partial x_m} - \frac{1}{2} \frac{\partial w^{\circ}}{\partial x_n} \frac{\partial w^{\circ}}{\partial x_m} - \frac{w - w^{\circ}}{R_{mn}} \delta_{mn} \quad (2.10) \\ (x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad m = 1, 2, \quad n = 1, 2) \quad u_1 = u, \quad u_2 = v \end{aligned}$$

Здесь  $\kappa_{mn}^{\circ}$ ,  $w^{\circ}$  — начальные кривизны и начальный прогиб, которые имеют место в оболочке до приложения нагрузки.

§ 3. Усилия и моменты. Выпишем выражения для усилий и моментов, отнесенных к срединной поверхности оболочки,

$$M_{11} = \int_{(z)} (2\delta s_{11} + \delta s_{22}) z dz, \dots, \quad T_{11} = \int_{(z)} (2\delta s_{11} + \delta s_{22}) dz, \dots, \quad (3.1)$$

Подставляя в выражения (3.1) напряжения (2.9) и исключая деформации, согласно (2.10), имеем ( $D = 1/3 E h^3$ )

$$\begin{aligned} M_{11} &= DI (\kappa_{11} + 1/2 \kappa_{22} - \kappa_{11}^{\circ} - 1/2 \kappa_{22}^{\circ}) - \alpha_{11} G M_i \\ M_{22} &= DI (\kappa_{22} + 1/2 \kappa_{11} - \kappa_{22}^{\circ} - 1/2 \kappa_{11}^{\circ}) - \alpha_{22} G M_i \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} M_{12} &= 1/2 DI (\kappa_{12} - \kappa_{12}^{\circ}) - \alpha_{12} G M_i \\ M_i &= (\alpha_{11} - 1/2 \alpha_{22}) M_{11} + (\alpha_{22} - 1/2 \alpha_{11}) M_{22} + 3\alpha_{12} M_{12} \\ \alpha_{11} &= 2\alpha_{11}^* + \alpha_{22}^*, \quad \alpha_{22} = 2\alpha_{22} + \alpha_{11} \quad \alpha_{12} = \alpha_{12}^* \end{aligned} \quad (3.3)$$

Аналогичным образом получаем удельные усилия

$$T_{11} = \frac{4Eh}{3} I \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w^\circ}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{4} \left( \frac{\partial w^\circ}{\partial y} \right)^2 \right] - \frac{w-w^\circ}{R_{11}} - \frac{w-w^\circ}{2R_{22}} - \alpha_{11} GT_i$$

$$T_{22} = \frac{4Eh}{3} I \left[ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w^\circ}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{4} \left( \frac{\partial w^\circ}{\partial x} \right)^2 \right] - \frac{w-w^\circ}{2R_{11}} - \frac{w-w^\circ}{R_{22}} - \alpha_{22} GT_i \quad (3.4)$$

$$T_{12} = \frac{Eh}{3} I \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial w^\circ}{\partial x} \frac{\partial w^\circ}{\partial y} \right] - \alpha_{12} GT_i \quad (3.5)$$

$$T_i = (\alpha_{11} - 1/2 \alpha_{22}) T_{11} - (\alpha_{22} - 1/2 \alpha_{11}) T_{22} + 3\alpha_{12} T_{12}$$

Для приращений моментов и усилий при потере устойчивости справедливы следующие соотношения:

$$M_{11}^* = D(\alpha_{11}^* + 1/2 \alpha_{22}^*), \quad M_{22}^* = D(\alpha_{22}^* + 1/2 \alpha_{11}^*), \quad M_{12}^* = 1/2 D \alpha_{12}^*$$

$$T_{11}^* = \frac{4Eh}{3} \left[ \frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial v^*}{\partial y} - \frac{w^*}{2R_{22}} - \frac{w^*}{R_{11}} + 2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w^*}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w^*}{\partial y} \right]$$

$$T_{22}^* = \frac{4Eh}{3} \left[ \frac{\partial v^*}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^*}{\partial x} - \frac{w^*}{R_{22}} - \frac{w^*}{2R_{11}} + 2 \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w^*}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w^*}{\partial x} \right] \quad (3.6)$$

$$T_{12}^* = \frac{Eh}{3} \left[ \frac{\partial u^*}{\partial y} + \frac{\partial v^*}{\partial x} + \frac{\partial w^*}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w^*}{\partial y} \right]$$

Выражения для  $T_{mn}^*$  линеаризованы относительно  $w^*$ .

#### § 4. Уравнения устойчивости пологой оболочки общего вида.

Вводя функции усилий для  $T_{mn}$  и  $T_{mn}^*$ , удовлетворяем первым уравнениям (1.2), (1.4), а для определения силовых функций составляем условия неразрывности деформаций. Оставшиеся уравнения равновесия (1.2), (1.4) записываем в перемещениях, используя при этом соотношения (3.3), (3.5). После выполнения всех этих операций будем окончательно иметь систему уравнений докритического состояния

$$K(w, F) + G[K(w, F) + T(w)] = 0$$

$$\nabla^2 \nabla^2 F + \Lambda_1^2 GF = -Eh I \left[ \frac{1}{R_{11}} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w^\circ}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{R_{22}} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w^\circ}{\partial x^2} \right) + \frac{L(w, w)}{2} - \frac{L(w^\circ, w^\circ)}{2} \right] \quad (4.1)$$

$$K(w, F) = D \nabla^2 \nabla^2 I (w - w^\circ) - h \sigma_i^\circ \Lambda w - L(w, F) - \frac{1}{R_{22}} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{1}{R_{11}} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

$$L(w, F) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

$$T(w) = -3/4 D \Lambda^2 I (w - w^\circ)$$

и систему уравнений устойчивости

$$\nabla^2 \nabla^2 F^* = -Eh \left( \frac{1}{R_{11}} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} + \frac{1}{R_{22}} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} + L(w^*, w) \right)$$

$$D \nabla^2 \nabla^2 w^* - h \sigma_i^\circ \Lambda w^* - \frac{1}{R_{22}} \frac{\partial^2 F^*}{\partial x^2} - \frac{1}{R_{11}} \frac{\partial^2 F^*}{\partial y^2} - L(w, F^*) - L(w^*, F) = 0$$

$$\Lambda = \alpha_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\alpha_{12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \alpha_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (4.2)$$

$$\Lambda_1 = \alpha_{11} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) + \alpha_{22} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + 3\alpha_{12} \frac{\partial}{\partial x \partial y}$$

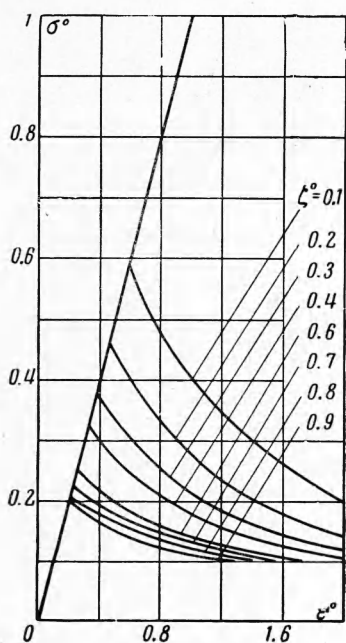
§ 5. **Замкнутая цилиндрическая оболочка при осевом сжатии.** Рассмотрим устойчивость замкнутой цилиндрической оболочки в случае равномерного осевого сжатия ( $R_{11} = \infty$ ,  $R_{22} = R$ ,  $\alpha = -1$ ,  $\alpha_{12} = \alpha_{22} = 0$ ), используя при этом простейший закон ползучести

$$p_i = B\sigma_i \quad (5.1)$$

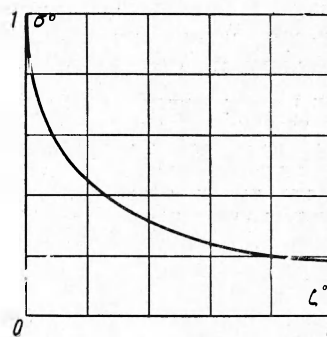
Тогда система уравнений (4.1) примет вид

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 F &= -\frac{Eh}{R} I \left[ \frac{\partial^2 (w - w^\circ)}{\partial x^2} + \frac{R}{2} L(w, w) - \frac{R}{2} L(w^\circ, w^\circ) \right] \\ D \nabla^2 \nabla^2 I (w - w^\circ) + T^\circ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - L(w, F) &= 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Для решения вопроса о выборе формы прогиба до и после потери устойчивости, а также формы начального прогиба обратимся к нелинейной задаче о закритических деформациях цилиндрической оболочки, рассматриваемой рядом авторов в работах [3-8]. В этих работах используются различные представления формы послекритического прогиба,



Фиг. 1



Фиг. 2

однако все они содержат одну общую часть, которую можно записать в виде

$$w_1 = f_1 \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R} + f_2 \sin^2 \frac{m\pi x}{L} + f_0$$

Принимая это выражение послекритического прогиба за основу, положим

$$\begin{aligned} w^\circ &= h\zeta^0 \sin^2 \frac{m\pi x}{L}, & w &= h\zeta(\tau) \sin^2 \frac{m\pi x}{L} + h\zeta_1(\tau) \\ w^* &= h\zeta^* \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R} \end{aligned} \quad (5.3)$$

В результате после потери устойчивости будем иметь

$$w_1 = h\zeta^* \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R} + h\zeta \sin^2 \frac{m\pi x}{L} + h\zeta_1$$

